

Influence sur le diagramme de Bode d'un filtre passif, de son inadaptation en impédance en entrée

par J.-M. DUSSEAU

Laboratoire «Études et Recherches sur l'Enseignement Scientifique»
Case 074 - Université Montpellier II
34095 Montpellier Cedex 05

Un filtre passif symétrique est par constitution un quadripôle itéré, c'est-à-dire un quadripôle dont l'impédance de la source qui l'attaque, ainsi que l'impédance sur laquelle il débite sont égales à son impédance caractéristique.

On observe que les étudiants qui étudient un filtre, en en traçant par exemple son diagramme de Bode, admettent facilement de le relier sur une impédance égale à l'impédance caractéristique, mais oublient très souvent de réaliser une adaptation d'impédance entre le générateur de tension sinusoïdale et le filtre.

Dans cet article, nous étudions expérimentalement et théoriquement les conséquences de cette inadaptation.

1. INTRODUCTION

Le filtrage de fréquences est une notion fondamentale dans le domaine des télécommunications. Les filtres passifs réalisés à l'aide de condensateurs et de bobines d'inductances sont toujours utilisés industriellement, et tout particulièrement en téléphonie.

Les filtres sont des quadripôles présentant des propriétés particulières que nous allons brièvement rappeler.

Un quadripôle est un réseau dans lequel ont été particularisés quatre nœuds qui définissent une entrée et une sortie. Il assure généralement une liaison entre une source et une charge Z_U .

Un quadripôle est dit idéal s'il ne comprend que des éléments réactifs à l'exclusion de tout élément dissipatif.

Par convention, on prend pour les grandeurs caractéristiques du signal d'entrée et de sortie les sens indiqués sur la figure 1.

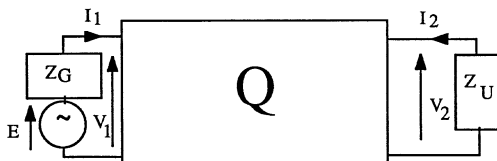


Figure 1 : Sens conventionnel choisi pour les grandeurs d'entrées et de sortie d'un quadripôle. Le générateur de tensions sinusoïdales est représenté sous la forme d'un générateur de Thévenin équivalent.

Si le quadripôle est linéaire, quelle que soit sa complexité, on peut le décomposer en n mailles indépendantes et, par résolution du système d'équations résultant, on peut exprimer deux grandeurs en fonction de deux autres, par exemple :

$$V_1 = Z_{11} i_1 + Z_{12} i_2$$

$$V_2 = Z_{21} i_1 + Z_{22} i_2$$

Dans le cas d'un quadripôle passif, on a $Z_{21} = Z_{12}$ et, si de plus le quadripôle est symétrique, c'est-à-dire si la permutation entrée-sortie laisse le régime électrique extérieur inchangé, on a $Z_{11} = Z_{22}$.

Lorsque la sortie du quadripôle est refermée sur une impédance Z_u , l'impédance vue des bornes d'entrée vaut :

$$Z_i = Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21}}{Z_U + Z_{22}}$$

et dans le cas du quadripôle passif symétrique

$$Z_i = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_U + Z_{11}}$$

On en déduit la valeur de Z_i dans les deux cas particuliers suivants :

– l'impédance branchée en sortie est un court-circuit ($Z_U = 0$) :

$$Z_i = Z_{cc} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{11}}$$

– il n'y a pas d'impédance branchée en sortie ($Z_U = \infty$) : $Z_i = Z_{co} = Z_{11}$.

L'impédance caractéristique Z_c d'un quadripôle est l'impédance sur laquelle ce quadripôle doit être branché pour que l'impédance vue de l'entrée soit identique à l'impédance de charge ($Z_i = Z_U$).

$$\text{On obtient : } Z_c = \frac{Z_{11} - Z_{22}}{2} \pm Z_{12} \sqrt{\left(\frac{Z_{11} + Z_{22}}{2Z_{12}}\right)^2 - 1}$$

et dans le cas d'un quadripôle passif symétrique :

$$Z_c = \sqrt{Z_{11}^2 - Z_{12}^2} \quad \text{ou} \quad Z_c = \sqrt{Z_{cc} \cdot Z_{co}}$$

Un filtre est un circuit qui sépare selon leurs fréquences, les composantes d'un signal issu d'une source. Pour réaliser un filtre passif on utilisera un quadripôle passif, idéal, éventuellement symétrique, et itéré.

L'itération rend possible la mise en cascade de plusieurs filtres, et correspond au fait que l'impédance caractéristique est égale à l'impédance interne de la source et à l'impédance de charge.

En général, dans un système réel, pour transmettre le maximum de puissance à une charge il faut que l'impédance interne de la source et l'impédance de charge soient complexes conjuguées ($Z_G = Z_U^*$).

Dans le cas d'un filtre, où intervient en outre l'impédance caractéristique, l'itération sera facilement réalisée si toutes ces impédances sont purement résistives.

2. MESURES

Généralement, les étudiants ont l'habitude de tracer les diagrammes de Bode de circuits élémentaires, différenciateur ou intégrateur, en utilisant des générateurs de fonctions dont l'impédance interne vaut $50 \, \Omega$, sans placer de charge à la sortie de ces circuits. En effet, les équipements utilisés pour réaliser de telles mesures, dB-mètre, phase-mètre, oscilloscope ont tous une impédance d'entrée très élevée. Le générateur opère alors comme un générateur de tension parfait, pourvu

que l'impédance d'entrée des circuits étudiés soit au minimum de $1\text{ k}\Omega$, quelle que soit la fréquence.

Quand ils tracent le diagramme de Bode d'un filtre, les étudiants admettent facilement la nécessité de l'adaptation d'impédance en sortie, c'est-à-dire que ce filtre débite sur une impédance égale à son impédance caractéristique, mais ils utilisent toujours la sortie $50\ \Omega$ du générateur, même si l'impédance caractéristique du filtre est de $600\ \Omega$, cas par exemple, des filtres téléphoniques.

On observe alors dans le cas d'un tel filtre [1] (figure 2) un diagramme de Bode (figure 3) dont la courbe d'atténuation présente un maximum au voisinage de la fréquence de coupure. Le déphasage passe par -180° à cette même fréquence.

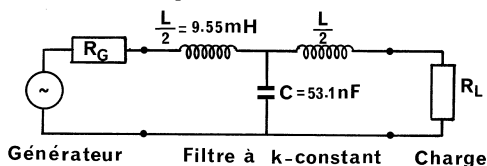


Figure 2 : Filtre étudié. Il s'agit d'un filtre dit k-constant.

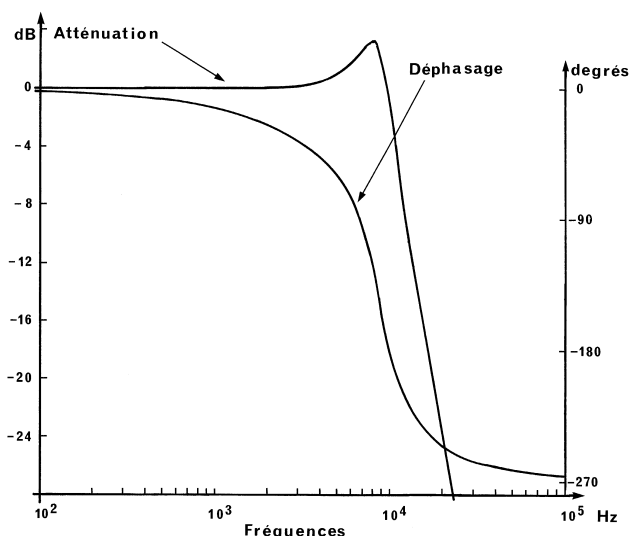


Figure 3 : Diagramme de Bode du filtre tracé en utilisant un générateur non adapté en impédance.

Le filtre passe-bas a été choisi ici comme exemple, car à partir d'une structure passe-bas, il est possible d'obtenir tous les autres types de structures, moyennant des transformations élémentaires appropriées [2].

Sur la figure 4, la courbe d'atténuation de ce même filtre, tracée en utilisant la sortie $600\ \Omega$ d'un générateur, ne présente aucune singularité, ni dans la bande transmise, ni dans la bande atténuée.

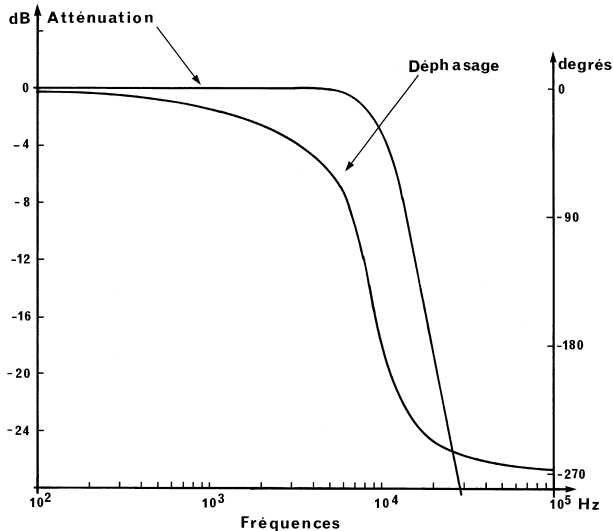


Figure 4 : Diagramme de Bode du filtre utilisé correctement.

3. INTERPRÉTATION

Nous allons déterminer le rapport V_0/E , c'est-à-dire tension de sortie du filtre aux bornes de la charge sur tension délivrée à vide par le générateur. Nous le comparerons ensuite aux résultats expérimentaux dans les deux cas, adaptation et inadaptation d'impédance du générateur.

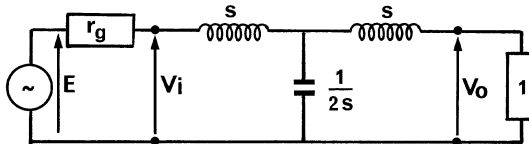


Figure 5 : Filtre étudié, présenté ici en utilisant les impédances normalisées définies dans le texte.

Le circuit étudié est présenté sur la figure 5, en utilisant des valeurs normalisées pour ses éléments constitutifs. Ces valeurs sont obtenues de la façon suivante.

Ce filtre est dit à k-constant car dans la bande transmise, le produit des impédances série et parallèle est une constante réelle indépendante de la fréquence [3], correspondant à l'impédance caractéristique, $k = \sqrt{Z_1 Z_2}$.

Ici, $k = \sqrt{\frac{L}{C}} = 600 \, \Omega$, et $\omega_c = \frac{2}{\sqrt{LC}}$, la pulsation de coupure de ce filtre, correspond à une fréquence $f_c = 10 \, \text{kHz}$.

Les impédances des deux composants : $Z_L = j \frac{L}{2} \omega$ et $Z_C = \frac{1}{jC\omega}$, deviennent, en utilisant la résistance caractéristique R_c ($R_c = k$) comme résistance de normalisation,

$$Z_{Lr} = \frac{Z_L}{R_c} = j \frac{\omega}{\omega_c} = j m = s \quad \text{et} \quad Z_{Cr} = \frac{Z_C}{R_c} = \frac{1}{2} \frac{\omega_c}{\omega} = \frac{1}{2s}$$

en introduisant les nouvelles variables m et s .

La valeur normalisée de la résistance de charge sera égale à 1 quand l'adaptation d'impédance sera réalisée en sortie. Quant à l'impédance interne du générateur de tension, on aura $R_{Gr} = R_G/R_c = r_g$, qui vaudra 1 dans le cas de l'adaptation de l'impédance du générateur au filtre et sera très inférieure à 1 quand on considérera un générateur de tension parfait.

La valeur normalisée de l'impédance d'entrée du filtre vaut :

$$Z_{ir} = \frac{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}{2s^2 + 2s + 1},$$

et nous avons $\frac{V_i}{E} = \frac{Z_{ir}}{Z_{ir} + r_g}$ tandis que $\frac{V_0}{E} = \frac{V_0}{V_i} \frac{V_i}{E}$

Par la méthode des mailles ou des nœuds, on obtient :

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1},$$

et :

$$\frac{V_0}{E} = \frac{1}{2s^3 + (1 + r_g)(1 + 2s + 2s^2)}$$

Alors, s'il y a adaptation d'impédance du générateur de tensions sinusoïdales vers le filtre : $r_g = 1$, et il vient :

$$\frac{V_0}{E} = \frac{1}{2} \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1},$$

dont le module vaut :

$$\left| \frac{V_0}{E} \right| = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + m^6}}$$

Pour $m = 1$, c'est-à-dire à la fréquence de coupure, ce module a la valeur correcte -3 dB.

La dérivée de ce module, par rapport à m , ne s'annule que lorsque m tend vers 0. Cela signifie qu'il n'y a pas de résonance en fonction de la fréquence.

Le carré de ce module est de la forme $\frac{1}{1 + m^{2n}}$ caractéristique des filtres dit de BUTTERWORTH d'ordre n et appelé également «maximally flat» ou «filtre méplat» [4].

Dans le cas où $r_g < 1$:

$$\frac{V_0}{E} = \frac{1}{2s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$$

et le module $\left| \frac{V_0}{E} \right|_{\text{n.a.}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 4m^4 + 4m^6}}$ (n.a. signifie non adaptation)

possède une dérivée qui s'annule pour $m = 0$ et pour $m^2 = \frac{2}{3}$.

Cette dernière valeur correspond à une fréquence de résonance de 8200 Hz et c'est bien ce que l'on observe expérimentalement. La valeur théorique de l'acuité de la résonance, 3,9 dB, est légèrement plus grande que celle observée expérimentalement, 3,5 dB. Ce désaccord provient du fait que nous avons utilisé pour tracer les courbes expérimentales un générateur d'impédance de sortie 50 Ω et non un générateur parfait.

Le fait que, dans le cas de l'inadaptation, la courbe de Bode de l'atténuation présente une variation non monotone, est à relier à la variation en fonction de la fréquence de l'impédance d'entrée du filtre.

Nous avons pour le module de cette impédance :

$$|Z_{ir}| = \frac{\sqrt{1 - 4m^4 + 4m^6}}{1 + 4m^4},$$

dont la dérivée par rapport à m s'annule pour une valeur réelle de m égale à 0,87. Ceci correspond à une fréquence de 8700 Hz. Pour cette fréquence, on observe (figure 6) que le module de l'impédance d'entrée du filtre passe expérimentalement par un minimum (250 Ω) peu différent de la valeur théorique calculée (230 Ω).

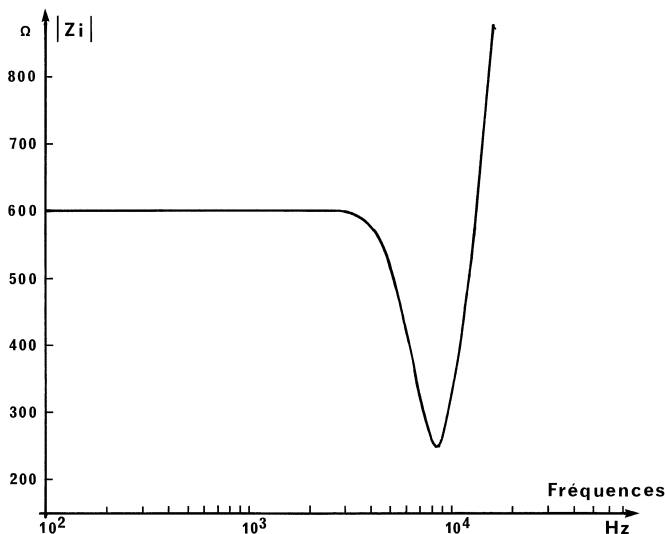


Figure 6 : Variations en fonction de la fréquence du module de l'impédance d'entrée du filtre étudié. Dans la bande passante, la valeur mesurée est 600 Ω comme prévue.

Ces variations de l'impédance d'entrée introduisent des variations dans la tension d'entrée. C'est la raison pour laquelle nous effectuons les comparaisons des tensions V_0 et de $V_{0.n.a.}$ par rapport à E , qui est indépendante de la résistance interne du générateur et de la fréquence.

Les variations en fonction de la fréquence du déphasage de V_0 par rapport à V_i ne sont pas affectées par l'adaptation.

4. CONCLUSION

Il est indubitable que les performances des filtres électriques sont basées, par définition, sur une adaptation des impédances amont et aval à l'impédance caractéristique.

C'est la raison pour laquelle les livres d'enseignement [2], [3], [4] ne traitent jamais le cas de la désadaptation d'impédance entre le filtre et le générateur d'excitation.

Cependant, étant donné qu'il s'agit d'une erreur que nous avons fréquemment rencontrée chez les étudiants, il nous semble souhaitable pour l'éradiquer, de leur présenter l'interprétation des courbes qu'ils obtiennent. Cela permet alors de mieux leur faire comprendre la nécessité de l'adaptation des impédances.

Remarque : Il m'est agréable de remercier mon collègue M. J. MICHEL pour des discussions amicales sur ce sujet.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Le filtre téléphonique utilisé ici provient de la société TMTECQUIPMENT Ltd. (NOTTINGHAM), et a bien sûr une impédance caractéristique de $600\ \Omega$.
- [2] J. AUVRAY - Électronique des signaux analogiques, Dunod Université.
- [3] R.-W. LANDEE, D.-C. DAVIS et A.-P. ALBRECHT, Electronic Designer's Handbook (Mc Graw-Hill, New-York), 1st ed., pp. 16-1, 16-30.
- [4] M. FELDMANN - Théorie des réseaux et systèmes linéaires, Eyrolles.