

Utilisation d'un analyseur de spectre associé à un système d'acquisition de données

par Patrick BRUNET
Lycée d'enseignement Général et Technique Henri Brisson
B.P. 338 - 18103 Vierzon Cedex

RÉSUMÉ

Le but de cet article n'est pas de démontrer tous les théorèmes de traitement du signal relatifs à l'analyse de FOURIER mais de permettre à un utilisateur «lambda» de bien voir ce qu'il fait et de connaître les limites de son analyseur de spectre. Les démonstrations peuvent d'ailleurs être sautées dans un premier temps pour n'en utiliser que les résultats qui se trouvent dans les encadrés.

INTRODUCTION

De nombreux systèmes d'acquisition sont livrés avec un logiciel permettant de faire de l'analyse spectrale. La mise en œuvre n'est en général pas compliquée. Les oscilloscopes numériques modernes intègrent également cette fonction.

Cette analyse spectrale est faite numériquement, c'est-à-dire qu'à partir du tableau des valeurs du signal mémorisé, on applique un algorithme permettant de calculer les composantes de FOURIER (algorithme dit FFT : Fast FOURIER Transform en Anglais ou TFR : Transformée de FOURIER Rapide en Français).

Les questions que l'on peut se poser sont :

1. Quels sont les meilleurs réglages possibles pour obtenir de bons résultats ?

Par exemple, si l'on veut étudier un signal périodique, doit-on prendre un nombre entier de périodes ?

Cela a-t-il une incidence sur le résultat ? Quelle est la «résolution» de l'analyseur, c'est-à-dire la plus petite «distance» en fréquence entre deux raies consécutives tout juste séparées.

2. *Que signifient les expressions «fenêtre naturelle», «fenêtre de Hamming» utilisées dans certains logiciels ?*

Les conclusions pratiques que l'on mettra en évidence seront utiles à chaque fois que l'on aura à analyser une grandeur générée à partir d'une source de fréquence bien définie. On peut ici citer le cas des courants fournis à partir du réseau EDF par exemple.

Enfin en annexe, on trouvera une méthode pour recomposer le signal tronqué à N harmoniques. Il sera possible notamment d'extraire le fondamental du signal.

1. TRANSFORMÉE DE FOURIER D'UN SIGNAL CONTINU

On ne se préoccupera pas des problèmes d'existence des grandeurs définies. L'indice m sera réservé au **domaine fréquentiel** et l'indice n au **domaine temporel**.

1.1. Définition

$\underline{X}(f)$ représente la transformée de FOURIER d'un signal $x(t)$ fonction du temps. $x(t)$ sera le **signal que l'on appliquera à l'entrée du système d'acquisition**. $x(t)$ est donc fonction réelle du temps. f représente la fréquence.

$$\underline{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-j 2\pi ft) dt \quad (1)$$

$\underline{X}(f)$ apparaît comme une fonction complexe **même** si $x(t)$ est réelle.

Par transformation inverse, on obtient $x(t)$:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{X}(f) \exp(+j 2\pi ft) df \quad (2)$$

Remarques :

1. $X(f) = |\underline{X}(f)|$, module de $\underline{X}(f)$ est appelé spectre en amplitude du signal $x(t)$.

2. Si $x(t)$ est réel :

$$\begin{aligned}\underline{X}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi ft) dt + j \int_{-\infty}^{+\infty} -x(t) \sin(2\pi ft) dt \\ &= \operatorname{Re} \underline{X} + j \operatorname{Im} \underline{X}.\end{aligned}$$

$\operatorname{Re} \underline{X}$ est donc une fonction réelle paire de f et $\operatorname{Im} \underline{X}$ est une fonction impaire. $\mathbf{X}(f) = \sqrt{(\operatorname{Re} \underline{X})^2 + (\operatorname{Im} \underline{X})^2}$ est donc une fonction paire de f . De la même façon, l'argument de $\underline{X}(f)$ est une fonction impaire.

3. (2) montre que pour la reconstitution du signal, la connaissance du spectre en amplitude n'est pas suffisante, il faut aussi l'argument.

1.2. Cas particulier du signal périodique réel : $x_p(t)$ de fréquence f_p

Dans ce cas (2) se résume à une somme discrète et l'on écrit :

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \cdot \exp(+j 2\pi m f_p t)$$

en utilisant la définition complexe des coefficients de FOURIER. Il est aussi possible d'écrire :

$$x_p(t) = \sum_{-\infty}^0 c_m \cdot \exp(+j 2\pi m f_p t) + \sum_0^{+\infty} c_m \cdot \exp(+j 2\pi m f_p t)$$

Comme le spectre du signal $x(t)$ réel est pair, on doit forcément avoir $c_{-m} = c_m^*$:

$$x_p(t) = \sum_0^{\infty} c_{-m} \cdot \exp(-j 2\pi m f_p t) + \sum_0^{+\infty} c_m \cdot \exp(+j 2\pi m f_p t)$$

Posons alors $c_m = 1/2 (a_m - j b_m)$. On a :

$$c_{-m} = c_m^* = 1/2 (a_m + j b_m)$$

$$\begin{aligned}x_p(t) &= \sum_0^{\infty} 1/2 (a_m + j b_m) (\cos(2\pi m f_p t) - j \sin(2\pi m f_p t)) + \\ &\quad \sum_0^{\infty} 1/2 (a_m - j b_m) (\cos(2\pi m f_p t) + j \sin(2\pi m f_p t))\end{aligned}$$

$x_p(t) = \sum_0^{\infty} a_m \cdot \cos(2\Pi m f_p t) + b_m \cdot \sin(2\Pi m f_p t)$ où n'apparaissent plus que des fréquences positives.

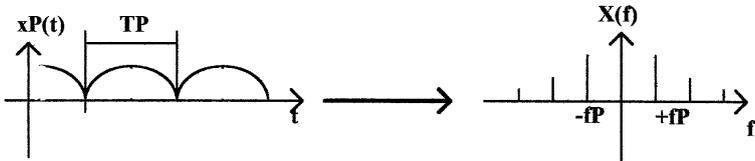
Si $X(mf)$ représente l'amplitude de l'harmonique de rang m , on a :

$$X(mf_p) = \sqrt{(a_m^2 + b_m^2)} = 2 |c_m| \tag{3}$$

Dans cette expression, le coefficient 2 traduit la conservation de l'énergie répartie sur la fréquence $+f_p$ et $-f_p$ dans le cas de la décomposition en c_m et concentrée sur la fréquence f_p dans le cas (a_m, b_m) .

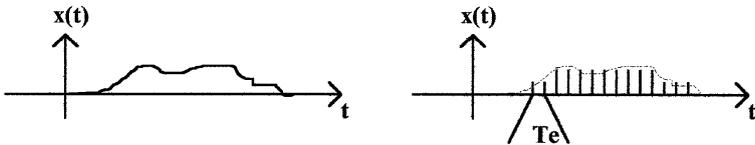
CONCLUSION

Le spectre d'un signal périodique dans le temps est discret. A une périodicité T_p dans le temps correspond une discrétisation en fréquence de «pas» : $1/T_p = f_p$.

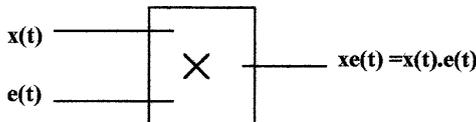


1.3. Cas d'un signal échantillonné

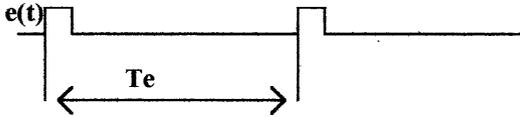
L'enregistrement du signal $x(t)$ par le système d'acquisition se traduit par un échantillonnage de celui-ci. Les valeurs de $x(t)$ sont mémorisées à des instants multiples de T_e : période d'échantillonnage.



1.3.1. Modélisation de la fonction de l'échantillonneur



$e(t)$ est un signal de période T_e (f_e : fréquence d'échantillonnage). L'échantillonnage idéal serait celui pour lequel le signal $e(t)$ est à 1 pendant une durée très courte et nul le reste du temps. Le signal échantillonné $x_e(t)$ est obtenu en faisant le produit de $x(t)$ par $e(t)$. Dans la pratique, $e(t)$ a l'allure suivante :



$e(t)$ peut être écrit sous la forme :

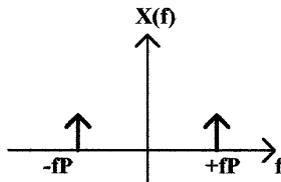
$$e(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m \cdot \exp(+j 2\Pi m f_e t).$$

Soit $x(t) = X \cos(2\Pi f_p t)$ le signal à échantillonner.

Calculons $\underline{X}(f)$, spectre de $x(t)$:

$$\begin{aligned} \underline{X}(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} X \cos(2\Pi f_p t) \cdot \exp(-j 2\Pi f t) dt \\ &= X/2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(+j 2\Pi f_p t) + \exp(-j 2\Pi f_p t)) \cdot \exp(-j 2\Pi f t) dt \\ \underline{X}(f) &= X/2 \int_{-\infty}^{+\infty} (\exp(-j 2\Pi (f - f_p) t) + \exp(-j 2\Pi (f + f_p) t)) dt \end{aligned}$$

où l'on remarque que compte tenu du caractère oscillatoire de l'exponentielle, il n'y aura de contribution à l'intégrale qu'en $+f_p$ et $-f_p$.

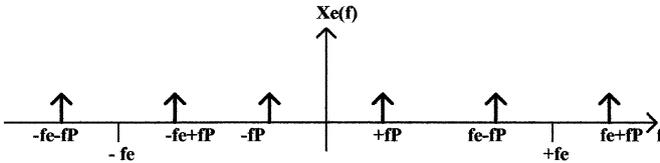


Pour $x_e(t)$, signal échantillonné on a :

$$x_e(t) = x(t) \cdot e(t) = X/2 \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m (\exp (+j 2\Pi f_p t) + \exp (-j 2\Pi f_p t)) \cdot \exp (+j 2\Pi m f_c t)$$

$$x_e(t) = X/2 \sum_{-\infty}^{+\infty} c_m [\exp (+j 2\Pi (m f_c + f_p) t) + \exp (+j 2\Pi (m f_c - f_p) t)]$$

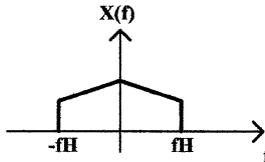
On constate sur cette relation que des raies vont apparaître non seulement à $+f_p$ et $-f_p$ mais aussi des raies semblables centrées autour des fréquences $+m f_c$ et $-m f_c$. On dit qu'il y a **périodisation du spectre** c'est-à-dire répétition du motif spectral contenu dans le signal avec un pas $\Delta f = f_c$. La figure ci-dessous représente $X_e(f)$ dans le cas d'un échantillonnage parfait. En réalité les raies centrées autour des fréquences multiples auront des amplitudes décroissantes avec m . Dans le schéma ci-dessous nous n'avons représenté que celles correspondant à $m = 0$ et 1.



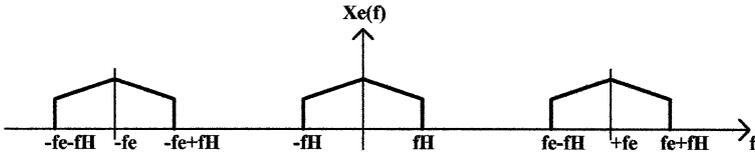
CONCLUSION

La fonction d'échantillonnage introduit une périodisation du spectre à la «période fréquentielle» $f_c = 1/T_c$.

1.3.2. Cas d'un signal à spectre borné



$x(t)$ a un spectre pair (signal réel) limité par une fréquence supérieure f_H . Le raisonnement précédent peut être généralisé, ainsi le signal $x_e(t)$ échantillonné aura un spectre $X_e(f)$ périodisé de période f_e .



GÉNÉRALISATION

A une discrétisation temporelle du signal (échantillonnage de période T_e) correspond une périodisation du spectre de période $f_e = 1/T_e$.

1.3.3. Théorème de SHANNON

On remarque sur le dessin ci-dessus qu'il peut y avoir recouvrement des spectres voisins si $f_e < 2f_H$. Pour éviter ce phénomène, il y a lieu d'échantillonner à une fréquence au moins deux fois supérieure à la fréquence maxi du spectre. C'est le **théorème de SHANNON**.

Remarque :

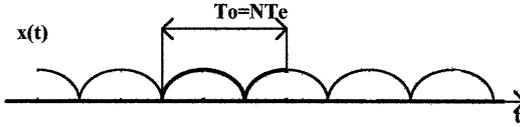
En pratique, f_H n'est pas naturellement limitée. On utilisera avant l'échantillonneur un filtre passe-bas dit «antirepliement» qui coupera les fréquences supérieures à f_H choisie un peu inférieure à $f_e/2$.

1.4. Dualité temps-fréquence

Un signal échantillonné («raies temporelles») présente une périodisation spectrale de la même façon qu'un signal périodique dans le temps présente un spectre échantillonné.

2. TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE (TFD)

Les signaux issus d'une acquisition sont limités dans le temps ! La durée d'acquisition est $T_0 = N * T_e$ où N représente le nombre de points de l'acquisition.



La transformée de FOURIER se limitera donc à :

$$\underline{X}(f) = \int_{(T_0)} x(t) \cdot \exp(-j 2\pi ft) dt.$$

Le calcul d'intégrale peut-être approximé numériquement par la **méthode des rectangles** : largeur T_e et de hauteur :

$$x(nT_e) \cdot \exp(-j 2\pi fn T_e).$$

D'où :

$$\underline{X}(f) \approx T_e \sum_0^{N-1} x(nT_e) \cdot \exp(-j 2\pi fn T_e)$$

à condition que T_e reste petit par rapport aux variations de $x(t)$. Toutefois dans cette expression $\underline{X}(f)$ (complexe) reste une fonction définie pour toute valeur de f . Mais il est possible de calculer numériquement $\underline{X}(f)$ en se fixant un pas de calcul $f_0 = 1/T_0 = 1/NT_e = f_e/N$ (T_0 : durée totale de l'enregistrement). On obtiendra ainsi N valeurs successives de $\underline{X}(f)$ c'est-à-dire un nombre identique à celui des échantillons de $x(t)$.

On aura alors :

$$\begin{aligned} \underline{X}(mf_0) &= T_e \sum_0^{N-1} x(nT_e) \cdot \exp(-j 2\pi mf_0 nT_e) \\ &= T_e \sum_0^{N-1} x(nT_e) \cdot \exp(-j 2\pi mn/N) \end{aligned}$$

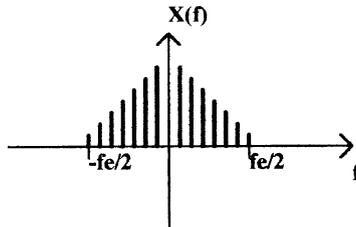
ou encore en omettant la référence au temps et à la fréquence :

$$\underline{X}_m = T_e \sum_0^{N-1} x_n \cdot \exp(-j 2\pi mn/N)$$

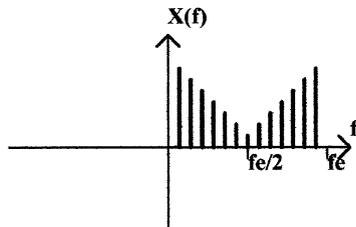
x_n représente le $n^{\text{ième}}$ échantillon temporel et \underline{X}_m la $m^{\text{ième}}$ composante spectrale. **C'est la transformée de FOURIER discrète.**

Compte tenu de la symétrie du spectre (signal réel donc spectre pair), la séquence des $\underline{X(mf_0)}$ sera calculée entre $-f_c/2$ et $f_c/2 - f_0$ soit $-N/2 < m < N/2 - 1$.

D'où la figure ci-dessous :



Avec la périodisation du spectre de période fréquentielle f_c , il est facile de comprendre que la séquence des $\underline{X_m}$ peut être calculée de $m=0$ à $m=N-1$, ce qui symétrise la séquence des échantillons temporels et celle des composantes spectrales.



CONCLUSION PRATIQUE POUR L'UTILISATEUR

Le spectre étant symétrique par rapport à $f_c/2$, il ne sera représenté que de 0 à $f_c/2$. Ainsi avec une période d'échantillonnage de 30 μ s, on le représentera de 0 à 16,7 KHz.

La reconstitution du signal se fera de la même façon en utilisant la transformée inverse :

$$x_R(nT_e) = f_0 \sum_0^{N-1} \underline{X(mf_0)} \cdot \exp(+j2\pi nm/N).$$

3. TRANSFORMÉE DE FOURIER RAPIDE TFR OU FFT

Si N est une puissance de 2, il existe des algorithmes permettant de calculer rapidement les X_m . Cela tient au fait que $\exp(+j2\pi nm/N)$ peut être calculé pour seulement quelques points grâce à la périodicité 2π si N est une puissance de 2.

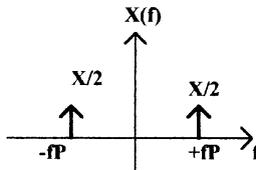
4. CAS (FRÉQUENT !) DE L'ANALYSE SPECTRALE D'UN SIGNAL PÉRIODIQUE ÉCHANTILLONNÉ

C'est le cas par exemple du courant fourni par le réseau EDF à une charge alimentée par l'intermédiaire d'un dispositif d'électronique de puissance comme on le verra plus loin. Ça serait aussi le cas d'un signal sonore généré avec un GBF.

4.1. Spectre d'un signal *purement sinusoïdal* (fréquence f_p) de $-\infty$ à $+\infty$

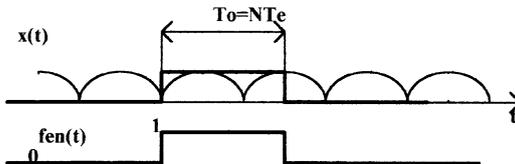
$$x(t) = X \cos(2\pi f_p t).$$

Il est constitué de deux raies pures à $\pm f_p$.



4.2. Influence de la durée limitée de l'acquisition $T_0 = NT_e$ sur le spectre

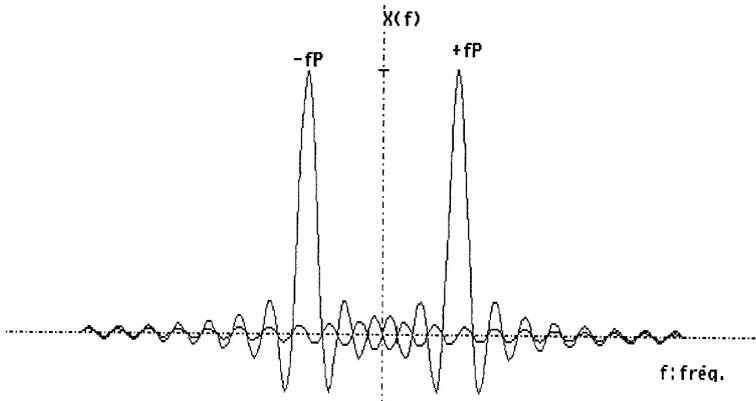
Le signal analysé résulte de la multiplication de $x(t)$ avec une fonction Fenêtre de largeur T_0 . Soit $x_{fen}(t)$ ce signal.



$$\begin{aligned}
 \underline{X_{\text{fen}}(f)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot \text{fen}(t) \cdot \exp(-j 2\pi ft) dt \\
 &= \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} x(t) \cdot \exp(-j 2\pi ft) dt \\
 &= \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} X/2 (\exp(+j 2\pi f_p t) + \exp(-j 2\pi f_p t)) \cdot \exp(-j 2\pi ft) dt \\
 \underline{X_{\text{fen}}(f)} &= \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} X/2 [(\exp(-j 2\pi (f - f_p) t) + \exp(-j 2\pi (f + f_p) t))] dt
 \end{aligned}$$

$$\underline{X_{\text{fen}}(f)} = X/2 \cdot [\text{sinc}(\Pi(f - f_p) T_0) + \text{sinc}(\Pi(f + f_p) T_0)]$$

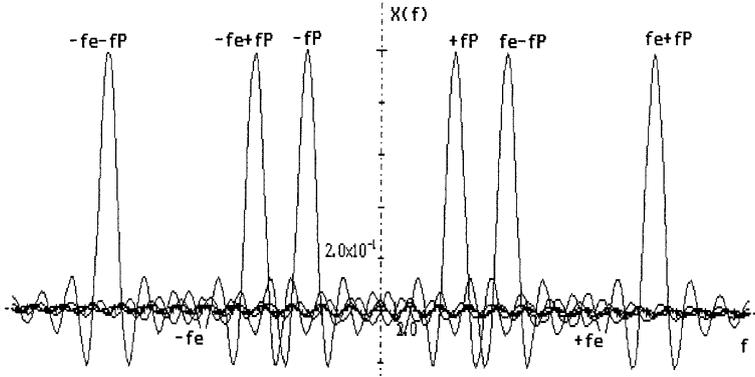
Où l'on constate que le «fenêtrage naturel» (c'est-à-dire le fait que le signal mémorisé ait une durée limitée) modifie le spectre du signal réel en élargissant les raies pures avec un sinus cardinal dont la demi-largeur de la raie centrale est : $1/T_0 = 1/NT_c = f_c/N$.



Sinus cardinaux centrés sur $+f_p$ et $-f_p$

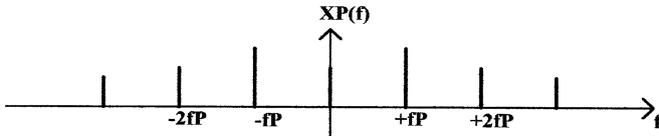
4.3. Effet de l'échantillonnage

On sait qu'il conduit à une périodisation du spectre.



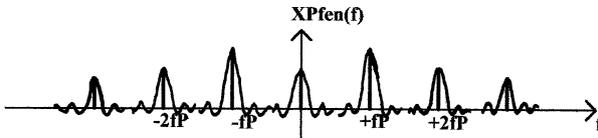
Sinus cardinaux centrés sur $(+f_p, -f_p)$ $(-f_e - f_p, -f_e + f_p)$ et $(f_e - f_p, f_e + f_p)$.

4.4. Analyse d'un signal périodique



Le spectre du signal $x_p(t)$ non limité dans le temps est constitué de raies situées à $0, \pm f_p, \pm 2 f_p, \pm 3 f_p$, etc.

Le spectre du signal «fenêtré» $x_{Pfen}(t)$ sera donc :



Le spectre du signal périodique échantillonné $x_{Pfen_e}(t)$ sera donc le même que ci-dessus mais avec une reproduction de tous ces motifs tous les $\pm f_e$.

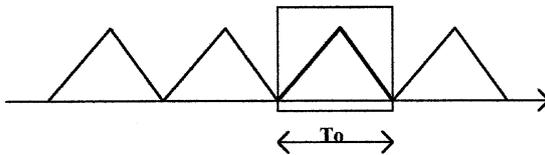


Et l'on comprend sur ce schéma les risques de mélange entre les différentes raies à cause de leurs élargissements respectifs.

5. CONDITION D'OBTENTION D'UN SPECTRE DE BONNE QUALITÉ À L'AIDE DE LA TRANSFORMÉE DE FOURIER DISCRÈTE DANS LE CAS DES SIGNAUX PÉRIODIQUES

Il faut rappeler que le calcul ne s'effectue qu'aux valeurs de **f multiples de $f_0 = 1/T_0 = 1/NT_e = f_e/N$**

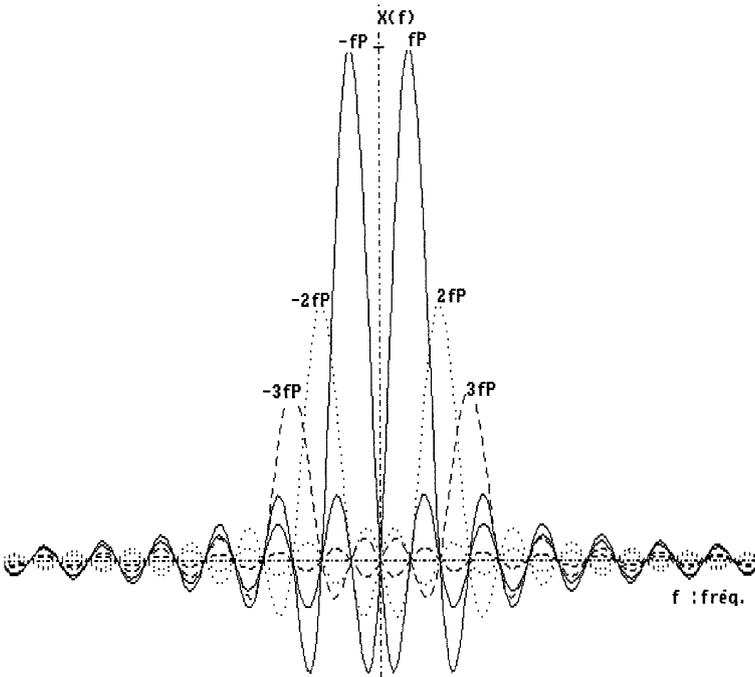
5.1. Choix de la durée d'enregistrement égale à une période du signal $T_0 = T_p$



Dans ce cas la **distance entre deux pics successifs est f_p** et la **demi-largeur d'une raie $1/T_0 = 1/T_p = f_p$** donc exactement égale à la distance entre deux raies comme l'indique la figure ci-dessous.

Il est alors remarquable que le sinc de la raie centrée sur f_p est nul pour la raie centrée sur $2f_p$. Il n'y aura donc pas mélange entre les raies aux fréquences multiples de f_0 .

Or le calcul de la transformée de FOURIER ne se fera qu'au pas de $f_0 = f_p$ ainsi on mesurera le sommet du sinc. Le résultat obtenu dans ce cas sera donc exact, on ne «verra» pas la dispersion de la raie. On montrerait de la même façon que ce résultat reste vrai si on enregistre un nombre entier de périodes.



Sinus cardinaux centrés sur : $\pm f_p$, $\pm 2 f_p$, $\pm 3 f_p$.

5.2. Conclusion pratique

Pour obtenir un bon résultat lors de l'analyse d'un **signal périodique**, il faut choisir une durée d'acquisition multiple de la période du signal. Dans le cas contraire des raies parasites apparaîtront qui traduisent l'élargissement des raies dû à la durée limitée de l'acquisition.

Un «bon» analyseur de spectre devra donc laisser le choix à l'utilisateur de la période d'échantillonnage pour qu'il puisse ajuster la durée de son acquisition.

La résolution de l'analyseur (**plus petite fréquence entre deux raies**) est égale à $1/T_0$. On ne s'étonnera donc pas de voir apparaître des raies «sous-multiples» de la fréquence f_p si l'on enregistre plus de une période de signal.

6. RÔLE DES «FENÊTRES»

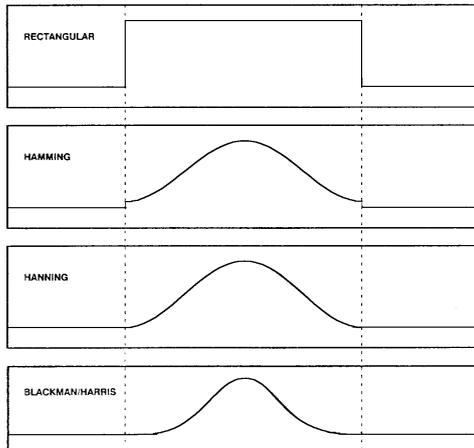
S'il n'est pas possible de choisir un multiple entier de périodes comme durée d'acquisition, le spectre discret sera incorrect.

Ceci peut être expliqué d'une autre façon

On a vu (1.4.) qu'un signal échantillonné donne lieu à une périodisation du spectre. En raisonnant dans l'espace des fréquences on peut dire de la même façon qu'un spectre échantillonné (TFD) donne lieu à un signal temporel périodisé. Cela revient à dire que le signal réellement analysé est constitué de la **juxtaposition de morceaux de signal de durée T_0** . Ainsi, si on a enregistré exactement une période, la mise bout à bout reconstitue le signal de $-\infty$ à $+\infty$. Si ce n'est pas le cas, il y aura des discontinuités à chaque raccordement. Ce sont **ces discontinuités en début et fin d'enregistrement qui sont sources d'ennui**.

Pour éviter cela, il faut diminuer l'influence des extrémités de l'enregistrement. **C'est le rôle des fenêtres de filtrage.**

Ainsi, la fenêtre naturelle est en fait celle qui conserve les échantillons tels quels. Il existe dans la littérature de nombreuses fenêtres de profil varié (**triangulaire, Hamming, Hanning, parabolique, cosinusoidale, Blackman, Kaiser, Harris, etc.**). Pratiquement, l'échantillon de rang n est multiplié par la valeur du coefficient fenêtre de rang n .



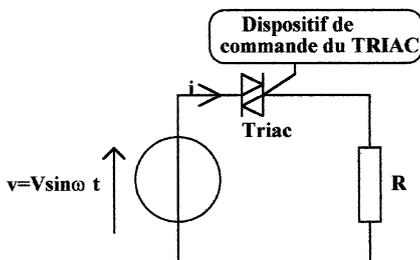
Fenêtre : Rectangulaire, Hamming, Hanning, Blackman/Harris.

Sur les graphes précédents, on remarque par exemple que la fenêtre de Hamming n'annule pas complètement l'influence des échantillons des extrémités de l'enregistrement. Ce n'est pas le cas des fenêtres de Hanning et de Blackman/Harris. On pourra se reporter au B.U.P. n° 754 (Acquisition et traitement de données) pour la notion de «fenêtre» (article de J. ESQUIEU).

CONCLUSION PRATIQUE

Dans le cas de l'observation d'un signal périodique, mieux vaut choisir une période d'échantillonnage permettant d'avoir un nombre entier de périodes plutôt que d'utiliser une fenêtre de filtrage.

7. APPLICATION



On s'intéresse à l'alimentation d'un **circuit résistif** à partir d'une source de tension supposée sinusoïdale (réseau EDF) par l'intermédiaire d'un triac. Le Triac est le composant utilisé dans les gradateurs de luminaires halogènes qui sont maintenant très répandus dans le grand public. L'acquisition des signaux «**tension**» et «**courant**» est réalisée avec la carte **PCMES2** gérée par le logiciel **PHYSCOPE**.

La **figure 1** représente un enregistrement avec une période d'échantillonnage ajustée à **78 μ s** de telle sorte que l'on ait une durée d'enregistrement égale à une période de signal. La **figure 2** donne alors le spectre du signal «**courant**» en utilisant la **fenêtre naturelle**. On constate la présence d'harmoniques impairs seulement compte tenu de la symétrie 1/2 onde du courant : les raies sont centrées sur 50 Hz, 150 Hz, 250 Hz...

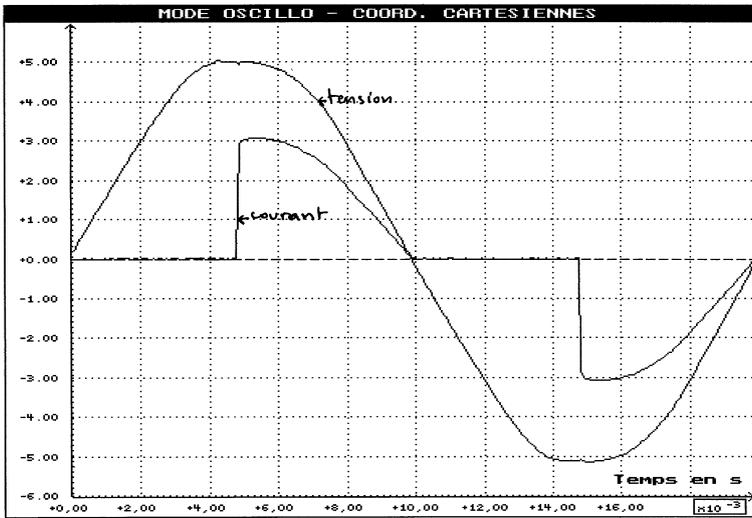


Figure 1 : Enregistrement du courant et de la tension avec $T_e = 78 \mu s$.

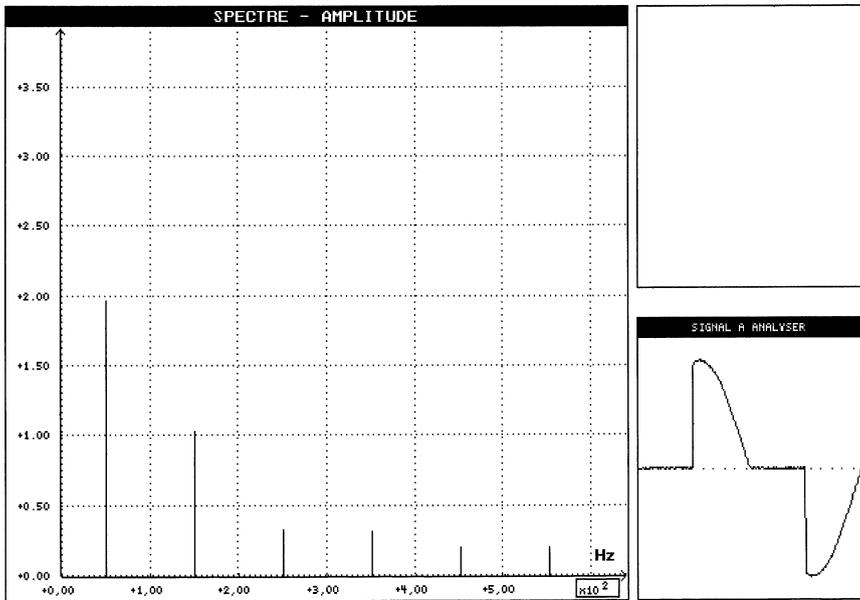


Figure 2 : Spectre du signal «courant» enregistré avec $T_e = 78 \mu s$. Utilisation de la fenêtre naturelle.

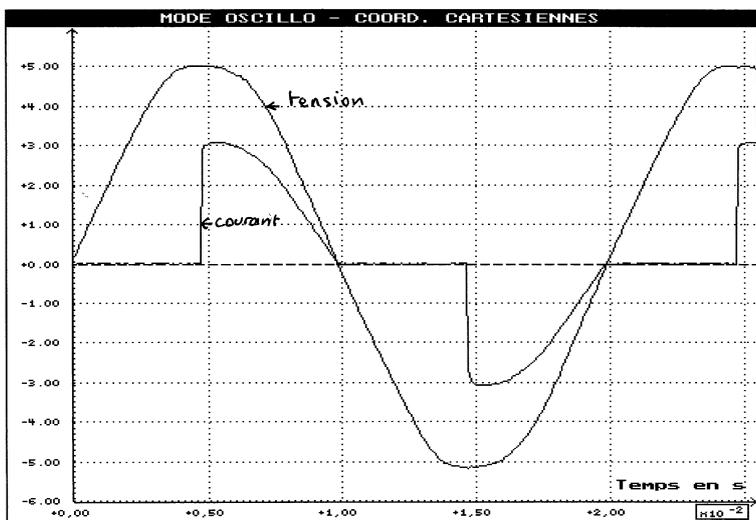


Figure 3 : Enregistrement du courant et de la tension avec $T_e = 100 \mu\text{s}$.

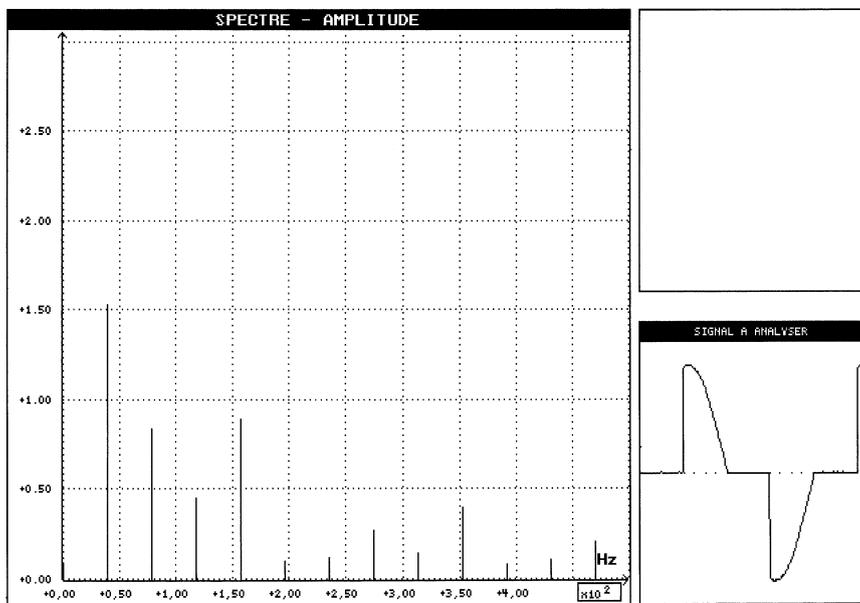


Figure 4 : Spectre du signal «courant» enregistré avec $T_e = 100 \mu\text{s}$. Utilisation de la fenêtre naturelle.

La **figure 3** représente un autre enregistrement de la tension et du courant avec cette fois une période d'échantillonnage de **100 μ s**. La **figure 4** donne le spectre du signal «courant» en utilisant la **fenêtre naturelle**. On constate que les raies ne sont plus centrées sur les multiples de 50 Hz mais sur l'inverse de la durée de l'acquisition soit $1/(256 * 100 \mu s) = 39$ Hz. Par ailleurs, on note l'apparition de raies parasites par rapport au spectre de la figure 2. La **figure 5** donne le spectre du signal «courant» en utilisant une **fenêtre de Hamming** et la **figure 6** le même spectre avec une **fenêtre de Blackman**. On voit bien que les amplitudes des différentes raies sont un peu modifiées, mais le spectre reste de mauvaise qualité, les raies parasites n'étant pas éliminées.

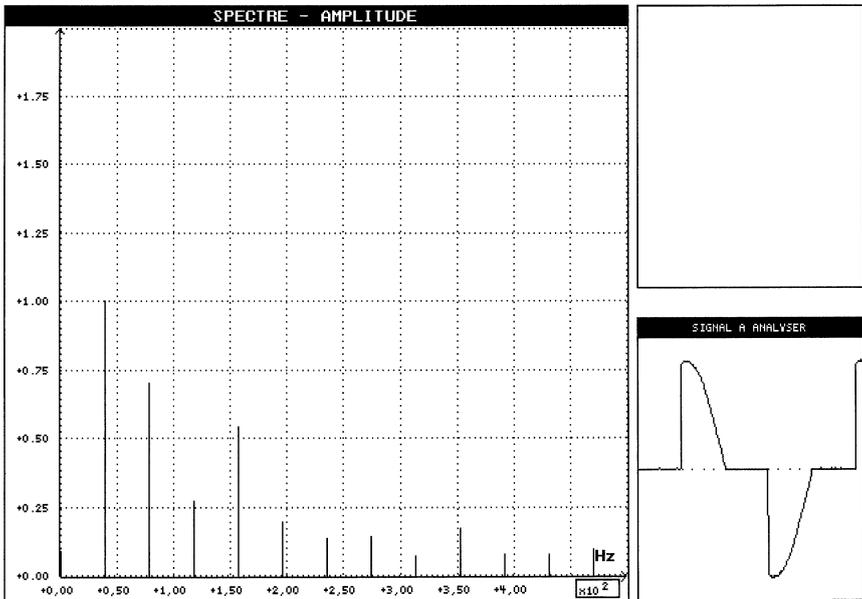


Figure 5 : Spectre du signal «courant» enregistré avec $T_c = 100 \mu s$. Utilisation de la fenêtre de Hamming.

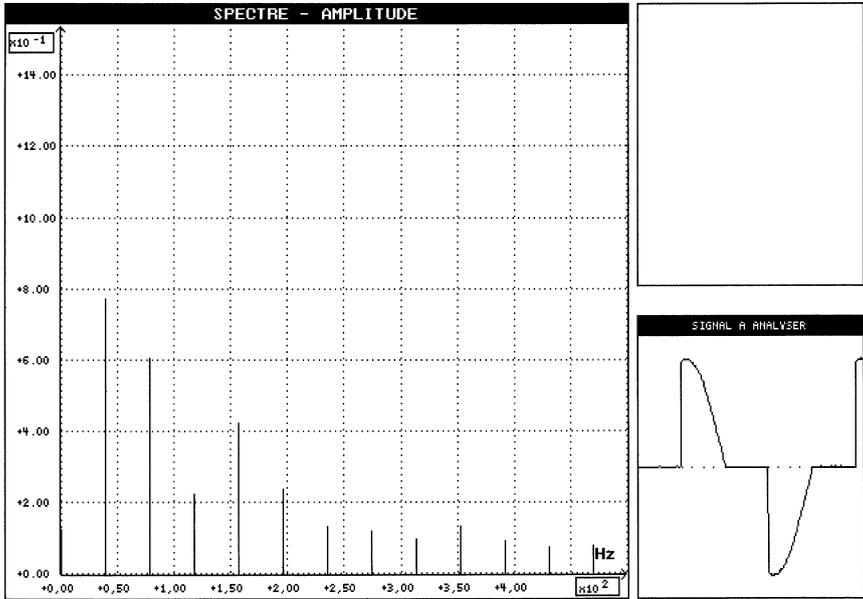


Figure 6 : Spectre du signal «courant» enregistré avec $T_c = 100 \mu s$. Utilisation de la fenêtre de Blackman.

BIBLIOGRAPHIE

- J. THIEL, C. LEGER et G. JACQUET - TURBO, Initiation à la programmation en Pascal.
- M. RIVOIRE et J.-L. FERRIER - Cours d'automatique (Tome 1), Signaux et systèmes.
- TEKTRONIX FFT - Applications for TDS.
- B.U.P. n° 754 de mai 1993 - Acquisition et traitements de données.
- B.U.P. n° 761 de février 1994 - Le Son.

REMERCIEMENTS

Je remercie vivement mon ami **Jacques THIEL**, professeur à l'**E.S.P.E.O.** (École Supérieure des Procédés Électroniques et Optiques) pour ses précieux conseils théoriques.

Annexe

Reconstitution du signal

1. RECONSTITUTION «MANUELLE»

Après avoir lancé le tracé du spectre en amplitude du signal, on peut mesurer l'amplitude de chaque raie. Mais ceci n'est pas suffisant pour reconstituer le signal, encore faut-il que l'analyseur fournisse la phase de chaque composante et que l'utilisateur sache si cette phase est mesurée avec un sinus ou un cosinus comme référence.

Si le logiciel utilisé dispose d'une feuille de calcul, il est alors possible de faire calculer à chaque instant d'échantillonnage les différents harmoniques et de choisir ensuite une reconstitution avec le nombre d'harmonique voulu. L'inconvénient de cette méthode est qu'il faut écrire les calculs pour chaque nouveau signal enregistré. De plus des risques d'erreur sont possibles car la phase est parfois donnée entre -90° et $+90^\circ$ ce qui n'est pas correct dans le cas d'un coefficient de FOURIER c_m à partie réelle négative.

2. RECONSTITUTION À PARTIR DE LA TFD

Cette méthode suppose que l'on ait accès à la séquence des X_m .

Dans ce cas, on sait que cette séquence représente les valeurs des composantes de FOURIER aux fréquences mf_e/N . Si dans ce tableau de N valeurs, on en annule un certain nombre correspondant aux harmoniques que l'on souhaite éliminer, il suffit ensuite de faire une **Transformée de Fourier Discrète Inverse** pour obtenir un tableau de N valeurs du signal reconstitué.

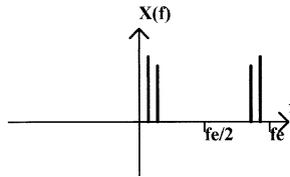
Exemple : on enregistre **exactement une période** d'un signal périodique de période T_p . On souhaite reconstituer le signal avec les dix premiers harmoniques. On annulera donc les harmoniques de rang supérieur à dix. Si on a fait un enregistrement avec cent vingt-huit points la figure ci-dessous indique comment procéder. La première

ligne indique le rang de l'échantillon X_m .

Comme on a enregistré une période exactement, le pas de fréquence est f_p . Il faudra donc annuler les fréquences harmoniques supérieures à $10 f_p$. Le premier terme de la séquence correspond à la valeur moyenne ($f = 0$).

0	11	64	118	127
c_m	O	O	O	c_m

On remarquera que compte tenu de la symétrie du spectre, il faut annuler seulement le «milieu» du tableau.



On obtient ainsi un nouveau tableau X_{mR} qui donnera par TFD inverse un signal reconstitué.

3. APPLICATION : EXTRACTION DU FONDAMENTAL DU SIGNAL «COURANT»

La **figure 1** indique une technique possible pour cela :

- **R** et **I** sont les parties réelles et imaginaires de la TFD du signal **A1** : signal «courant»,
- **TA_O_MI** est un tableau contenant des zéros dans son milieu (seuls les deux premiers et le dernier termes du tableau sont à un),
- **FOND_R** et **FOND_I** sont les parties réelle et imaginaire du fondamental,
- **FOND_COUR** est la reconstitution par transformée de FOURIER inverse du signal «courant». La **figure 2** donne le signal «courant» et son **fondamental reconstitué**.

FEUILLE DE CALCUL :

```
R=FFTR(A1)          --> Table[256]
I=FFTI(A1)         --> Table[256]
cr tr=creneau(3,255) --> Table[256]
TA_O_MI=1-cr tr    --> Table[256]
FOND_R=R*TA_O_MI   --> Table[256]
FOND_I=I*TA_O_MI   --> Table[256]
FOND_COUR=RFFT(fond_R,FOND_I) --> Table[256]
```

Figure 1 : Feuille de calcul pour reconstituer le fondamental du signal «courant».

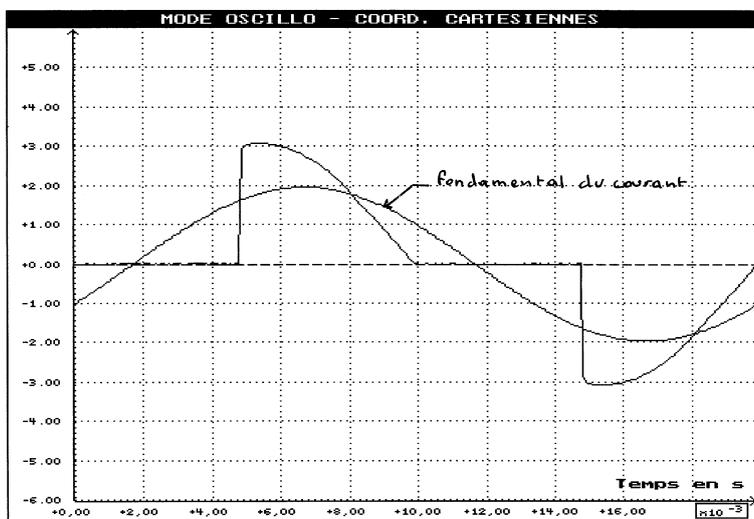


Figure 2 : Reconstitution du fondamental du courant.