

FORMALISATION ELECTRODYNAMIQUE des EQUATIONS DE MAXWELL

Bruno JECH,
Lycée Jean Dautet
17000 LA ROCHELLE

Nous nous proposons dans ce qui suit de donner une représentation électrodynamique des équations de Maxwell, c'est-à-dire une modélisation de ces équations s'appuyant sur le théorème de Thévenin-Norton, le milieu où se propage le champ électromagnétique étant alors représenté localement par une *impéditivité*, concept analogue à la notion d'impédance pour les circuits électrodynamiques¹. Cette modélisation présente l'intérêt particulier de conduire à utiliser les outils de la théorie des réseaux électriques (diagramme de Bode, etc...) et peut donc être prise en compte par les étudiants et les enseignants en électrotechnique générale. Une telle approche leur permettra en effet de traiter des questions de propagation électromagnétique (absorption, dispersion, ...) à l'aide d'outils qui leur sont familiers. Nous verrons par ailleurs que ce mode de présentation permet de symboliser chaque terme des équations de propagation du champ électrique, et par là de donner une interprétation énergétique et une visualisation graphique à ces termes. Ce dernier aspect présente, nous semble-t-il, des vertus didactiques et mnémotechniques non négligeables.

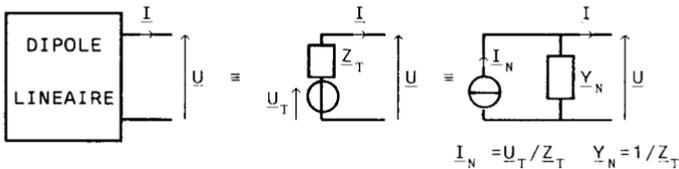
¹ La démarche suivie ci-après s'apparente au niveau local à celle suivie en 1886 par Oliver Heaviside (1850, 1925) lorsqu'il introduisit la notion d'impédance dans l'étude des réseaux électriques. Rappelons à ce propos que le mot impédance a été forgé à partir du verbe latin *impedire* signifiant gêner, empêcher, généralisant ainsi le concept de résistance électrique. De même, le mot admittance (introduit en 1933) généralisant celui de conductance, vient du verbe latin *admittere* signifiant admettre, permettre. Profitons de l'occasion pour mettre en lumière le génie relativement méconnu de Heaviside qui, entre autres choses, simplifia puissamment l'énoncé de la théorie de Maxwell, introduisit l'utilisation des vecteurs en physique, établit l'équation des télégraphistes, étudia la dynamique des charges en mouvement, émit l'hypothèse de l'existence de l'ionosphère et posa les bases de l'outil admirable qu'est le calcul opérationnel (pour en savoir plus, voir par exemple P. Nahin, «Oliver Heaviside», Pour la Science, n° 154, août 1990, p. 84-91.

PREMIERE PARTIE : ÉLABORATION DES MODELES

I/ RAPPELS CONCERNANT LE THEOREME DE THEVENIN-NORTON

I.1) Énoncé

L'électrotechnique générale, c'est-à-dire le domaine englobant l'électrocinétique, l'électromécanique, l'électronique et l'automatique, fut et reste une discipline particulièrement unificatrice. En effet, domaine privilégié de la modélisation, les schémas équivalents y ont pour rôle premier de faciliter l'étude de systèmes électriques complexes. Or, lorsqu'un système électrique est linéaire (c'est-à-dire régi par un système d'équations linéaires) et qu'il s'agit d'étudier son comportement entre deux quelconques de ses noeuds d'accès (dipôle), nous disposons d'un théorème de grande importance permettant de considérablement simplifier cette étude : c'est le théorème de Thévenin-Norton. Dans le cadre de l'hypothèse harmonique, c'est-à-dire lorsque toutes les grandeurs électriques actives sont sinusoïdales et de même fréquence (ce qui permet de mettre en oeuvre les outils de l'analyse harmonique), ce théorème stipule que tout dipôle électrique linéaire est équivalent à un générateur dit de Thévenin, constitué d'une source de tension de notation complexe \underline{U}_T en série avec une impédance complexe \underline{Z}_T , ce schéma équivalent étant lui-même équivalent à un générateur dit de Norton constitué d'une source de courant de notation complexe \underline{I}_N en parallèle avec une admittance complexe \underline{Y}_N .



Ainsi, un transformateur "vu" au secondaire, l'induit d'un alternateur ou d'une dynamo, un moteur quelconque ou l'étage de sortie d'un amplificateur seront représentables par un schéma équivalent du type précédent, pourvu que leur fonctionnement soit linéaire².

² On généralise le cadre d'application de ce théorème à des signaux électriques quelconques mais temporellement finis par le biais du calcul opérationnel (transformée de Laplace, analyse impulsionnelle), le rôle des grandeurs complexes étant alors tenu par les grandeurs images (impédances-admittances opérationnelles, ...).

Ce théorème n'est en fait qu'une expression particulière des principes de la thermodynamique, la source de tension (resp. : de courant) traduisant les échanges d'énergie libre entre le système et son milieu extérieur, l'impédance de Thévenin (resp. : l'admittance de Norton) rendant compte des différentes formes de l'énergie électromagnétique (électrique, magnétique) et des dissipations énergétiques mises en jeu à l'intérieur du système.

I.2) Résistance-inductance-capacité

Un dipôle linéaire sera dit passif s'il n'échange pas d'énergie libre avec l'extérieur, auquel cas la tension \underline{U}_T est nulle ; ω étant la pulsation des grandeurs sinusoïdales en présence, l'impédance \underline{Z}_T a pour expression tout à fait générale ($j^2 = -1$) :

$$\underline{Z}_T = R(\omega) + j.X(\omega) = Z_T(\omega).exp(j\varphi[\omega])$$

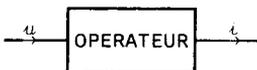
$R(\omega)$ représentant la résistance du dipôle et $X(\omega)$ sa réactance, chacune de ces grandeurs étant associée respectivement aux dissipations énergétiques et à la puissance dite réactive ; $\varphi(\omega)$ désigne le déphasage de la tension par rapport à l'intensité. En représentation parallèle, l'admittance \underline{Y}_N aura pour expression générale :

$$\underline{Y}_N = G(\omega) + jB(\omega) = Y_N(\omega).exp(-j\varphi[\omega]) = \frac{1}{\underline{Z}_T}$$

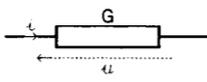
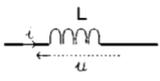
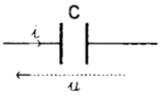
$G(\omega)$ désignant la conductance du dipôle et $B(\omega)$ sa susceptance.

Compte tenu du fait que l'énergie électromagnétique se présente sous deux formes (électrique et magnétique) et que le second principe implique une dégradation entropique, toute impédance (resp. : admittance) peut être représentée par la mise en série (resp. : en parallèle) d'une capacité C (terme de "rappel", modélisant l'énergie électrique de type potentiel), d'une inductance L (terme "inertiel", modélisant l'énergie magnétique de type cinétique) et d'une résistance R (traduisant les dissipations énergétiques).

Ces modèles peuvent également être interprétés comme des opérateurs permettant de passer d'une tension à une intensité (ou réciproquement) et peuvent donc être représentés par le schéma bloc suivant :



Nous donnons ci après le tableau des trois modèles fondamentaux de dipôles passifs avec leur opération associée, les opérations étant effectuées sur une tension.

MODELES	OPERATION	REPRESENTATION COMPLEXE	OPERATEUR
	$i = G \cdot u$	$\underline{I} = G \cdot \underline{U}$	multiplicateur par une constante
	$i = \frac{1}{L} \int_0^t u \cdot dt$	$\underline{I} = \frac{\underline{U}}{jL\omega}$	intégrateur
	$i = C \cdot \frac{du}{dt}$	$\underline{I} = jC\omega \cdot \underline{U}$	dérivateur

II/ REPRESENTATION ELECTRODYNAMIQUE DES EQUATIONS DE MAXWELL

II.1) Solution type O.M.P.P.

Etant donné un référentiel où sont repérés les événements (\vec{r}, t) , nous savons que l'analyse de Fourier-Laplace d'une part, la linéarité des équations de Maxwell en milieux linéaires d'autre part, permettent de nous limiter — sans pour autant restreindre la généralité du propos — à l'étude des solutions électromagnétiques de la forme :

$$\underline{F}(\underline{M}, t) = \underline{\hat{F}} \cdot \exp[j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

solutions dites *ondes monochromatiques planes progressives* (en abrégé : O.M.P.P.) ; ω est la pulsation de l'onde et \vec{k} le vecteur d'onde complexe (indépendant de \vec{r} et de t , tout comme $\underline{\hat{F}}$, amplitude complexe maximale de l'O.M.P.P.). Toute solution générale sera alors obtenue par combinaison linéaire d'O.M.P.P.³. Au vecteur d'onde \vec{k} , nous pouvons associer l'indice complexe \underline{n} défini par :

$$\vec{k} = \underline{n} \cdot \frac{\omega}{c} \cdot \vec{u}$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide et \vec{u} la direction de propagation.

³ En fait, nous appliquons ici l'analyse de Fourier à l'évolution temporelle du signal et l'analyse de Laplace à son évolution spatiale, \vec{k} étant complexe.

Nous savons que lorsqu'il s'agit d'étudier spécifiquement les O.M.P.P., l'opérateur dérivation temporelle est identifiable à $j\omega$ ($\frac{\partial}{\partial t} \equiv j\omega$) et l'opérateur nabla à $-j\vec{k}$ ($\vec{\nabla} \equiv -j\vec{k}$), si bien que, (ϵ_0, μ_0) désignant les constantes électromagnétiques du vide, (\vec{E}, \vec{B}) représentant le champ électromagnétique, $\vec{\rho}_q$ le champ densité d'électricité et \vec{J} le champ densité de courant total, les équations de Maxwell prennent pour expression :

$$\begin{array}{l} \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{B} - \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{0} \\ \vec{k} \cdot \vec{E} = j\rho_q / \epsilon_0 \qquad \vec{k} \wedge \vec{B} + \omega c^{-2} \vec{E} = j\mu_0 \vec{J} \end{array}$$

II.2) Réduction des équations de Maxwell au champ électrique

En reprenant les équations précédentes, nous avons donc :

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \Rightarrow \vec{k} \wedge \left(\frac{1}{\omega} \vec{k} \wedge \vec{E} \right) + \omega c^{-2} \vec{E} = j\mu_0 \vec{J}$$

soit, en divisant tout par $j\mu_0$:

$$-j \frac{1}{\mu_0 \omega} (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} + j \frac{1}{\mu_0 \omega} \vec{k}^2 \vec{E} - j \epsilon_0 \omega \vec{E} = \vec{J}$$

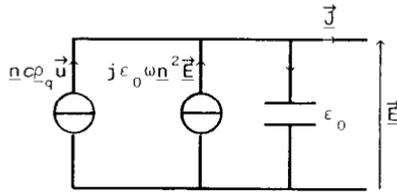
ou encore, en utilisant le théorème de Gauss et l'indice complexe n :

$$(I) \quad n c \rho_q \vec{u} + j \epsilon_0 \omega \left(n^2 \vec{E} - \vec{E} \right) = \vec{J}$$

Les termes de gauche étant homogènes à une densité de courant, l'expression précédente est donc analogue à une loi des noeuds. Dressons alors le tableau analogue suivant :

ELECTROCINETIQUE	TERMES DE CHAMP
intensité	densité de courant
tension	champ électrique
capacité	permittivité

Compte tenu de ce qui précède, nous pouvons représenter l'équation (I) sous la forme suivante que nous désignerons par *représentation de Norton* des équations de Maxwell :



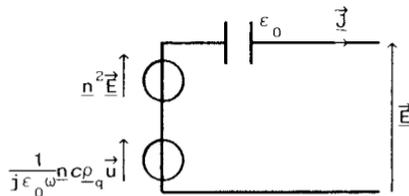
Représentation de Norton

Nous pouvons également écrire l'équation (I) sous la forme :

(I')

$$\vec{E} = \frac{1}{j\epsilon_0\omega n C\rho_q} \vec{u} + n^2 \vec{E} - \frac{1}{j\epsilon_0\omega} \vec{J}$$

Les termes de droite étant homogènes à un champ électrique, l'équation (I') est analogue à une loi des mailles et nous lui associerons donc la représentation dite *de Thévenin* des équations de Maxwell, représentation que nous pouvons obtenir directement à partir de celle de Norton grâce aux règles de passage entre les deux schémas équivalents :



Représentation de Thévenin

II.3) Modélisation d'un milieu linéaire et isotrope

Dans ce qui suit nous supposons (ce qui est très souvent le cas) que le champ densité d'électricité ρ_q est nul et que les phénomènes magnétiques sont négligeables (milieu non ferromagnétique, influence du champ magnétique négligeable).

Considérons une population (densité volumique n) de porteurs de charge q et de masse m . A un instant donné, supposons pour simplifier que tous les porteurs sont écartés de \vec{r} de leur position d'équilibre et qu'ils ont tous la même vitesse \vec{v} par rapport au

référentiel d'étude. Dans le cadre de l'hypothèse harmonique, \vec{r} et \vec{V} varient sinusoidalement et nous avons donc :

$$\underline{\vec{V}} = j\omega \underline{\vec{R}}$$

Par ailleurs, le champ densité de courant associé à ces porteurs a pour expression :

$$\underline{\vec{J}} = nq\underline{\vec{v}} \Rightarrow \underline{\vec{J}} = nq\underline{\vec{V}} = j\omega nq\underline{\vec{R}}$$

Nous allons supposer maintenant que chacun de ces porteurs est soumis aux forces suivantes :

- la force électrique $q \cdot \underline{\vec{E}}(M,t)$ (nous négligeons les forces magnétiques) ;
- une force de rappel de la forme $-m \cdot \omega_0^2 \underline{\vec{R}}$ (pouvant être nulle dans le cas des porteurs libres) ;
- une force traduisant des dissipations énergétiques que nous poserons égale à $-\frac{m}{\tau} \cdot \underline{\vec{v}}$.

En appliquant le principe fondamental de la mécanique à chaque porteur, il vient :

$$m \cdot \frac{d^2 \underline{\vec{R}}}{dt^2} = q \cdot \underline{\vec{E}} - m \cdot \omega_0^2 \underline{\vec{R}} - \frac{m}{\tau} \underline{\vec{v}}$$

soit encore :

$$m \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau} \right) \underline{\vec{R}} = q \underline{\vec{E}}$$

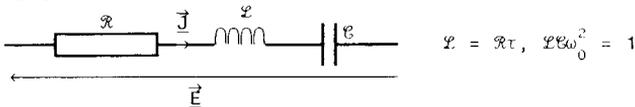
En utilisant l'expression du champ densité de courant, il vient en posant $\mathcal{R} = \frac{m}{nq^2\tau}$, coefficient que nous appellerons *résistivité* :

$$\underline{\vec{E}} = \frac{m}{j\omega nq^2} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega}{\tau} \right) \underline{\vec{J}} = \mathcal{R} \left(1 + j\tau\omega + \frac{\omega_0^2 \tau}{j\omega} \right) \underline{\vec{J}}$$

Dressons alors le tableau analogique suivant :

ELECTRODINAMIQUE	TERMES DE CHAMP
résistance	résistivité \mathcal{R}
inductance	inductivité $\mathcal{L} = \mathcal{R}\tau$
capacité	capacitivité $\mathcal{C} = \frac{1}{\mathcal{R}\omega_0^2 \tau}$

Le milieu peut donc être localement modélisé par le schéma équivalent suivant :

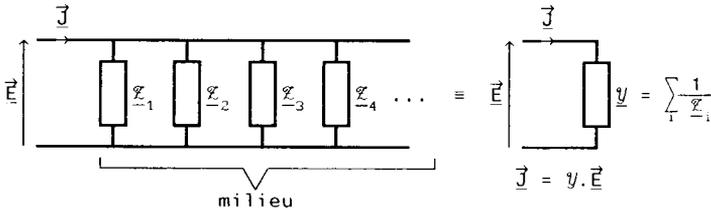


Nous constatons que la résistivité \mathcal{R} est liée aux dissipations dans le milieu, l'inductivité à la nature inertielle des porteurs et la capacitivité aux termes de rappel s'exerçant sur les porteurs (il n'y aura donc pas capacitivité pour des porteurs libres). Nous appellerons *impéditivité* \underline{z} (son inverse étant l'*admittivité* \underline{y}) la grandeur complexe :

$$\underline{z} = \mathcal{R} + j\mathcal{L}\omega + \frac{1}{j\mathcal{C}\omega} \quad \underline{E} = \underline{z} \cdot \underline{J} \quad \underline{J} = \underline{y} \cdot \underline{E}$$

constante de temps : $\tau = \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{R}}$ pulsation de résonance : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}\mathcal{C}}}$

Un milieu quelconque étant constitué d'un mélange de porteurs, libres ou non, de type différents, nous pourrions représenter chacune des populations de porteurs à l'aide d'une branche analogue à celles représentées ci-dessus, chacune de ces branches étant caractérisée par une impéditivité \underline{z}_i . Le champ densité de courant total résultant de la somme des différents champs densité de courant, nous pourrions donc modéliser le milieu par l'ensemble de ces différentes branches connectées en parallèle.

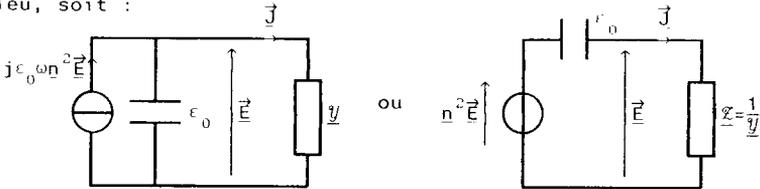


II.4) Propagation d'une O.M.P.P. dans un milieu linéaire

Il résulte de ce qui précède que nous pouvons représenter localement un milieu linéaire et isotrope par une admittivité équivalente \underline{y} telle que :

$$\underline{J} = \underline{y} \cdot \underline{E}$$

Faire se propager une O.M.P.P. dans ce milieu (avec $\rho_q = 0$) revient à connecter le pseudo-générateur de Norton (resp. : de Thévenin) à l'admittivité (resp. : l'impéditivité) représentative du milieu, soit :



Représentation de Norton

Représentation de Thévenin

En utilisant l'analogie de la loi du diviseur courant (resp. : de tension), il vient immédiatement :

$$(II) \quad \boxed{n^2 = 1 + \frac{1}{j\epsilon_0\omega} \sum_{r=1}^j \frac{1}{z_r} = 1 + \frac{1}{j\epsilon_0\omega} \sum_{r=1}^j \frac{1}{z_r}}$$

Afin d'interpréter cette relation, il convient de remarquer que si elle est multipliée de part et d'autre par le rapport $(\omega/c)^2$, nous avons, k_0 désignant la pulsation spatiale de l'onde dans le vide :

$$k^2 = k_0^2 - j\mu_0\omega \sum_{r=1}^j \frac{1}{z_r}$$

Nous obtenons ainsi l'équation de dispersion-absorption des ondes électromagnétiques par le milieu. Nous pouvons en effet poser :

$$\underline{k} = k_r - jk_e = (n_r - jn_e)k_0$$

les relations $k_r(\omega)$ et $k_e(\omega)$ traduisant respectivement les lois de dispersion et d'absorption des ondes électromagnétiques par le milieu, les termes n_r et n_e représentant respectivement quant à eux les indices de réfraction et d'extinction.

III/ DISCUSSION ENERGETIQUE

Considérons l'équation locale de conservation de l'énergie électromagnétique, soit :

$$\vec{e} \cdot \vec{j} = -\text{div}(\vec{\Pi}) - \frac{\partial}{\partial t} e_{em}$$

où $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ est le champ de propagation énergétique dit de Poynting et e_{em} le champ densité volumique d'énergie électromagnétique dans le vide. Sans limiter la généralité du propos, nous pouvons considérer que l'O.M.P.P. se propage suivant l'axe Oz (de direction \vec{u}_z) du référentiel d'étude et nous supposons par ailleurs que l'onde est polarisée rectilignement suivant l'axe Ox (de direction \vec{u}_x). Nous avons alors, en grandeurs réelles et avec les notations définies au II.4) :

$$\vec{k} = (k_r - jk_e)\vec{u}_z \Rightarrow \vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k_r z) \cdot \exp(-k_e z) \vec{u}_x$$

En posant $\underline{n} = n_e e^{-j\psi}$, le champ magnétique prend alors pour expression :

$$\vec{B} = \frac{n}{c} E_0 \cos(\omega t - k_r z - \psi) \cdot \exp(-k_e z) \vec{u}_y$$

Nous en déduisons que :

$$\operatorname{div}(\vec{\Pi}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \omega n^2 E_0^2 \exp(-2k_e z) \left(2 \cdot \sin(2[\omega t - k_r z - \psi]) - \sin(2\psi) \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_{em} = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \omega E_0^2 \exp(-2k_e z) \left(\sin(2[\omega t - k_r z]) + n^2 \sin(2[\omega t - k_r z - \psi]) \right)$$

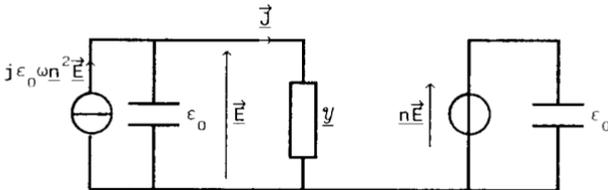
Considérons maintenant le modèle de Norton : il va de soi d'associer la source de densité de courant au flux local de puissance électromagnétique $\operatorname{div}(\vec{\Pi})$; par analogie avec le calcul de la puissance électrique en théorie des réseaux électriques, le flux local de puissance électromagnétique fournie par la source de densité de courant a pour expression (\Re signifiant *partie réelle de*) :

$$-\Re(j\epsilon_0 \omega n^2 \vec{E}) \cdot \Re(\vec{E}) = \frac{1}{2}\epsilon_0 \omega n^2 E_0^2 \exp(-2k_e z) \left(\sin(2[\omega t - k_r z - \psi]) - \sin(2\psi) \right)$$

Quant à la densité volumique d'énergie électromagnétique mise en jeu dans la capacitativité ϵ_0 , elle vaut :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 \right) = -\frac{1}{2}\epsilon_0 \omega E_0^2 \exp(-2k_e z) \cdot \sin(2[\omega t - k_r z])$$

Nous constatons que notre modèle de Norton ne rend compte que partiellement des échanges énergétiques entre le champ électromagnétique et le milieu. Si nous voulons modéliser totalement l'équation de conservation de l'énergie électromagnétique, il nous faut ajouter au modèle de Norton précédent le générateur de Thévenin en court-circuit suivant :



L'interprétation de cet additif au modèle initial est aisée : compte tenu de l'existence de l'équation de Maxwell-Faraday, la source de champ $n\vec{E}$ représente la partie du flux local de puissance électromagnétique mise en oeuvre dans la magnétisation du vide symbolisée par la capacitativité ϵ_0 .

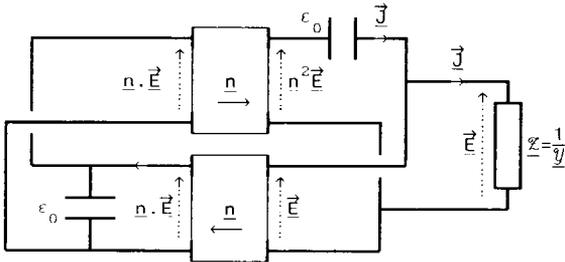
IV/ MODELISATION "BOUCLEE" DES EQUATIONS DE MAXWELL

Nous pouvons exprimer de façon simple le fait que les équations de Maxwell impliquent l'existence d'ondes électromagnétiques en remarquant que toute variation temporelle de champ électrique induit un champ magnétique variable qui induit lui-même un champ électrique variable et ainsi de suite. Or, force est de reconnaître que la modélisation précédente passe sous silence cet aspect des choses. Pour pallier cela, nous allons recourir à une représentation quadripolaire usant de quadripôles idéaux multiplicateurs par une constante, analogues aux sources de tension idéales commandées par une tension et ayant les caractéristiques suivantes :

- densité de courant d'entrée nulle (impéditivité d'entrée infinie) ;
- source de champ électrique idéale en sortie (impéditivité de sortie nulle) ;
- transmittivité (analogue de la transmittance) : n .



En utilisant alors la représentation de Thévenin et le milieu étant modélisé par une impéditivité \mathcal{Z} , le modèle obtenu en III) se ramène alors au schéma suivant :



Une telle modélisation présente ainsi l'intérêt de restituer à partir d'éléments simples (quadripôles, capacitivités ϵ_0) le caractère "bouclé" de l'induction électromagnétique en régime variable, le phénomène d'induction électrique ou magnétique proprement dit étant modélisé par les quadripôles \underline{n}^4 . Par ailleurs, ce modèle permet de retrouver aisément l'expression (II) et rend compte du fait qu'il n'y a pas propagation en régime stationnaire, la capacitivité ϵ_0 "ouvrant" la boucle lorsque $\omega = 0$ (découplage des champs électrique et magnétique). Dans ce dernier cas, l'admittivité \underline{y} se réduit à une conductivité \mathcal{G} et nous retrouvons la loi d'Ohm locale bien connue, soit : $\vec{J} = \mathcal{G} \cdot \vec{E}$.

⁴ Nous pouvons à cet égard remarquer que les oscillateurs électroniques ont, eux aussi, une structure bouclée.

DEUXIEME PARTIE : APPLICATIONS

Dans ce qui suit, nous supposerons comme précédemment que la densité d'électricité de charges non polarisées ρ_q est nulle et que les effets magnétiques sont négligeables. Par ailleurs, le modèle de Thévenin-Norton établi au II.4) suffira aux études que nous nous proposons de développer.

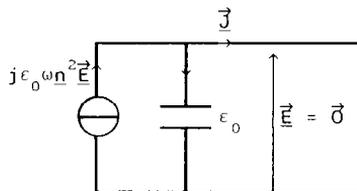
I/ PROPAGATION DANS LE VIDE ET DANS UN CONDUCTEUR IDEAL

Le vide pouvant être modélisé par une impéditivité infinie, la propagation électromagnétique dans le vide peut ainsi être symbolisée par un pseudo-générateur de Thévenin en circuit ouvert (fonctionnement "à vide" du générateur) ; nous avons ainsi :

$$\underline{Z} = \infty \Rightarrow \underline{J} = 0 \Rightarrow \underline{n}^2 \underline{E} = \underline{E} \Rightarrow \underline{n}^2 = 1 \Rightarrow \underline{n} = \pm 1$$

La racine négative étant relative aux ondes régressives, nous ne conserverons que la racine positive.

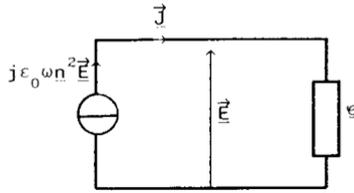
Un conducteur parfait se caractérisant par une impéditivité nulle, le pseudo-générateur de Norton est cette fois en "court-circuit" ; nous aurons donc le schéma équivalent suivant :



Nous en déduisons immédiatement que champ électrique et courant doivent être nuls à l'intérieur d'un conducteur parfait : une O.M.P.P. ne peut donc y pénétrer.

II/ EFFET DE PEAU

Considérons maintenant un milieu purement ohmique de conductivité (inverse de la résistivité) \mathcal{G} , sollicité par une O.M.P.P. basses fréquences, c'est-à-dire telle que l'effet de la capacitivité ϵ_0 puisse être négligé devant celui de \mathcal{G} . Nous obtenons donc le schéma équivalent suivant :



$$\vec{\mathcal{E}} = j\epsilon_0 \omega \underline{n}^2 \vec{E} \Rightarrow \underline{n}^2 = \frac{1}{j\epsilon_0 \omega} \mathcal{E} = \frac{\mu_0 c^2 \mathcal{E}}{\omega} \exp(-j\frac{\pi}{2})$$

Il en résulte que :

$$\underline{n} = \pm \left(\frac{\mu_0 c^2 \mathcal{E}}{2\omega} \right)^{\frac{1}{2}} (1-j) \Rightarrow \underline{k} = \underline{n} \cdot \frac{\omega}{c} = \pm \left(\frac{\mu_0 \mathcal{E} \omega}{2} \right)^{\frac{1}{2}} (1-j)$$

Nous faisons ainsi apparaître l'épaisseur de peau δ définie par :

$$\frac{1}{\delta} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mathcal{E} \omega}{2}}$$

cette épaisseur donnant l'ordre de grandeur de pénétration de l'onde à l'intérieur du conducteur.

III/ PROPAGATION DANS UNE POPULATION DE PORTEURS LIBRES

Généralisons l'étude précédente en utilisant la modélisation du II.3) appliquée à une population de porteurs libres (gaz d'électrons libres d'un métal, plasma). La pulsation ω_0 est ici nulle et l'admittivité du milieu a ainsi pour expression :

$$\underline{y}^{-1} = \frac{1}{\mathcal{E}} (1 + j\tau\omega)$$

D'où il vient :

$$\underline{n}^2 = 1 + \frac{\mathcal{E}}{j\epsilon_0 \omega (1 + j\tau\omega)}$$

Introduisons la variable réduite $x = \omega\tau$ et la constante⁵ :

$$x_p^2 = (\omega_p \tau)^2 = \frac{\mathcal{E} \tau}{\epsilon_0}$$

En posant $n = n \cdot \exp(-j\psi)$, nous avons ainsi :

$$\underline{n}^2 = \frac{1 + j \left(x - \frac{x_p^2}{x} \right)}{1 + jx} = n^2 \exp(-2j\psi)$$

Nous avons alors tout intérêt à représenter \underline{n} dans le diagramme de Bode constitué des graphes de $n_{dB} = 10 \cdot \log(n)$ et de ψ en fonction de $\log(x)$:

$$n_{dB} = 2,5 \left\{ \log \left(1 + \left[x - \frac{x_p^2}{x} \right]^2 \right) - \log(1+x^2) \right\}$$

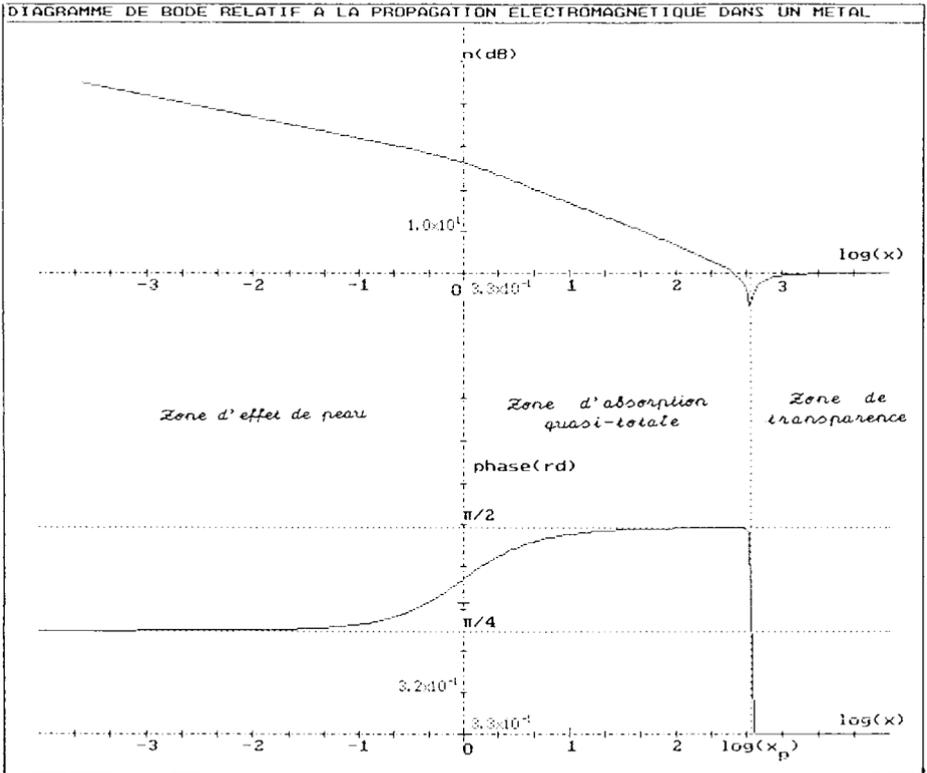
$$\psi = \frac{1}{2} \left(\arctan(x) - \arctan \left[x - \frac{x_p^2}{x} \right] \right)$$

⁵ Remarquons que ω_p est du type pulsation plasma.

Nous avons donné ci-après les représentations graphiques des expressions précédentes avec un paramètre x_p de 500 (ordre de grandeur relatif à une population d'électrons libres dans un métal). Remarquons que :

- pour $x < 1$, nous retrouvons l'effet de peau caractérisé par une décroissance de -5 dB par décade pour n_{dB} et une phase de $\frac{\pi}{4}$.
- pour $1 < x < x_p$, n_{dB} décroît avec un taux de -10 dB par décade et la phase voisine $\frac{\pi}{2}$: l'indice complexe est pratiquement imaginaire pur et nous sommes donc dans une zone d'absorption quasi totale dont la largeur en pulsation B_{abs} a un ordre de grandeur de :

$$B_{abs} = \frac{1}{\tau} (x_p - 1) \approx \omega_p$$



IV/ POLARISATION IONIQUE

L'étude faite au II.3) convenant parfaitement à la modélisation de la polarisation ionique (avec comme cas particulier la polarisation électronique), l'expression (II) nous donne :

$$n^2 = 1 + \frac{1}{j \epsilon_0 \omega} \frac{1}{\Re \left(1 + j \tau \omega + \frac{\omega_D^2}{j \omega} \right)}$$

Prenons comme variable réduite $x = \omega/\omega_0$ et posons $Q = \omega_0 \tau$ et

$n_0^2 = 1 + \frac{1}{\Re \epsilon_0 \tau \omega_0^2}$; il vient alors :

$$n^2 = \frac{1 + jQ \left(x - \frac{n_0^2}{x} \right)}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} = n_0^2 \exp(-2j\psi)$$

Nous pouvons là encore tracer le diagramme de Bode relatif à n :

$$n_{dB} = 2,5 \left\{ \log \left(1 + Q^2 \left[x - \frac{n_0^2}{x} \right]^2 \right) - \log \left(1 + Q^2 \left[x - \frac{1}{x} \right]^2 \right) \right\}$$

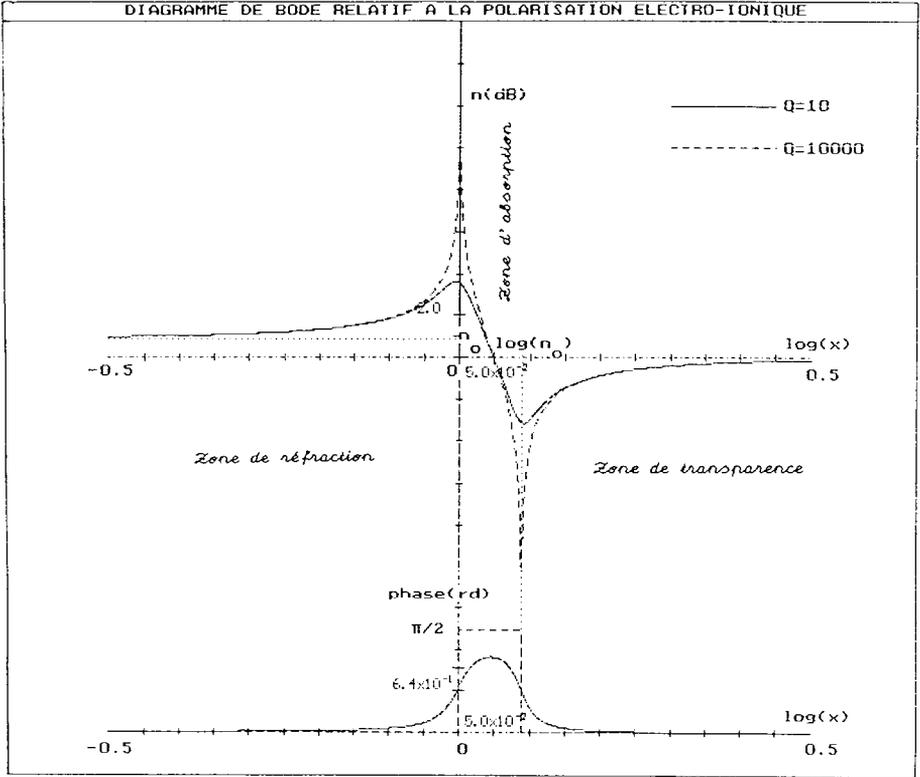
$$\psi = \frac{1}{2} \left\{ \arctan \left(Q \left[x - \frac{1}{x} \right] \right) - \arctan \left(Q \left[x - \frac{n_0^2}{x} \right] \right) \right\}$$

Ce diagramme est donné ci-après pour $n_0^2 = 1,5$ et pour les valeurs $Q = 10$ et $Q = 10^4$. Remarquons que :

— le diagramme tend vers un diagramme limite lorsque Q augmente.

— la zone d'absorption est d'autant plus clairement délimitée par la variation de la phase que Q est important (créneau rectangulaire de ψ de valeur $\frac{\pi}{2}$). La bande d'absorption a pour largeur en pulsation :

$$B_{abs} = (n_0 - 1) \omega_0.$$



V/ POLARISATION D'ORIENTATION

Nous allons étudier la polarisation d'orientation dans le cadre de la théorie de Debye. Bien que la modélisation proposée au II.3) ne convienne pas pour le phénomène d'orientation, nous allons montrer que nous pouvons néanmoins associer à ce phénomène un modèle électrocinétique. En effet, la théorie de Debye stipule que le champ de polarisation \vec{P} du milieu est régi par l'équation :

$$n \frac{\alpha_0}{\chi_0} \vec{P} + \tau_D \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = n \alpha_0 \epsilon_0 \vec{E}$$

où χ_0 est la susceptibilité électrostatique du milieu, $n \alpha_0$ sa polarisabilité volumique (en régime stationnaire) et τ_D le temps de relaxation mis par les dipôles permanents pour atteindre leur orientation d'équilibre. Le courant de polarisation ayant pour expression $\vec{J} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{P}$, dans le cadre de l'hypothèse harmonique l'équation précédente prend pour forme :

$$\vec{E} = \left(\frac{\tau_D}{n \alpha_0 \epsilon_0} + \frac{1}{j \epsilon_0 \chi_0 \omega} \right) \vec{J}$$

Par identification, nous pouvons donc définir la résistivité \mathcal{R} , la capacitivité \mathcal{C} et la constante de temps τ du milieu par :

$$\mathcal{R} = \frac{\tau_D}{n \alpha_0 \epsilon_0} \quad \mathcal{C} = \epsilon_0 \chi_0 \quad \tau = \mathcal{R} \mathcal{C} = \frac{\chi_0}{n \alpha_0} \tau_D$$

En milieu peu condensé (gaz), on a donc $\tau \approx \tau_D$. En définitive, nous avons :

$$\vec{E} = \mathcal{R} \left(1 + \frac{1}{j \omega \tau} \right) \vec{J} = \frac{1}{\underline{y}} \vec{J}$$

Utilisons alors l'équation (II) et introduisons la variable réduite $x = \omega \tau$; il vient :

$$n^2 = 1 + \frac{1}{j \epsilon_0 \omega \mathcal{R}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{j \omega \tau}} = 1 + \frac{\chi_0}{1 + jx}$$

ou encore, en posant $n_0^2 = 1 + \chi_0$:

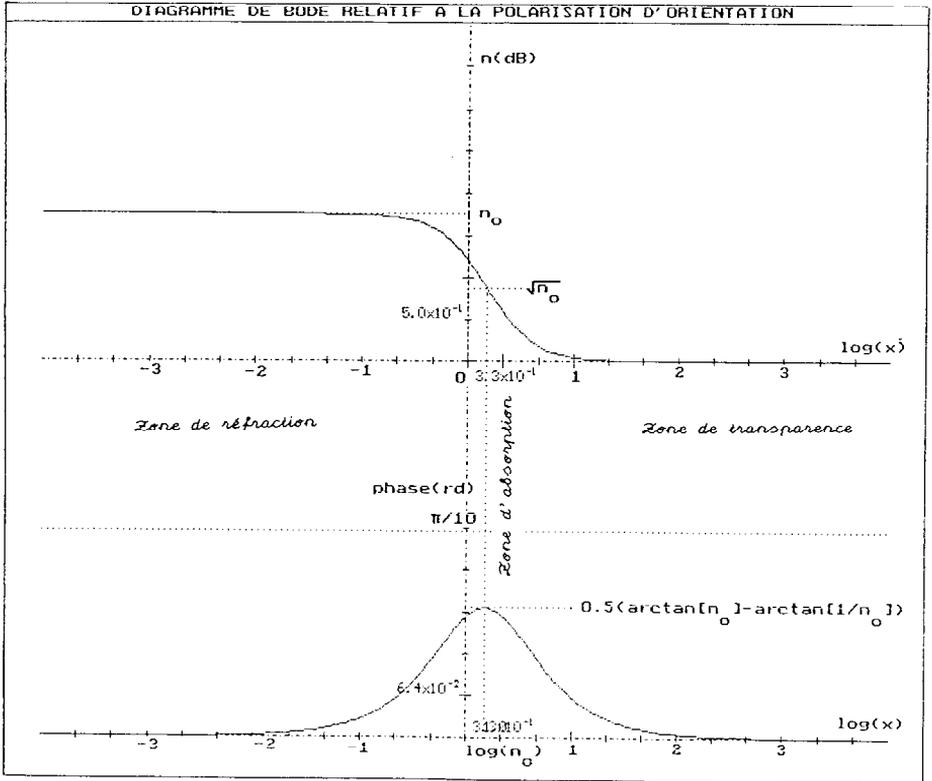
$$\underline{n}^2 = n_0^2 \left(\frac{1 + j n_0^{-2} x}{1 + jx} \right) = n_0^2 \exp(-2j\psi)$$

Le diagramme de Bode relatif à la polarisation d'orientation porte donc sur les expressions suivantes :

$$n_{dB} = 10 \cdot \log(n_0) + 2,5 \left(\log(1+n_0^{-4}x^2) - \log(1+x^2) \right)$$

$$\psi = \frac{1}{2} \left(\arctan(x) - \arctan(n_0^{-2}x) \right)$$

Ce diagramme est donné ci après pour $n_0 = 1,5$. En basses fréquences, il n'y a pas de déphasage entre le champ et le courant \vec{J} : les dipôles "suivent" le champ. En hautes fréquences, l'indice est pratiquement égal à l'unité et le phénomène d'orientation est alors tout à fait négligeable.



CONCLUSION

Il est loisible d'objecter à ce qui précède que nous n'avons en général pas un accès direct au module et à l'argument de l'indice complexe n , la tradition voulant que soient plutôt *mesurés* les indices de réfraction $n_r = n \cdot \cos(\psi)$ et d'extinction $n_e = n \cdot \sin(\psi)$ (lié au coefficient d'absorption). Toutefois il convient de remarquer que, lorsque ψ est quasiment constant, les courbes de Bode représentatives de n_{dB} donnent n_r et n_e à une translation verticale près. Par ailleurs, en dehors des zones d'absorption, c'est-à-dire quand $\psi = 0$, ces mêmes courbes de Bode permettent d'obtenir rapidement une détermination graphique de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe (cf appendice 1).

En tout état de cause, l'intérêt didactique de ce mode de présentation réside, nous semble-t-il, dans les points suivants :

- il permet d'utiliser les méthodes usuelles de la théorie des réseaux électriques pour traiter des problèmes d'optique ;
- ce faisant, il y a donc économie de moyens mis en oeuvre par unification, aspect des choses d'autant plus flagrant lorsqu'est étudiée la susceptivité complexe $\underline{\chi}$ à la place de l'indice complexe \underline{n} (cf appendice 2) ;
- comme pour les réseaux électriques, nous pourrions étendre aisément l'étude précédente à celle de la propagation de signaux quelconques mais temporellement finis dans des milieux linéaires par le biais du calcul opérationnel ;
- enfin, par la modélisation des différents phénomènes intervenant dans la propagation, ce mode de présentation conduit à isoler et à symboliser chaque phénomène énergétique, permettant ainsi d'apprécier plus aisément l'influence de ces phénomènes sur la dite propagation.

Bruno JECH

La Rochelle, octobre 1993

APPENDICE 1

Nous savons que, par définition, les vitesses de phase et de groupe d'une onde électromagnétique ont pour expression :

$$v_{\phi} = \frac{\omega}{k_r} = \frac{c}{n_r} \quad v_g = \frac{d\omega}{dk_r}$$

Lorsqu'il n'y a pas absorption, nous avons $\psi = 0$ et donc $n_r = n$. Nous en déduisons immédiatement que :

$$\log\left(\frac{v_{\phi}}{c}\right) = \frac{-n_{dB}}{10} \Rightarrow v_{\phi} = c \cdot 10^{-(0,1 \cdot n_{dB})}$$

Par ailleurs, la vitesse de groupe a pour expression :

$$v_g = c \cdot \frac{d\omega}{d(n\omega)} = v_{\phi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega}{n} \cdot \frac{dn}{d\omega}} = v_{\phi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{d(\log[n])}{d(\log[\omega])}} = v_{\phi} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{10} p}$$

p désignant ici la pente de la tangente à la courbe de Bode représentative de n_{dB} à la pulsation considérée. Nous avons donc :

$$\frac{v_{\phi}}{v_g} = 1 + 0,1 \cdot p$$

Enfin, à titre de curiosité, on vérifiera aisément que :

$$\log\left(\frac{c^2}{v_{\phi} v_g}\right) = \frac{1}{5} n_{dB} + \log(1 + 0,1 \cdot p)$$

APPENDICE 2

Dans le cadre de l'étude optique d'un milieu, il va de soi que nous privilégierons l'expression de l'indice complexe \underline{n} . Rappelons toutefois que cet indice est identifiable à la *permittivité complexe relative* $\underline{\epsilon}_r$ du milieu, permittivité elle-même liée à la *susceptivité complexe* $\underline{\chi}$ par :

$$\underline{\chi} = \underline{\epsilon}_r - 1 = \frac{1}{j\epsilon_0\omega} \underline{y}$$

Dans le cas du vide, cette susceptivité est nulle (puisque $\underline{y} = 0$). Pour la polarisation d'orientation, $\underline{\chi}$ prend pour expression standard (avec les notations données précédemment, χ_0 désignant la susceptivité électrostatique) :

$$\underline{\chi} = \frac{\chi_0}{1 + jx}$$

C'est là l'expression caractéristique d'un *système du premier ordre* — analogue à celle de la transmittance d'un filtre passe bas élémentaire par exemple — en parfaite conformité avec la nature physique du phénomène.

Dans le cas de la polarisation ionique, nous avons :

$$\underline{\chi} = \frac{\chi_0 Q}{jx \left(1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right) \right)}$$

Nous reconnaissons là une expression analogue à celle de la transmittance standard d'une réponse en position (donnant lieu à un phénomène de résonance en amplitude).

Enfin, en étendant le domaine d'application du concept de susceptivité — initialement du ressort de la théorie des diélectriques (porteurs liés) — aux populations de porteurs libres, nous avons :

$$\underline{\chi} = \frac{x^2}{jx(1+jx)}$$

Nous pouvons donc modéliser cette susceptivité complexe par la mise en série d'un intégrateur et d'un système du premier ordre. Dans le cas du métal parfait, on remarque enfin que cette susceptivité est évidemment non définie (porteurs "totalement" libres).

* * *