ETUDE DE LA DIFFUSION DE RUTHERFORD A L'AIDE DU VECTEUR DE LAPLACE

FLOREA S. Uliu,
Département de Physique,
Faculté des Sciences de CRAIOVA (Cracovie),
ROUMANIE

I. INTRODUCTION

Le bulletin de l'Union des Physiciens a publié récemment [1] une intéressante étude comparative entre le mouvement de Képler (énergie potentielle sous la forme $V(r) = -K/r$, $K > 0$) et le mouvement elliptique harmonique (énergie potentielle sous la forme $V(r) = Kr^2$, $K > 0$), deux mouvements fort semblables, ayant des trajectoires fermées. Cette comparaison met en évidence de nombreuses propriétés communes aux deux mouvements, liées à l'existence de quelques symétries géométriques générales et de quelques symétries dynamiques spécifiques. Conformément au théorème de Noether [2]*, les symétries géométriques déterminent la conservation de l'énergie totale (E) et du moment cinétique $(\vec{L})$, et la symétrie dynamique détermine, en plus, l'existence des invariants de Laplace (encore appelés invariants de Runge et Lenz).

Il est bien connu que la conservation de l'énergie totale est une conséquence de l'uniformité du temps, c'est-à-dire de l'invariance de la fonction V(r) dans le temps. D'autre part, la conservation du moment cinétique est une conséquence directe de l'isotropie de l'espace, c'est-à-dire de l'invariance du potentiel V(r) par rapport au groupe SO_3 des rotations qui conservent le centre attractif. Contrairement à l'énergie totale et au moment cinétique, qui sont des invariants rencontrés dans tout problème à force centrale, il y a aussi des invariants dynamiques, de type Laplace, connus depuis à peu près deux siècles (dans le cas du premier potentiel -K/r) ou découverts plus récemment [3] (dans le cas du deuxième potentiel en Kr^2). Ces invariants matérialisent, dans le plan de l'orbite, une ou deux **directions privilégiées** dont la connaissance conduit à des simplifications significatives dans l'étude des problèmes respectifs.

Notre article, qui se veut un prolongement de l'article [1], se propose d'étudier, à l'aide du vecteur de Laplace et des autres constantes du mouvement, le problème de la diffusion des particules α (ayant la charge électrique +2e) sur une cible nucléaire fixe (ayant la charge électrique +Ze), c'est-à-dire le problème de Rutherford (1911). Dans ce cas, la trajectoire n'est pas une courbe fermée et le mouvement n'a plus un caractère périodique ; pourtant, la conservation du vecteur de Laplace détermine l'existence d'une direction privilégiée dans le plan de la trajectoire qui est, comme on pourra le constater, un axe de symétrie de la trajectoire.

---

* A toute symétrie continue à f paramètres d'un système physique sont associées f constantes du mouvement

II. VECTEUR DE LAPLACE POUR LE PROBLEME DE RUTHERFORD

Soient m et +2e respectivement la masse et la charge électrique d'une particule α (noyau de He), M et +Ze respectivement la masse et la charge électrique d'un noyau diffusant, supposé fixe. Le noyau atomique, considéré comme un point matériel, est choisi comme origine des rayons vecteurs.

La force coulombienne répulsive qui agit sur la particule α dans la position caractérisée par le rayon vecteur $\vec{r}$ a l'expression $\vec{F} = K\vec{r}/r^3$, où $r = |\vec{r}|$ $K = 2Ze_0^2$ et $e_0^2 = e^2/4\pi\varepsilon_0$. C'est une force conservative, pour laquelle on peut écrire $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$, de sorte que l'énergie potentielle répulsive est V(r) = K/r (avec la condition supplémentaire $V(\infty) = 0$).

La loi de conservation de l'énergie totale est :

$$E = \frac{m}{2}v^2 + V(r) = \frac{m}{2}v^2 + \frac{K}{r} = \text{const.} > 0 \quad . \tag{1}$$

Tenant compte du fait que le moment de la force $\vec{M}_F = \vec{r} \times \vec{F}$ est égal à zéro (la force $\vec{F}$ est centrale), il résulte (de l'équation des moments $d\vec{L}/dt = \vec{M}_F = 0$) la conservation du moment cinétique

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = \text{const.} \tag{2}$$

Une troisième constante de mouvement est le vecteur de Laplace, défini par [4] :

$$\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} + K\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{3}$$

Pour prouver sa conservation, nous allons montrer que sa dérivée $d\vec{A}/dt$ est nulle. En utilisant l'équation du mouvement $\vec{a} = d\vec{v}/dt = \vec{F}/m = K\vec{r}/mr^3$, on obtient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} \times \vec{L} + \vec{v} \times \frac{d\vec{L}}{dt} + \frac{K}{r^2}\left(r\frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{r}\frac{dr}{dt}\right) = \vec{a} \times \vec{L} + \frac{K}{r^2}\left(r\vec{v} - \vec{r}\frac{dr}{dt}\right),$$

car $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_F = 0$.

On peut écrire, de suite, en utilisant l'expression de l'accélération,

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{K}{r^3}\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) + \frac{K}{r^2}\left(r\vec{v} - \vec{r}\frac{dr}{dt}\right) \quad .$$

A l'aide de la formule générale $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}.\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}.\vec{b})$ on développe le double produit vectoriel et on obtient :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{K}{r^3}\left(\vec{r}.\vec{v} - r\frac{dr}{dt}\right)\vec{r} \quad .$$

Enfin, si on dérive par rapport au temps l'égalité $\vec{r}^2 = r^2$, il résulte que $\vec{r}.d\vec{r} / dt = \vec{r}.\vec{v} = r dr / dt$, et ainsi :

$$\frac{\vec{dA}}{dt} = 0 \ ,$$

soit $\vec{A} = \text{constant}$. (4)

De la relation (2), il résulte, comme un corollaire, que **la trajectoire du mouvement est une courbe plane**, située dans un plan perpendiculaire au vecteur constant $\vec{L}$. D'autre part, il résulte de la définition (3), que le vecteur de Laplace $\vec{A}$ est contenu lui aussi dans le plan du mouvement, car chacun des deux termes qui le composent sont des vecteurs situés dans ce plan. Etant un vecteur constant, le vecteur $\vec{A}$ peut être choisi comme axe de référence (par exemple, comme axe Ox) dans le plan de la trajectoire. On peut donc écrire $\vec{A} = (A, 0, 0)$.

Le module $A = |\vec{A}|$ de ce vecteur peut être calculé facilement :

$$A^2 = \vec{A}^2 = \vec{A}.\vec{A} = v^2L^2 + K^2 + 2K\frac{\vec{r}}{r}.(\vec{v} \times \vec{L}) \ .$$

En utilisant les propriétés du produit mixte, dans le dernier terme du second membre, on peut écrire :

$$A^2 = v^2L^2 + K^2 + \frac{2K}{r}\vec{L}.(\vec{r} \times \vec{v}) = v^2L^2 + K^2 + \frac{2KL^2}{mr} = K^2 + \frac{2L^2}{m}\left(\frac{m}{2}v^2 + \frac{K}{r}\right) = K^2 + \frac{2EL^2}{m}$$

de sorte que :

$$A = K\left(1 + \frac{2EL^2}{mK^2}\right)^{1/2} \quad . \tag{5}$$

Notons γ l'angle polaire entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{A}$ tous deux contenus dans le plan du mouvement, et calculons le produit scalaire $\vec{r}.\vec{A}$. Tenant compte de la définition (3) on obtient :

$$\vec{r}.\vec{A} = rA\cos\gamma = \vec{r}.(\vec{v} \times \vec{L}) + Kr = \frac{L^2}{m} + Kr$$

d'où $r = \dfrac{p}{\varepsilon\cos\gamma - 1}$ (6)

$$\text{où} \qquad p = \frac{L^2}{mK} \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \frac{A}{K} = \left(1 + \frac{2EL^2}{mK^2}\right)^{1/2} > 1 \quad . \tag{7}$$

L'équation de la trajectoire, donnée par (6), a été obtenue sans effectuer d'intégrations. D'autre part, l'équation (6) est l'équation d'une hyperbole en coordonnées polaires quand l'un des foyers est confondu avec l'origine. On constate que r est inchangé quand on change le signe de γ. Ceci signifie que la trajectoire est symétrique par rapport à la direction privilégiée $\gamma = 0$ du vecteur de Laplace. L'équation (6) montre que r est positif quand $\cos\gamma > \cos\gamma_M$, tel que :

$$\cos\gamma_M = \frac{1}{\varepsilon} \; (<1) \quad . \tag{8}$$

Par conséquent $\gamma \in [-\gamma_M, +\gamma_M]$. D'autre part, r tend vers l'infini quand γ tend vers $\pm\gamma_M$. Les deux asymptotes de l'hyperbole sont donc symétriques par rapport au vecteur de Laplace $\vec{A}$ (figure 1). Dans l'annexe I, nous donnons l'équation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

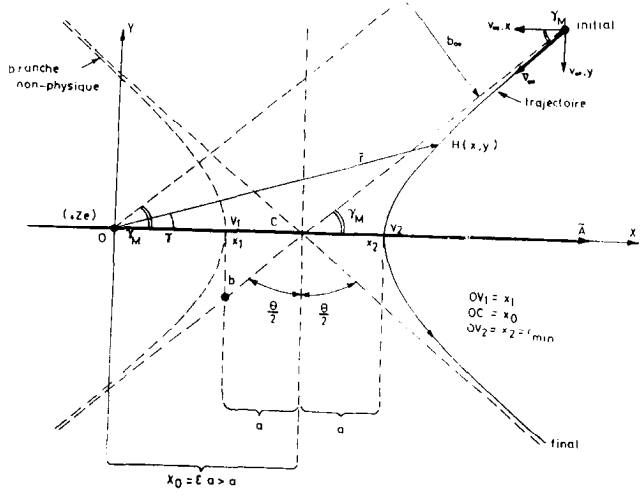

Figure 1 Trajectoire de la particule α

Le problème de diffusion de Rutherford consiste à déterminer le paramètre p, l'excentricité ε de l'hyperbole et l'angle θ de la déviation subie par la trajectoire de la particule α en fonction de la vitesse initiale $\vec{v}_\infty$ (vitesse de la particule quand elle est infiniment loin du noyau) et du paramètre d'impact b_∞ (distance entre le noyau et le support du vecteur vitesse $\vec{v}_\infty$).

Les définitions de b_∞ et $\vec{v}_\infty$ permettent d'exprimer le module du moment cinétique $\vec{L}$ et l'énergie totale E sous la forme :

$$L = m b_\infty v_\infty \quad \text{et} \qquad E = \frac{1}{2} m v_\infty^2 \quad . \tag{9}$$

On peut donc écrire les caractéristiques de l'hyperbole en fonction de b_∞ et v_∞ à l'aide de (7) et (9) :

$$p = \frac{m b_\infty^2 \, v_\infty^2}{K} \quad , \tag{10}$$

$$\varepsilon = \left[1 + \left(\frac{m b_\infty v_\infty^2}{K} \right)^2 \right]^{1/2} > 1 \quad . \tag{11}$$

La déviation θ subie par la particule α est donnée par (figure 1) :

$$\theta = \pi - 2\gamma_M \tag{12}$$

D'après (12) et (8) on obtient :

$$\cot g\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\varepsilon^2 - 1} = \frac{L}{K}\sqrt{\frac{2E}{m}} = \frac{m}{K} b_\infty v_\infty^2 \quad . \tag{13}$$

Pour les petites valeurs de b_∞ et v_∞, l'angle de diffusion θ est très grand et devient égal à π pour $b_\infty = 0$. On peut également préciser la distance minimale r_{min} entre la particule α et le noyau en écrivant $\gamma = 0$ dans (6)

$$r_{min} = \frac{p}{\varepsilon - 1} \quad . \tag{14}$$

La vitesse v_{min} de la particule α en ce point de la trajectoire peut être calculée sans difficulté en remarquant que $\vec{v}_{min}$ est perpendiculaire à $\vec{r}_{min}$; on obtient :

$$L = m \, r_{min} \, v_{min} \quad . \tag{15}$$

A l'aide de (9), (14) et (15), on peut écrire :

$$v_{min} = \frac{L}{m \, r_{min}} = \frac{b_\infty v_\infty}{r_{min}} = \frac{K}{L}(\varepsilon - 1) \quad . \tag{16}$$

L'équation de la conservation de l'énergie (1) montre que cette vitesse est la vitesse minimale de la particule. Un cas particulier intéressant est celui où $b_\infty = 0$. Dans ce cas, le moment cinétique est nul. La définition du vecteur constant $\vec{A}$ montre que la particule α se déplace sur une droite. Sa vitesse s'annule à une distance $r_{min}^{(0)}$ telle que :

$$r_{min}^{(0)} = \frac{K}{E} = \frac{2K}{mv_\infty^2} \cdot \qquad (17)$$

La particule se déplace ensuite dans le sens inverse.

Enfin, la conservation du vecteur de Laplace entre les instants initial et final permet d'établir directement la relation (13). Dans ce qui suit $\vec{v}'_\infty$ et $\vec{v}_\infty$ sont respectivement les vitesses finale et initiale de la particule. Le vecteur unitaire $\vec{r}'_\infty / r'_\infty$ est colinéaire et de même sens que $\vec{v}'_\infty$, tandis que $\vec{r}_\infty / r_\infty$ est colinéaire et de sens opposé à $\vec{v}_\infty$. D'autre part, l'angle entre $\vec{v}_\infty$ et $\vec{v}'_\infty$ est θ. Par conséquent, on peut écrire [5] :

$$\vec{A}.\vec{v}_\infty = K\frac{\vec{r}_\infty}{r_\infty}.\vec{v}_\infty = -Kv_\infty$$

et $$\vec{A}.\vec{v}_\infty = \left(\vec{v}'_\infty \times \vec{L}\right).\vec{v}_\infty + K\frac{\vec{r}'_\infty}{r'_\infty}.\vec{v}_\infty = \left(\vec{v}_\infty \times \vec{v}'_\infty\right).\vec{L} + Kv_\infty\cos\theta = -Lv_\infty^2\sin\theta + Kv_\infty\cos\theta \ ,$$

d'où l'on peut déduire la relation (13) par un calcul trigonométrique simple.

III - CONSTRUCTION DU VECTEUR $\vec{A}$ ET DE L'HODOGRAPHE

Les calculs effectués dans le paragraphe précédent, ont permis de déterminer la forme de la trajectoire et ses paramètres caractéristiques. Dans ce paragraphe, il a semblé intéressant de présenter une construction géométrique où l'on peut observer directement la conservation du vecteur de Laplace (figure 2). Pour effectuer cette construction, il faut utiliser la définition du vecteur $\vec{A}$ et considérer la position d'hyperbole qui est effectivement la trajectoire de la particule.

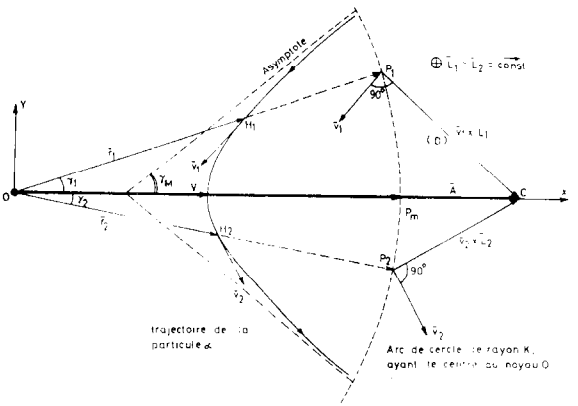

Figure 2 Invariance de $\vec{A}$

Le deuxième terme $K\frac{\vec{r}}{r}$ de $\vec{A}$ est un vecteur de module K, dont le support coïncide avec celui du rayon vecteur instantané $\vec{r}$. On construit donc un arc de cercle ayant le centre en O (le noyau diffusant), de rayon K, après quoi on prolonge le rayon vecteur $\vec{r}_1$ (ou $\vec{r}_2$) jusqu'au point P_1 (ou P_2) situé sur cet arc de cercle. On obtient $\overrightarrow{OP}_{1,2} = K\frac{\vec{r}_{1,2}}{r_{1,2}}$. Puis, on fait la translation du vecteur vitesse $\vec{v}_1$ (ou $\vec{v}_2$) tangent à la trajectoire au point P_1 (respectivement P_2). Le premier terme $\vec{v} \times \vec{L}$ de $\vec{A}$ est perpendiculaire à $\vec{v}_1$ (respectivement à $\vec{v}_2$) et au vecteur constant $\vec{L}\left(=\vec{L}_1=\vec{L}_2\right)$, qui est perpendiculaire au plan du dessin. On obtient $\overrightarrow{P_{1,2}C} = \vec{v}_{1,2} \times \vec{L}$ et, comme on peut l'observer,

$$\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{P_1C} = \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{P_2C} = \overrightarrow{OC} = \text{le vecteur constant } \vec{A} \quad . \tag{18}$$

Quand $\gamma = 0$, nous avons la même propriété avec des vecteurs colinéaires :

$$\overrightarrow{OP_m} + \overrightarrow{P_mC} = \overrightarrow{OC} = \vec{A}, \tag{19}$$

$$\overrightarrow{OP_m} = K\frac{\vec{r}_{min}}{r_{min}},\ \vec{r}_{min} = \overrightarrow{OV} \text{ et } \overrightarrow{P_mC} = \vec{v}_{min} \times \vec{L} \quad . \tag{20}$$

Dans l'annexe II, nous montrons, en utilisant les coordonnées cartésiennes, que le vecteur $\vec{A}$ est indépendant du point H sur la trajectoire.

Le tracé de l'hodographe permet de visualiser rapidement comment évoluent, au cours du mouvement de la particule, le module et l'orientation du vecteur vitesse. L'utilisation du vecteur de Laplace permet de faciliter la construction de l'hodographe.

Si on multiplie vectoriellement $\vec{A}$ par le vecteur $\vec{L}$, on obtient :

$$\vec{L} \times \vec{A} = \vec{L} \times \left(\vec{v} \times \vec{L}\right) + \frac{K}{r}\left(\vec{L} \times \vec{r}\right) = L^2\vec{v} - \left(\vec{L}.\vec{v}\right)\vec{L} + \frac{K}{r}\left(\vec{L} \times \vec{r}\right) \ .$$

Tenant compte que $\vec{L}.\vec{v} = 0$, il résulte

$$\vec{v} = \frac{\vec{L} \times \vec{A}}{L^2} + \frac{K}{L}\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{L}}{L}\right) \quad . \tag{21}$$

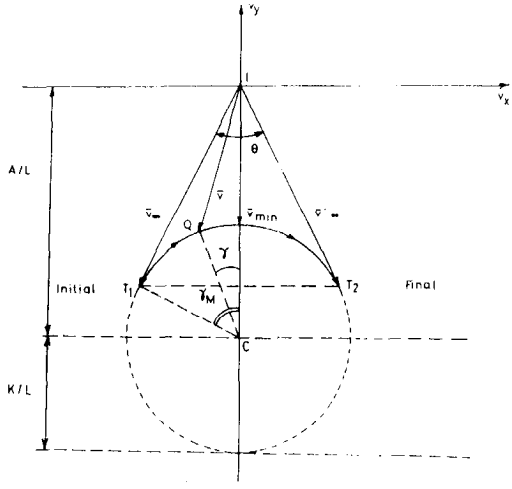

Figure 3 Hodographe

La relation (21) montre que le vecteur vitesse $\vec{v}$ est la somme d'un vecteur constant $\frac{\vec{L} \times \vec{A}}{L^2}$, appelé **invariant d'Hamilton** (son module est A/L et sa direction est parallèle à Oy car $\vec{A}$ est parallèle à $\vec{Ox}$ et $\vec{L}$ parallèle à $\vec{Oz}$ (figure 1)) et d'un vecteur $\frac{K}{L}\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{L}}{L}\right)$, dont le module K/L est constant et dont la direction est perpendiculaire à $\vec{r}$ en tout point de la trajectoire.

Compte tenu de (7), on peut remarquer que le module du vecteur de Hamilton est supérieur au module du deuxième vecteur (A = εK > K). D'autre part, le vecteur $\vec{r}$ varie de part et d'autre de l'axe Ox avec un angle γ, compris entre $-\gamma_M$ et $+\gamma_M$. Par conséquent, le vecteur $\frac{K}{L}\left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{L}}{L}\right)$ varie de la même manière de part et d'autre de $\vec{Oy}$.

De ces considérations, il résulte que l'hodographe appartient à un cercle de rayon K/L et de centre C, placé sur l'axe $\vec{Iv_y}$ (figure 3) et distant de I de A/L. En effet, les vecteurs $\vec{L}$, $\vec{A}$ et $\vec{r}$ ont les composantes suivantes $\vec{L}(0,0,-L)$, $\vec{A}(A,0,0)$, $\vec{r}(x,y,0)$, de sorte que, de la relation (21) on obtient :

$$v_x = -\frac{yK}{rL},\quad v_y = -\frac{A}{L} + \frac{xK}{rL},\quad v_z = 0 \quad , \tag{22}$$

d'où résulte ensuite l'équation d'un cercle

$$v_x^2 + \left(v_y + \frac{A}{L}\right)^2 = \left(\frac{K}{L}\right)^2 \quad . \tag{23}$$

L'angle maximal γ_M, défini par $\cos \gamma_M = 1/\varepsilon = K/A$, est égal à ICT_1 ou ICT_2, où T_1 et T_2 sont les points du cercle qui appartiennent aux tangentes du cercle menées de I.

La relation (16), qui donne v_{min}, permet de préciser que l'hodographe est l'arc supérieur T_1T_2 (en gras sur la figure 3), que le point courant Q parcourt de T_1 vers T_2.

De la figure 3 on peut exprimer aisément la dépendance $v = v(\gamma)$. En effet, de la loi de composition vectorielle $\vec{v} = \vec{IQ} = \vec{IC} + \vec{CQ}$ on obtient :

$$v^2 = \left|\vec{IC}\right|^2 + \left|\vec{CQ}\right|^2 - 2\left|\vec{IC}\right|\left|\vec{CQ}\right| \cos\gamma = v_{min}^2\left[1 + \frac{4\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2}\sin^2\left(\frac{\gamma}{2}\right)\right] . \tag{24}$$

En particulier, pour $\gamma = \gamma_M = \text{arc cos}\,(1/\varepsilon)$, on montre facilement que

$$v_\infty = v_{min}\left(\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}\right)^{1/2} = \frac{K}{L}\left(\varepsilon^2-1\right)^{1/2} ,$$

qui est une autre forme de la relation (11).

IV. SECTION EFFICACE DE LA DIFFUSION RUTHERFORD. VERIFICATIONS EXPERIMENTALES ET DETERMINATION DES NOMBRES Z

Comme on le sait, l'année 1911 est une année d'une grande importance dans l'histoire de la physique atomique car on a compris pour la première fois, et d'une manière exacte, que l'atome avait un grain central, massif et dur, chargé positivement : **le noyau atomique**. Cette découverte (qui a infirmé le modèle atomique de Thomson (1906)) est liée aux noms du physicien E. Rutherford et de ses collaborateurs H. Geiger et E. Marsden. Leurs expériences de diffusion de quelques faisceaux de particules α sur du papier pelure métallique très fin (couche de matière) perpendiculaire à la direction des faisceaux, montrent que :

a) la plupart des particules α traversaient le papier pelure métallique sans être déviées significativement de la direction intiale ;
b) une petite fraction des particules α incidentes était plus déviée par rapport à la direction d'incidence ;
c) quelques particules α étaient purement et simplement renvoyées vers la source d'où elles provenaient.

La première constatation a conduit à la conclusion que le papier pelure métallique (et par conséquent l'atome) ont une structure lacunaire. Les autres constatations pouvaient être comprises si on admettait seulement que les particules α étaient déviées par un champ électrique répulsif extrêment intense créé d'une charge positive associée à une grande masse, concentrée dans un volume infime (de rayon de l'ordre de 10^{-13} cm). Ce phénomène a suggéré le modèle "nucléaire" de l'atome, d'après lequel l'atome reproduit le système planétaire : un noyau chargé positivement, de dimension très petite, dans lequel est concentrée presque toute la masse de l'atome, et des électrons négatifs gravitant autour du noyau sur des orbites fermées.

Dans ce qui suit, nous nous proposons de montrer comment peuvent être interprétés quantitativement les résultats expérimentaux à l'aide des calculs réalisés dans les paragraphes précédents.

Tout d'abord, il est possible de déterminer la distance minimale $r_{min}^{(0)}$ entre le noyau et la particule α. Le rayon du noyau est forcément inférieur à cette valeur. Lorsque la vitesse initiale des particules α est $v_\infty = 2.10^7$m/s, l'expression (17) donne $r_{min}^{(0)} = 3{,}2\ 10^{-12}$ cm, lorsque le métal utilisé est de l'or (Z = 79) et $r_{min}^{(0)} = 2.0\ 10^{-12}$ cm lorsqu'il s'agit d'argent (Z = 47). Ce simple calcul montre que le rayon du noyau est à peu près de 4 à 5 ordres de grandeur inférieur à celui de l'atome.

De plus, quand on considère l'interaction entre un faisceau de particules α et un des noyaux, le paramètre d'impact b_∞ n'est pas le même pour toutes les particules et on peut admettre qu'il varie de façon continue. En différenciant la relation (13), on obtient :

$$\left(\frac{mv_\infty^2}{K}\right) db_\infty = -\frac{d\theta}{2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad , \tag{25}$$

où le signe moins montre que, l'angle de diffusion θ diminue lorsque le paramètre b_∞ augmente (figure 4).

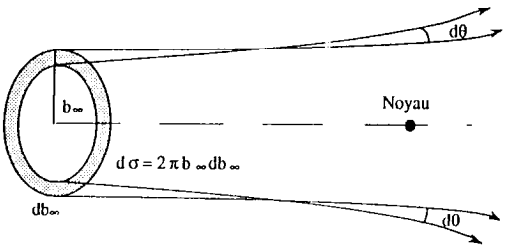

Figure 4 Section efficace différentielle

En combinant les relations (13) et (25), on déduit immédiatement :

$$2b_\infty db_\infty = -\left(\frac{K}{mv_\infty^2}\right)^2 \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta \quad . \tag{26}$$

Comme le montrent les expériences réalisées par le groupe de Rutherford, le nombre de particules α du faisceau est assez grand : l'étude théorique doit être développée en introduisant les statistiques.

Soit F un papier pelure métallique très fin, où les centres diffusants sont distribués presque superficiellement. Notons N le nombre de particules α qui atteignent, dans l'unité de temps, l'unité de surface de la couche F. Parmi elles, dN (θ) particules α sont envoyées à l'intérieur de l'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin\theta \, d\theta$, qui correspond à l'intervalle angulaire (θ, $\theta + d\theta$) (figure 5). Conformément à la formule (25), ces particules sont celles pour lesquelles le paramètre de choc est contenu dans l'intervalle ($b_\infty - db_\infty$, b_∞), c'est-à-dire qu'elles viennent de la couronne circulaire transversale qui a une surface de $d\sigma = 2\pi \, b_\infty \, db_\infty$ appelée **section efficace différentielle élémentaire.**

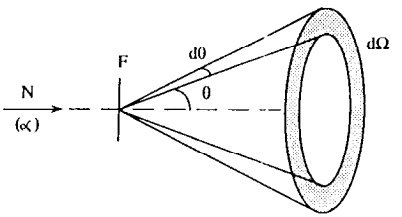

Figure 5 Angle solide élémentaire

A l'aide de la relation (26), on peut écrire :

$$|d\sigma| = \left(\frac{K}{mv_\infty^2}\right)^2 \cdot \frac{\cos(\theta/2)}{\sin^3(\theta/2)} d\theta = \left(\frac{K}{2mv_\infty^2}\right)^2 \cdot \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \quad . \tag{27}$$

La couche de matière (F) étant très fine, on peut s'attendre à ce que les sections efficaces élémentaires des différents centres diffusants ne se superposent pas dans le plan transversal. En admettant aussi que les noyaux sont distribués uniformément, notons avec n leur nombre par unité de surface. Avec ces hypothèses, la quantité $d\Sigma = n\,|d\sigma|$ s'appelle **section efficace différentielle macroscopique**. A l'aide de cette section, le nombre dN (θ) peut être écrit sous la forme :

$$dN(\theta) = N d\Sigma = nN\left(\frac{K}{2mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4(\theta/2)} \quad . \tag{28}$$

On observe que dN (θ) diminue très rapidement quand l'angle de diffusion θ augmente. Si les hypothèses faites sont correctes, la quantité dN (θ).sin^4 (θ/2) doit rester constante pour angles solides dΩ égaux, pris en différentes directions θ. Lors d'une expérience réalisée en 1913, le groupe Rutherford-Geiger-Marsden a obtenu les résultats présentés dans le tableau 1.

Angle de déviation en degrés (θ)	sin^4 (θ/2)	Nombre de scintillations (dN)	dN (θ) sin^4 (θ/2)
150	0,871	33,1	28,8
135	0,729	43,0	33,1
120	0,563	51,9	29,2
105	0,396	69,5	27,5
75	0,137	211	29,0
60	0,0625	477	29,8
45	0,0214	1435	30,8
30	$4,49.10^{-3}$	7800	35,0
15	$2,90.10^{-4}$	132000	38,3

Tableau 1 : Diffusion de particules α par feuilles d'or [6]

On doit préciser que le nombre dN(θ) a été déterminé, comme nombre de scintillations, sur un écran phosphorescent à sulfure de zinc.

D'après le tableau 1, on observe que lorsque sin^4(θ/2) varie dans un rapport de 1 à 3000, le produit de la dernière colonne varie seulement de 30 %, ce qui signifie une valeur quasi-constante. Le faible désaccord entre théorie et expérience peut être dû au fait que les hypothèses utilisées pour établir la relation (28) ne sont pas rigoureusement vérifiées mais aussi dû au fait que le faisceau de particules α n'est pas rigoureusement monoénergétique.

Pourtant, dans les expériences plus élaborées, la formule (28) a permis le calcul du nombre Z des charges élémentaires positives du noyau à partir de la valeur expérimentale de $K\left(K = 2Z\ e_0^2\right)$. Une telle expérience a été réalisée par J. Chadwich en 1932. Il a déterminé les suivantes valeurs de Z pour le platine, l'argent et le cuivre : Pt(78) - 77,4 ; Ag(47) - 46,3 ; Cu(29) - 29,3. Le nombre entre parenthèses est le numéro atomique de cet élément. Ainsi, les expériences de Chadwich montrèrent que le nombre de charges positives élémentaires du noyau est égal au numéro atomique de l'élément considéré.

V. CONCLUSIONS

L'utilisation de l'invariant de Lagrange a permis l'étude complète (trajectoire et section efficace) du problème de Rutherford sans connaissances concernant la résolution d'équations différentielles. Nous pensons que cet article présente un certain intérêt didactique car la méthode qui y est développée peut être présentée soit lors de travaux dirigés en DEUGS A soit comme thème d'exercice dans les classes préparatoires aux grandes écoles.

Annexe I : Equation de la trajectoire en coordonnées cartésiennes

Tenant compte du fait que $x = r\cos\gamma$ et $y = r\sin\gamma$ (figure 1), nous pouvons écrire $r = \left(x^2+y^2\right)^{1/2}$, $\cos\gamma = x/(x^2 + y^2)^{1/2}$, de sorte que, de l'équation (6), on déduit l'équation de l'hyperbole en coordonnées cartésiennes

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad , \tag{I.1}$$

avec $x_0 = \frac{p\varepsilon}{\varepsilon^2-1}$, $a = \frac{p}{\varepsilon^2-1}$, $b = \frac{p}{\sqrt{\varepsilon^2-1}}$. (I.2)

On voit que la distance focale de l'hyperbole, donnée par la relation $c = (a^2 + b^2)^{1/2} = \varepsilon p/(\varepsilon^2-1)$, est égale avec x_0. En outre, $x_0 = c = a\varepsilon > a$ et $b = a\,(\varepsilon^2-1)^{1/2}$.

Les asymptotes de l'hyperbole, passant par le point $(x_0, 0)$ sont définies par les équations :

$$y = \pm\frac{b}{a}(x - x_0) \tag{I.3}$$

et $b/a = tg\gamma_M$.

Pour $y = 0$, de l'équation (I.1), on obtient :

$$x_{1,2} = x_0 \mp a = a\,(\varepsilon \mp 1) > 0 \quad . \tag{I.4}$$

La valeur $x_2 = a\,(\varepsilon+1)$ est la distance r_{min} donnée par la relation (14).

Annexe II : Unicité du point C sur la figure 2

Considérons un point courant $H(x_h, y_h)$ sur la trajectoire hyperbolique de la particule α. En conformité avec la formule (I.1), nous avons :

$$y_h = \pm\frac{b}{a}\sqrt{(x_h - x_0)^2 - a^2} \quad . \tag{II.1}$$

La pente de la tangente à l'hyperbole en H est :

$$m_t = \left(\frac{dy}{dx}\right)_H = \left(\frac{b}{a}\right)^2 . \frac{x_h - x_0}{y_h} \tag{II.2}$$

et la pente de la normale à l'hyperbole, en même point, est :

$$m_n = -\,m_t^{-1} = -\left(\frac{a}{b}\right)^2 . \frac{y_h}{x_h - x_0} \quad . \tag{II.3}$$

La droite (D), avec le même coefficient de direction que la normale en H à l'hyperbole, à l'équation

$$y = m_n x + n_n \quad , \tag{II.4}$$

où le paramètre n_n peut être déterminé de façon à ce que le point P(x', y') (situé sur le cercle) se trouve aussi sur la droite (D). Nous avons :

$$n_n = y' - m_n x' \tag{II.5}$$

et l'équation (II.4) devient

$$y - y' = m_n (x - x') \quad . \tag{II.6}$$

La coordonnée x_C du point C (le sommet du vecteur $\overrightarrow{OC}$) peut être déterminée de l'équation (II.6), avec la condition y = 0, on obtient :

$$x_C = x' - \frac{y'}{m_n} = x' + m_t y' \quad . \tag{II.7}$$

Puisque les points $H(x_h, y_h)$ et P(x', y') sont situés sur la même droite OHP, nous avons :

$$\frac{x'}{x_h} = \frac{y'}{y_h} = \frac{K}{\left(x_h^2 + y_h^2\right)^{1/2}} = \frac{K}{r_h} \tag{II.8}$$

et l'abscisse x_C (la relation (II.7)) s'écrit :

$$x_C = \frac{K}{r_h}(x_h + m_t y_h) = \frac{K}{r_h}\left[\left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right)x_h - \frac{b^2}{a^2}x_0\right] \quad . \tag{II.9}$$

Comme $x_h = r_h \cos\gamma$, où r_h est donné par la relation (6), et tenant compte que $x_0 = \varepsilon a$ et $b/a = \text{tg}\,\gamma_M = (\varepsilon^2 - 1)^{1/2}$, on déduit finalement

$$x_C = \varepsilon K \quad , \tag{II.10}$$

c'est-à-dire un résultat indépendant de la position du point H sur l'hyperbole.

Bibliographie

1. J. Sivardière
Bulletin de l'Union des Physiciens, N° 751, vol. 87, p 165-193 (1993)

2. H. Goldstein
Classical Mechanics, second edition, Addison-Wesley, § 12-7, p. 588-596 (1980)

3. D.M. Fradkin
Am. J. Phys., 33, p 207, (1965)
Progr. Theoret. Phys. 37, p 798 (1967)

4. L.D. Landau, E.M. Lifchitz
Mécanique, Editions de Moscou (1982)

5. J. Ph. Pérez
Mécanique, Masson, Paris (1992)

6. E.V. Chpolski.
Physique Atomique, Tome I, Editions de Moscou §26 (1977)