MECANIQUE DES FLUIDES ET CHANGEMENTS DE REFERENTIEL

Frédéric PAVIET-SALMON,
G.R.E.S.E.P.
Lycée Fustel de Coulanges,
STRASBOURG

I. INTRODUCTION.

Les élèves de classes préparatoires ou de premier cycle universitaire découvrent l'utilisation en Sciences Physiques des dérivées partielles, lors de l'enseignement de la thermodynamique. Malgré ce premier contact, les étudiants semblent avoir beaucoup de difficultés en mécanique des fluides lorsqu'interviennent simultanément équations locales et changement de réferentiel. Il s'agit dans cet article de montrer que l'invariance des équations d'Euler et de conservation de la matière, lors d'un changement de réferentiel galiléen, découle d'une écriture correcte des dérivées partielles.
Une fois cette démarche bien comprise, on étudiera à l'aide d'un exemple simple le passage d'un référentiel galiléen à un référentiel non galiléen.

II. ETUDE D'UN CHANGEMENT DE REFERENTIEL GALILEEN.

1°. RELATIONS entre les DERIVEES PARTIELLES dans les deux REFERENTIELS.

Soit $R(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k},t)$ un référentiel galiléen et $R'(O',\vec{i},\vec{j},\vec{k},t)$ un deuxième référentiel galiléen.
R' est animé par rapport à R d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. On peut arbitrairement choisir le vecteur $\vec{i}$ de façon à ce que le mouvement de O' s'effectue sur la droite Ox. On écrit alors $\vec{V}(O')_R = V_e\vec{i}$.
La transformation de Galilée est donnée par les relations suivantes:

$$\begin{cases} x' = x - V_e t \\ y' = y \\ z' = z \end{cases}$$

Selon le référentiel d'étude, une fonction f des variables d'espace et du temps s'écrira $f(x,y,z,t)$ ou $f(x',y',z',t)$ et sa différentielle sera notée :

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} dx + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} dy + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} dz + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} dt \qquad (1)$$

ou

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{y',z',t} dx' + \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x',z',t} dy' + \left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_{x',y',t} dz' + \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x',y',z'} dt \qquad (2)$$

Mais, d'après la transformation de Galilée, x',y',z' sont des fonctions de x,y,z,t. On peut donc écrire leurs différentielles de la façon suivante :

$$\begin{cases} dx' = dx - V_e dt \\ dy' = dy \\ dz' = dz \end{cases}$$

En réinjectant ces relations dans (2) et en identifiant à (1) l'expression obtenue, on en déduit facilement les relations :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{y',z',t} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{y,z,t} \quad (3.a)\ , \qquad \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)_{x',z',t} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{x,z,t} \quad (3.b)\ ,$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial z'}\right)_{x',y',t} = \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)_{x,y,t} \quad (3.c) \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x,y,z} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{x',y',z'} - V_e\left(\frac{\partial f}{\partial x'}\right)_{y',z',t} \qquad (4).$$

2°. INVARIANCE DES EQUATIONS LOCALES.

On étudie maintenant l'écoulement d'un fluide parfait pour lequel $\vec{V}$ désigne le champ de vitesse dans R et $\vec{V}'$ celui dans R'. La composition des vitesses donne immédiatement $\vec{V} = \vec{V}' + V_e\vec{i}$.

ρ désigne la masse volumique du fluide, p la pression et $\vec{f}_v$ une force volumique.

2.a Equation de conservation de la matière.

Ecrivons l'équation locale de la conservation de la matière dans R.

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} + div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$$

L'opérateur divergence ne faisant intervenir que des dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace, les relations (3) impliquent que son expression est la même dans les deux réferentiels.

En utilisant la formule de composition des vitesses, on obtient facilement:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x,y,z} + div\left(\rho\vec{V}'\right) + \left(\frac{\partial(\rho V_e)}{\partial x}\right)_{y,z,t} = 0$$

Il suffit alors d'utiliser la relation (4) pour écrire:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x',y',z'} - V_e\left(\frac{\partial \rho}{\partial x'}\right)_{y',z',t} + div\left(\rho\vec{V}'\right) + V_e\left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right)_{y,z,t} = 0$$

La relation (3.a) permet alors de simplifier cette équation en:

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{x',y',z'} + div\left(\rho\vec{V}'\right) = 0$$

Ce qui est bien l'expression de l'équation locale de la conservation de la matière dans R'.

2.b Equation d'Euler.

Pour l'écoulement étudié, on note $\vec{V} = V_1\vec{i} + V_2\vec{j} + V_3\vec{k}$ le champ de vitesse dans R et $\vec{V}' = V_1'\vec{i} + V_2'\vec{j} + V_3'\vec{k}$ celui dans R'. La force volumique sera notée $\vec{f}_v = f_{v1}\vec{i} + f_{v2}\vec{j} + f_{v3}\vec{k}$.

La loi de composition des vitesses implique les relations:

$$\begin{cases} V_1 = V_1' + V_e \\ V_2 = V_2' \\ V_3 = V_3' \end{cases} \qquad (5).$$

Dans R, l'équation d'Euler a pour expression $\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right) + \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{V}\right] = \vec{f}_v - \overrightarrow{grad}(p)$.

Ecrivons la première composante de cette équation vectorielle.

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)_{x,y,z} + \left(\vec{V}.\overrightarrow{grad}\right)V_1\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t}$$

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)_{x,y,z} + V_1\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{y,z,t} + V_2\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)_{x,z,t} + V_3\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)_{x,y,t}\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t}$$

En utilisant les relations (5) cette équation s'écrit encore:

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)_{x,y,z} + V_e\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{y,z,t} + V_1'\left(\frac{\partial V_1}{\partial x}\right)_{y,z,t} + V_2'\left(\frac{\partial V_1}{\partial y}\right)_{x,z,t} + V_3'\left(\frac{\partial V_1}{\partial z}\right)_{x,y,t}\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z,t}$$

En utilisant les relations (3) et (4) cette équation se simplifie en:

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1}{\partial t}\right)_{x',y',z'} + V_1'\left(\frac{\partial V_1}{\partial x'}\right)_{y',z',t} + V_2'\left(\frac{\partial V_1}{\partial y'}\right)_{x',z',t} + V_3'\left(\frac{\partial V_1}{\partial z'}\right)_{x',y',t}\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{y',z',t}$$

Or V_e est une constante et $V_1' = V_1 - V_e$. On peut donc récrire l'équation ci-dessus sous la forme

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1'}{\partial t}\right)_{x',y',z'} + V_1'\left(\frac{\partial V_1'}{\partial x'}\right)_{y',z',t} + V_2'\left(\frac{\partial V_1'}{\partial y'}\right)_{x',z',t} + V_3'\left(\frac{\partial V_1'}{\partial z'}\right)_{x',y',t}\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{y',z',t}$$

Soit encore:

$$\rho\left[\left(\frac{\partial V_1'}{\partial t}\right)_{x',y',z'} + \left(\vec{V}'.\overrightarrow{grad}\right)V_1'\right] = f_{v1} - \left(\frac{\partial p}{\partial x'}\right)_{y',z',t}.$$

En suivant la même démarche pour chaque composante de l'équation d'Euler, on obtiendrait ainsi :

$$\rho\left[\left(\frac{\partial \vec{V}'}{\partial t}\right)_{x',y',z'} + \left(\vec{V}'.\vec{grad}\right)\vec{V}'\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p)$$

Ce qui est bien l'équation d'Euler exprimée dans le référentiel R'.

III. PASSAGE D'UN REFRENTIEL GALILEEN A UN REFERENTIEL NON GALILEEN

Par souci de simplicité, on étudiera le cas particulier suivant. $R\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k},t\right)$ est un référentiel galiléen et $R'\left(O,\vec{i}',\vec{j}',\vec{k},t\right)$ un deuxième référentiel animé par rapport à R d'un mouvement de rotation uniforme autour de l'axe Oz. Dans la suite, on notera $\vec{\Omega} = \Omega\vec{k}$ le vecteur rotation de R' par rapport à R.

1°. RELATIONS entre les DERIVEES PARTIELLES dans les deux REFERENTIELS.

Notons r, θ, z les coordonnées cylindriques d'un point M dans R et r', θ', z' celles du même point dans R'. Moyennant un choix correct de l'origine des temps, les relations de passage prennent la forme suivante:

$$\begin{cases} r' = r \\ \theta' = \theta - \Omega t \\ z' = z \end{cases}$$

En procédant comme au **II.1°**, on obtient facilement pour une fonction f des variables d'espace et du temps, la relation $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{r,\theta,z} = \left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{r',\theta',z'} - \Omega\left(\frac{\partial f}{\partial \theta'}\right)_{r',z',t}$.

Les dérivées partielles par rapport aux coordonnées d'espace ont, quant à elles, les mêmes expressions dans les deux référentiels. Ce dernier point implique que les opérateurs gradient et divergence ont la même expression dans les deux référentiels.

2°. INVARIANCE DES EQUATIONS LOCALES.

on étudie ici l'écoulement d'un fluide parfait pour lequel $\vec{V}$ désigne le champ de vitesse dans R et $\vec{V}'$ celui dans R'. La composition des vitesses donne immédiatement $\vec{V} = \vec{V}' + r\Omega\vec{u}_\theta$.
ρ désigne la masse volumique du fluide, p la pression et $\vec{f}_v$ une force volumique.

2.a Equation de conservation de la matière.

Ecrivons l'équation de conservation de la matière dans R : $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{r,\theta,z} + div\left(\rho\vec{V}\right) = 0$.

Cette équation peut encore s'écrire sous la forme $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{r,\theta,z} + div\left(\rho\vec{V}' + \rho r\Omega\vec{u}_\theta\right) = 0$

Soit encore $\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}\right)_{r',\theta',z'} - \Omega\left(\frac{\partial \rho}{\partial \theta'}\right)_{r',z',t} + div\left(\rho\vec{V}'\right) + div\left(\rho r\Omega\vec{u}_\theta\right) = 0$

On calcule alors $div(\rho r\Omega\vec{u}_\theta) = \Omega\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)_{r,z,t}$. En utilisant les relations entre les dérivées partielles calculées dans les deux référentiels, on obtient facilement
$\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)_{r',\theta',z'} + div(\rho\vec{V}') = 0$.

2.b Equation d'Euler.

Dans R l'équation d'Euler a pour expression $\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}}{\partial t}\right)_{r,\theta,z} + (\vec{V}.\vec{grad})\vec{V}\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p)$.

Ce qui peut s'écrire sous la forme
$$\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}\right)_R + ((\vec{V}' + r\Omega\vec{u}_\theta).\vec{grad})(\vec{V}' + r\Omega\vec{u}_\theta)\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p)$$
Soit encore $\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}\right)_{R'} - \Omega\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial\theta}\right)_{r',z',t} + ((\vec{V}' + r\Omega\vec{u}_\theta).\vec{grad})(\vec{V}' + r\Omega\vec{u}_\theta)\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p)$

On calcule alors chacun des termes de cette expression.
$$(r\Omega\vec{u}_\theta.\vec{grad})r\Omega\vec{u}_\theta = -r\Omega^2\vec{u}_r$$
$$(\vec{V}'.\vec{grad})r\Omega\vec{u}_\theta = \vec{\Omega}\wedge\vec{V}'$$
$$(r\Omega\vec{u}_\theta.\vec{grad})\vec{V}' = \Omega\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial\theta}\right) + \vec{\Omega}\wedge\vec{V}'$$

On obtient finalement l'expression
$$\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}\right)_{R'} + (\vec{V}'.\vec{grad})\vec{V}'\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p) + \rho r\Omega^2\vec{u}_r - 2\rho\vec{\Omega}\wedge\vec{V}'.$$
Soit encore $\rho\left[\left(\frac{\partial\vec{V}'}{\partial t}\right)_{R'} + (\vec{V}'.\vec{grad})\vec{V}'\right] = \vec{f}_v - \vec{grad}(p) + \vec{f}_{ie} + \vec{f}_{ic}$.

Cette équation est l'équation d'Euler exprimée dans R', référentiel non galiléen. $\vec{f}_{ie}$ et $\vec{f}_{ic}$ représentent respectivement les forces volumiques d'inertie d'entrainement et de Coriolis.

IV. CONCLUSION

La démonstration de l'invariance des deux équations locales présentées dans cet article, lors d'un changement de référentiel galiléen est un exercice fort didactique qui met en évidence la précision dont il faut faire preuve dans l'écriture et l'emploi des dérivées partielles.
Il est également intéressant, d'attirer l'attention des étudiants sur le fait que l'équation de conservation de la matière a la même expression dans tous les référentiels. En revanche, dans l'équation d'Euler, il faut prendre en compte les forces volumiques d'inertie d'entrainement et de Coriolis si le référentiel est non galiléen.