

COURBES ET SURFACES

ILLUSTRATION DE LA SYMETRIE

JEAN SIVARDIERE

CEA / Département de Recherche Fondamentale
sur la Matière Condensée / SPSMS / LIH
38054 Grenoble Cedex 9, France

INTRODUCTION

La notion de symétrie est souvent illustrée à l'aide d'objets mathématiques tels que les polygones et polyèdres réguliers, ou les pavages réguliers du plan et de l'espace. Dans cet article, nous montrons que des courbes et surfaces très variées peuvent être également exploitées pour introduire les concepts de base de la symétrie : symétries ponctuelles et d'espace, symétries discrètes et continues, relation entre groupe et sous-groupe, principe de symétrie de Curie et brisures de symétrie. Une connaissance mathématique approfondie de ces courbes et surfaces n'est pas nécessaire : leur définition géométrique ou leur équation⁽¹⁾ suffit pour en étudier les invariances, qui seront décrites en utilisant les notations internationales des cristallographes⁽²⁾.

SYMETRIE PONCTUELLE DES OBJETS PLANS

Intéressons-nous tout d'abord à la symétrie de rotation, ou symétrie ponctuelle, des objets plans. Un tel objet peut être invariant dans une rotation d'angle $2\pi/n$ autour d'un axe Δ perpendiculaire à son plan. Si n est entier, on dit que Δ est un axe d'ordre n ; le groupe de symétrie correspondant G , noté n , est fini ou discret, il est formé de n éléments : la rotation considérée et ses puissances successives, et il est appelé *groupe axial*. Si $n = 2$, la courbe est centrosymétrique : G est noté 2 ou $\bar{1}$. Un objet plan peut également être invariant dans une symétrie par rapport à un miroir m perpendiculaire à son plan. Si l'objet est invariant à la fois dans les opérations n et m , le miroir contenant l'axe Δ , il est invariant dans n miroirs équivalents contenant Δ et faisant entre eux des angles égaux à $2\pi/n$: le groupe de symétrie est appelé *groupe*

diédrique, il est d'ordre $2n$ et noté nm si n est impair, et nmm si n est pair (il existe alors deux classes distinctes de miroirs).

Si n est infini, l'angle de rotation autour de Δ est infinitésimal et l'axe Δ est dit d'ordre infini ; le groupe de symétrie correspondant, noté ∞ , est continu. Un cercle d'axe Δ est invariant dans le groupe ∞m , un cercle orienté dans le groupe ∞ seulement.

SYMETRIE PONCTUELLE DES COURBES PLANES

Les courbes planes ne possèdent en général aucun élément de symétrie de rotation. C'est le cas de la courbe $y = \exp x$. Une courbe représentée par une fonction $y = f(x)$ impaire, par exemple $y = \sinh x$ ou $y = \tanh x$, possède un axe de rotation binaire Δ suivant Oz : $G = 2$. Une courbe représentée par une fonction $y = f(x)$ paire, par exemple la courbe caténaire ou chaînette $y = \cosh x$, possède un miroir de trace Oy sur le plan xy : $G = 1m$ ou, plus simplement, m . C'est aussi le cas de la parabole $2py = x^2$, dont le foyer est sur l'axe Oy et la directrice est parallèle à Ox .

L'ellipse et l'hyperbole, de définition focale $MF \pm MF' = 2a$ et d'équation $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($FF' = 2c$ et $\pm b^2 + c^2 = a^2$), ont la symétrie $2mm$ ou, de manière

plus explicite, $2_z m_{xz} m_{yz}$. Si leur équation est $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$, une rotation du repère d'un angle α donné par $\tan 2\alpha = 2B/(A - C)$ est nécessaire pour mettre la symétrie diédrique en évidence.

L'ovale de Cassini (fig.1), défini par $MF \cdot MF' = b^2$ avec $FF' = 2a$, a la même symétrie $2mm$ que l'ellipse, comme le montre aussi son équation :

$$(x^2 + y^2)^2 + 2a^2(y^2 - x^2) + a^4 - b^4 = 0$$

Cette courbe, pour $b > a\sqrt{2}$, est un ovale convexe et fut proposée par Cassini comme orbite probable des planètes autour du soleil⁽³⁾.

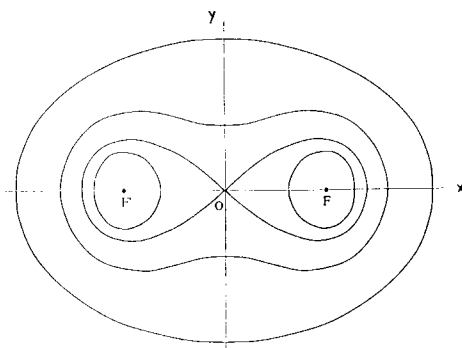


Fig.1 - Ovale de Cassini de foyers F et F' : la lemniscate est obtenue pour $a = b$. Pour $b < a$, l'ovale se décompose en deux boucles équivalentes.

L'ovale de Descartes, dont Maxwell a précisé les propriétés optiques⁽⁴⁾, est défini par $p MF + q MF' = 2a$ ($FF' = 2c$). Son seul élément de symétrie est le miroir de trace FF' , il peut d'ailleurs être défini à partir de F (ou F') et d'un troisième foyer F'' (fig.2).

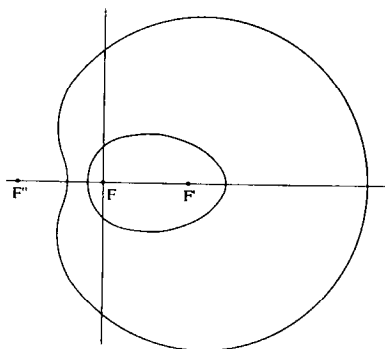


Fig.2 - Ovale de Descartes défini à partir des foyers F et F' , avec $q = 3p$ et $2a = 7c$: il se décompose en deux boucles inéquivalentes.

L'hypocycloïde est la courbe engendrée par un point d'un cercle de rayon R_2 roulant sans glisser à l'intérieur d'un cercle de rayon R_1 (fig.3). C'est la trajectoire d'un pendule de Foucault⁽⁵⁾. Si R_1/R_2 est un entier n , la courbe est formée de n arches identiques et possède n points de rebroussement et n sommets. Chaque diamètre contenant un point de rebroussement ou un sommet est la trace d'un miroir m . G est le groupe diédrique nm du polygone régulier à n côtés. Pour $n = 4$, la courbe est une astroïde, $G = 4mm$. Si R_1/R_2 est un rationnel irréductible p/q , l'hypocycloïde est étoilée : elle possède p arches, points de rebroussement, sommets et points doubles, et entoure q fois le centre du cercle fixe. Sa symétrie est celle de l'hypocycloïde $R_1/R_2 = p$.

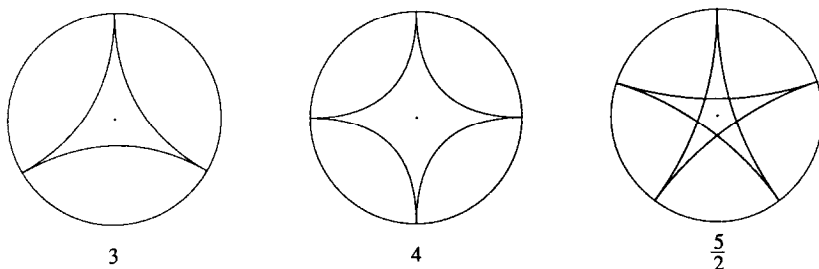


Fig.3 - Hypocycloïdes obtenues pour $R_1/R_2 = 3, 4, 5/2$.

Si le cercle de rayon R_2 roule sans glisser à l'extérieur du cercle de rayon R_1 , la courbe engendrée est une épicycloïde. Si $n = 1$, la courbe est une cardioïde de symétrie $G = m$; si $n = 2$, la courbe est une néphroïde de symétrie $G = 2mm$: un miroir contient les deux points de rebroussement, l'autre les deux sommets. La néphroïde est la caustique par réflexion d'un cercle, on peut l'observer à la surface d'un liquide contenu dans un bol à moitié rempli. Hypo- et épicycloïdes se rencontrent comme trajectoires d'un oscillateur harmonique chargé placé dans un champ magnétique⁽⁶⁾.

Une courbe plane considérée comme un objet tridimensionnel est achirale puisqu'elle possède un plan de symétrie. Cependant si on la considère comme un objet bidimensionnel, elle est chirale si elle ne possède pas de miroirs perpendiculaires à son plan ($G = n$) : c'est le cas des courbes $y = \exp x$ et $y = \sinh x$, ou encore de la spirale logarithmique $r = a \exp \theta$ (qui est invariante par similitude).

Cherchons maintenant à construire une courbe de symétrie $G = n$ et d'équation cartésienne implicite $f(x, y) = C$ où f est un polynôme. Pour $n = 2$, les quantités x^2 , xy et y^2 sont invariantes, d'où par exemple l'invariance des courbes d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (ellipse) et $\frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} = 1$ (superellipse ou rectangle arrondi)⁽⁷⁾ dans le groupe $G = 2mm$. Pour $n = 3$, le polynôme invariant de degré minimal est $x^3 - 3xy^2$. La courbe correspondante est une "hyperbole à trois branches" (fig.4), elle a pour équation polaire $r^3 \cos 3\theta = C$ qui met en évidence la symétrie $G = 3m$, elle admet pour asymptotes les 3 droites définies par $\cos \theta = 0$ (comparer à l'hyperbole équilatère d'équation $r^2 \cos 2\theta = C$).

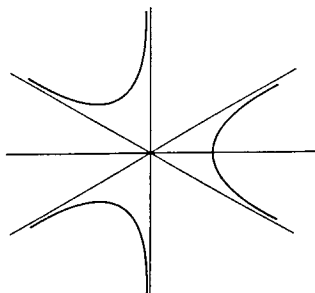


Fig.4 - Hyperbole à trois branches.

Pour $n = 4$, les polynômes invariants de degré minimal sont $x^4 + y^4$, $x^2 y^2$, $x^3 y - xy^3$. Les courbes correspondantes sont : le supercercle

ou carré arrondi, l'ensemble des deux hyperboles équilatères $xy = \pm C$, et la courbe d'équation polaire $r^4 \sin 4\theta = 4C$. Ces courbes sont achirales, de symétrie 4mm. Pour $n = 4$, il existe également des polynômes pseudo-invariants, c'est-à-dire invariants au signe près dans les opérations du groupe 4, par exemple xy et $x^4 - y^4$. Ces deux quantités ne se transformant pas de la même manière dans un miroir de trace Ox ou Oy, la courbe d'équation $x^4 - y^4 + xy = 0$ a la symétrie 4 et non 4mm : elle est chirale (fig.5). On la construit assez facilement en remarquant que ses asymptotes sont les deux bissectrices du repère.

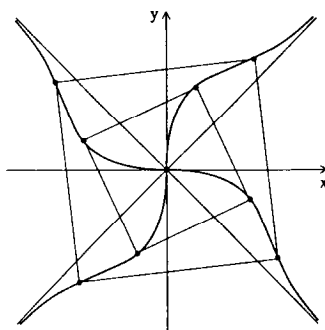


Fig.5 - Courbe d'équation $x^4 - y^4 + xy = 0$ avec cinq points d'inflexion et quatre points où la tangente est parallèle à une asymptote.

SYMETRIE PONCTUELLE DES COURBES GAUCHES ET SURFACES

Une courbe gauche est en général définie par une équation paramétrique $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ sur laquelle la symétrie ponctuelle est difficilement lisible. Ainsi la courbe de Hoppe, ou noeud de trèfle, a pour équation

$$x = a \cos t (3 \cos t + 1)$$

$$y = 5 a \cos t \sin t$$

$$z = a \sin t (25 \cos^2 t - 1)$$

sur laquelle la symétrie ternaire n'apparaît pas de manière évidente. Cette courbe est chirale.

Les quadriques, ou surfaces du second degré, ne possèdent que des éléments de symétrie binaires : $G = 2_z/m_{xy} \ 2_x/m_{yz} \ 2_y/m_{xz} = mmm$ pour

l'ellipsoïde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ et les hyperboloïdes elliptiques à une ou deux

nappes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1$; $G = 2_z m_{xz} m_{yz}$ pour les paraboloides elliptique
 et hyperbolique $z = \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2}$.

Mais on connaît des surfaces possédant des symétries ponctuelles plus riches. La selle d'âne de Hilbert $z = x^3 - 3xy^2$ a la symétrie ternaire $\bar{3}m$, elle décrit un col entre trois montagnes : sa section par un plan horizontal est une "hyperbole à trois branches". La surface de Steiner⁽⁸⁾ $x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 + xyz = 0$ a la même symétrie $\bar{4}3m$ que le tétraèdre régulier : comme la fameuse bouteille de Klein, elle est de dimension finie et ne possède qu'une face. La supersphère $x^4 + y^4 + z^4 = 1$ a la symétrie $m\bar{3}m$ du cube, elle ressemble à un dé à jouer (cube tronqué et arrondi). Le cône, le tore, l'ellipsoïde de révolution (sphéroïde) possèdent un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe ∞ et illustrent la symétrie diédrique continue ∞/mm . Le demi-cône et le paraboloides elliptique de révolution ne possèdent que la symétrie ∞m .

RELATION GROUPE - SOUS-GROUPE

L'équation polaire $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(\pm 1 + e \cos \theta)$ d'une conique est utilisée dans le problème de Képler : un des foyers ayant été sélectionné comme pôle, seule la symétrie $2mm$ est mise en évidence par l'équation ; dans le cas d'une hyperbole, une seule branche est décrite par l'équation. Si on isole une boucle d'un ovale de Cassini pour lequel $b > a$, la symétrie est réduite de $2mm$ à m .

La rosette d'équation polaire $\frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \gamma \theta)$, où γ est un réel voisin de 1, est l'orbite d'une masse soumise à un potentiel képlérien légèrement perturbé⁽⁹⁾, elle remplit une couronne circulaire, sa symétrie est ∞m et elle peut se décrire comme une ellipse qui précède lentement dans son plan. Si le paramètre γ devient égal à 1, la rosette devient une ellipse et la symétrie continue disparaît.

Considérons maintenant des augmentations de symétrie. Si le rapport p/q d'un ovale de Descartes devient égal à 1, c'est une ellipse : la symétrie est augmentée de 2 à $2mm$. Si a devient égal à b , une ellipse devient un cercle : la symétrie est augmentée de $2mm$ à ∞m ; une superellipse devient un supercercle : la symétrie est augmentée de $2mm$ à $4mm$ seulement. Soit un ellipsoïde tel que $a \neq b \neq c$, $G = mmm$: si $a = b \neq c$, $G = \infty/mm$; si $a = b = c$, $G = \infty/\infty m$.

Remarquons que la symétrie d'une courbe ou surface ne change pas nécessairement lorsqu'un paramètre adimensionnel qui la caractérise prend une valeur particulière. Si $a = b$, un ovale de Cassini devient une lemniscate de Bernoulli avec un point double à l'origine, sa symétrie ne change pas. Une hyperbole équilatère ($a = b$) n'est pas plus symétrique qu'une hyperbole quelconque, alors qu'un paraboloïde hyperbolique possède la supersymétrie $\bar{4}2m$ si $a = b$.

Nous avons considéré jusqu'ici une courbe plane comme un objet de l'espace à deux dimensions et par suite laissé de côté sa symétrie par rapport au plan qui la contient. Sa symétrie G est augmentée à celle d'un sur-groupe K si on considère la courbe comme un objet tridimensionnel. Si $G = n$, K est noté $\frac{n}{m}$. Si n est pair, $\frac{n}{m}$ est centrosymétrique ; si n est impair, $\frac{n}{m} \equiv \bar{2}n$ ne l'est pas. Si $G = nm$, la courbe est également invariante dans des rotations binaires autour des traces des n miroirs, K est centrosymétrique et noté $\frac{n}{m}$ si n est pair ; si n est impair, K est non-centrosymétrique et noté $\bar{2}n m 2$: si par exemple $G = 3m$, $K = \bar{6} m 2$.

SYMETRIE D'ESPACE

Nous envisageons maintenant les invariances des courbes (considérées dorénavant comme des objets tridimensionnels) et des surfaces dans des translations discrètes ou continues, et leur combinaisons avec les invariances ponctuelles. Ces considérations sont utilisables pour familiariser les étudiants avec les concepts de la symétrie cristalline, et introduire la distinction entre groupe ponctuel G et groupe d'espace G_e . La courbe représentant la fonction périodique $y = f(x) = f(x + a)$ est invariante dans les translations selon l'axe x . Si la fonction $f(x)$ ne possède aucune propriété particulière, une dent de scie par exemple, $G = m_{xy}$ et la courbe est un modèle de chaîne polymérique ou de cristal unidimensionnel de groupe d'espace $G_e = Pm_{xy}$: P désigne l'ensemble des translations "réticulaires". Si $y = \tan x$, $a = \pi$ et les points d'abscisses $x = n\pi$ et $(n + 1)\pi/2$ sont des centres d'inversion, $G = 2/m$ et la courbe a pour groupe d'espace $G_e = P2_z/m_{xy}$.

La cycloïde, ou courbe tautochrone et brachistochrone, est une courbe périodique engendrée par un point d'un cercle roulant sans glisser sur une droite fixe Δ parallèle à x (fig.6). Elle ne possède pas de centre d'inversion, mais des axes binaires et des miroirs perpendiculaires à l'axe x et contenant un point de rebroussement ou un sommet : $G_e = P2_y m_{xy} m_{yz}$.

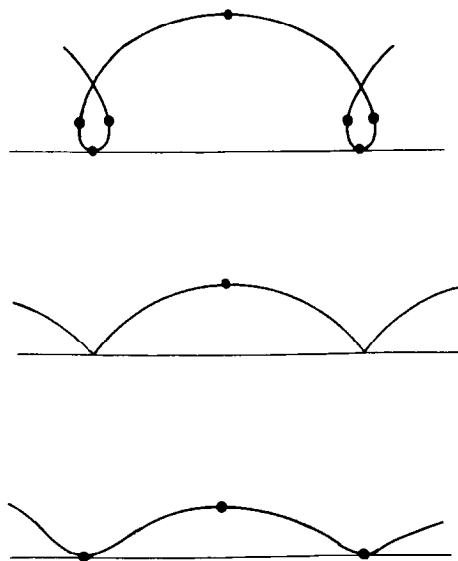


Fig.6 - De haut en bas : cycloïde raccourcie ; cycloïde ordinaire ; cycloïde allongée ou trochoïde. On a indiqué les sommets ainsi que les points où la tangente est perpendiculaire à la base.

La sinusoïde $y = \text{Sin}x$ ($a = 2\pi$) a des centres d'inversion en $x = na$ et $(n + 1/2) a$, et des miroirs perpendiculaires à l'axe x en $(2n + 1) a/4$. De plus l'axe x est un axe binaire hélicoïdal noté 2_{1x} , et le plan xz un miroir avec glissement noté g , les translations associées étant $a/2$. Le groupe d'espace tridimensionnel est $G_e = Pm_{xy}m_{yz}g$ ou de manière plus explicite $P \frac{2_z}{m_{xy}} \frac{2_{1x}}{m_{yz}} \frac{2_y}{g_{xz}}$ (le groupe ponctuel, obtenu en "oubliant" les translations, est $G = mmm$) : la sinusoïde est un modèle de cristal non-symmorphique, c'est-à-dire dont le groupe d'espace contient des axes hélicoïdaux et/ou des miroirs avec glissement.

L'hélice circulaire droite $x = R \text{Cost}$, $y = R \text{Sint}$, $z = h/2\pi t$ est périodique selon l'axe z ($a = h$) et possède une symétrie hélicoïdale continue selon cet axe : c'est un modèle unidimensionnel de cristal liquide cholestérique. Son groupe ponctuel se réduisant à l'identité, elle est droite ou gauche suivant le signe de h . On sait que c'est la trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme.

Une surface représentant une fonction doublement périodique $z = f(x, y) = f(x + a, y + b)$ peut être utilisée pour introduire la symétrie d'espace à deux dimensions. Ainsi la surface $z = \cos x \cos y$ a pour groupe d'espace $G_e = P4/mmm$. La surface de Mackay (fig.7) $\cos x +$

$\cos y + \cos z = 0$, qui est approximativement la surface de potentiel zéro dans un cristal ionique de type CsCl, a pour groupe ponctuel $G = m\bar{3}m$ et pour groupe d'espace $G_e = Pm\bar{3}m$. Un cylindre possède par définition une symétrie continue de translation suivant la direction de ses génératrices, éventuellement associée à une symétrie ponctuelle discrète (ou continue) si sa section droite en possède une. Un hélicoïde droit ou gauche illustre la symétrie hélicoïdale continue.

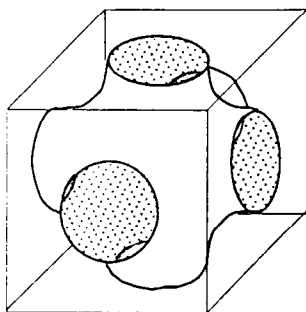


Fig.7 - Maille élémentaire de la surface de Mackay.

LE PRINCIPE DE SYMETRIE

D'après le principe de symétrie de Curie⁽¹⁰⁾, si un problème a pour groupe de symétrie G , toute solution de ce problème a pour groupe de symétrie G ou un sur-groupe de G .

Le premier cas est le plus fréquent. Considérons par exemple le point de Fermat d'un triangle : c'est le point dont la somme des distances aux sommets est minimale, il est unique. D'après le principe de Curie, si le triangle est isocèle, ce point est situé sur l'axe binaire ; si le triangle est équilatéral, ce point est le barycentre.

Soit une ellipse définie par un foyer et une directrice : ces éléments ne possèdent que la symétrie du miroir, mais l'ellipse a une symétrie supérieure car elle possède en fait un deuxième foyer équivalent au premier. Soit maintenant une ellipse de centre O , définie par ses deux foyers. Sa développée a la même symétrie $2mm$ (une développante a au contraire une symétrie inférieure). Par contre sa courbe orthoptique, lieu des points d'où on la voit sous un angle droit, est le cercle de Monge, de centre O et de rayon $R = \sqrt{a^2 + b^2}$: elle est plus symétrique que l'ellipse elle-même.

Considérons un cône circulaire droit, sa section elliptique par un plan, et les deux sphères inscrites dans le cône et tangentes à ce plan : la figure ne possède qu'un plan de symétrie. Cependant la section possède un

deuxième plan de symétrie. En effet les deux points de contact entre les sphères et le plan ne sont autres, d'après un résultat remarquable de Dandelin, que les foyers de la section elliptique : ces deux foyers jouent des rôles symétriques, contrairement aux deux sphères.

Considérons enfin une spirale logarithmique d'équation $r = a \exp k\theta$, invariante dans une similitude d'angle quelconque ϕ et de rapport $\exp k\phi$. Cette invariance d'échelle est une propriété caractéristique de la spirale. D'après le principe de Curie, la développée de la spirale possède la même invariance, c'est donc une spirale logarithmique de même pôle et de même paramètre k ; elle se déduit de la spirale initiale par une simple rotation. La caustique de la spirale par rapport au pôle possède la même propriété.

LE PRINCIPE DE SYMETRIE GENERALISE

Le principe n'est valable sous la forme élémentaire énoncée ci-dessus que si la solution du problème est unique, ou unique en son genre : une telle solution est dite totalement symétrique. Dans le cas contraire, le groupe d'une solution donnée S est un sous-groupe H de G : on dit que S est non-symétrique et brise la symétrie G . Le principe de Curie ne s'applique alors qu'à l'ensemble, appelé orbite, formé de S et des solutions géométriquement équivalentes, c'est-à-dire se déduisant de S par application des éléments de $G - H$. Citons quelques exemples.

- Soit une particule soumise au potentiel pair $U(x) = -ax^2 + bx^4$ ($a, b > 0$). La position instable $x = 0$ est unique et totalement symétrique, alors que l'état stable $x_0 = \sqrt{\frac{a}{2b}}$ brise la symétrie : seule l'orbite des deux solutions $\pm x_0$ est invariante par parité.

- Cherchons à placer le plus grand nombre possible de pièces de monnaie sur les cases d'un échiquier 3×3 avec une et une seule pièce par ligne et par colonne. La symétrie du problème est $4mm$, mais aucune des 6 solutions n'est totalement symétrique. Les deux solutions "diagonales", de symétrie $2mm$, forment une première orbite (fig.8a) ; les quatre solutions "non diagonales", de symétrie m , forment une deuxième orbite (fig.8b).

- Les films liquides déposés sur des charpentes métalliques polyédriques offrent d'autres exemples de brisures de symétrie ⁽¹¹⁾.

APPLICATION AUX COURBES PLANES

Considérons une courbe plane possédant un miroir de trace m . Soit M un point remarquable de cette courbe : foyer, sommet (point où la courbure est extrême), point d'inflexion (point où la courbure est infinie), point de rebroussement (point où la courbure est nulle), point double, point où

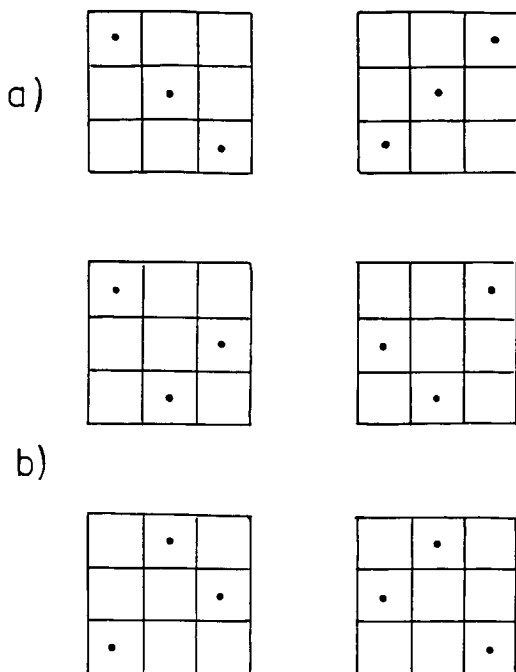


Fig.8 - Pièces de monnaie sur un échiquier : (a) orbite des solutions diagonales ; (b) orbite des solutions non diagonales.

la tangente est parallèle ou perpendiculaire à m . Appliquons le principe de Curie généralisé : ou bien M est unique en son genre et il est situé sur m , ou bien il appartient à une orbite de deux points symétriques par rapport à m . Dans le langage des cristallographes, M est en position spéciale dans le premier cas, en position générale dans le second.

Soit de même D une droite remarquable associée à la courbe : tangente en un point remarquable, asymptote, axe de symétrie, ... D est confondue avec m ou perpendiculaire à m , ou appartient à une orbite de deux droites symétriques par rapport à m . Des résultats analogues sont obtenus si la courbe possède un centre d'inversion ou un axe d'ordre n . Si la courbe est périodique selon la direction x , un point remarquable ne peut être totalement symétrique, il appartient nécessairement à une orbite périodique. Une ligne remarquable n'est totalement symétrique que si elle est parallèle à x .

Ainsi le sommet et la directrice d'une parabole, le point d'inflexion de la courbe $y = shx$ et le point double d'une lemniscate sont totalement

symétriques. Les foyers, les sommets, les directrices, les branches et les asymptotes d'une hyperbole forment des orbites. Les quatre sommets d'une ellipse, ainsi que les tangentes en ces sommets, forment deux orbites distinctes puisque l'ellipse ne possède pas d'axe d'ordre 4.

Chaque foyer et chaque boucle d'un ovale de Descartes (fig.2) est totalement symétrique (contrairement à une boucle d'un ovale de Cassini). Les deux points d'inflexion de la boucle extérieure, quand ils existent, forment une orbite. Les points où la tangente est perpendiculaire à l'axe focal forment cinq orbites distinctes.

La courbe $x^4 - y^4 + xy = 0$ (fig.5), de symétrie quaternaire, possède cinq points d'inflexion : quatre d'entre eux (en position générale) sont équivalents et forment une orbite, le cinquième est unique en son genre (c'est le centre d'inversion de la courbe), il est totalement symétrique (en position spéciale). Les deux tangentes en O, les deux asymptotes, les quatre points où la tangente est parallèle à une asymptote forment une orbite.

Les sommets, points de rebroussement et points doubles d'une hypocycloïde de symétrie d'ordre n forment des orbites. Les axes radiaux contenant les points de rebroussement et les sommets forment une même orbite si n est impair, deux orbites distinctes si n est pair. Les sommets et points de rebroussement d'une cycloïde (fig.6) forment des orbites périodiques. Si la cycloïde est raccourcie, les points où la tangente est perpendiculaire à la base forment une orbite unique ; si la cycloïde est allongée, les points d'inflexion forment une orbite unique, les sommets deux orbites distinctes. Ces cycloïdes se rencontrent comme trajectoire possible d'une particule chargée dans des champs électrique et magnétique croisés ; la trochoïde décrit le profil de la houle.

Il peut arriver qu'une orbite, ou un ensemble d'orbites, soit plus symétrique que la courbe elle-même. Ainsi l'ensemble des deux axes principaux d'une ellipse ou d'une hyperbole, ou des deux asymptotes d'une hyperbole équilatère a une symétrie d'ordre 4. Les axes binaires d'une hypocycloïde d'ordre n forment un ensemble de symétrie $2n$ si n est pair. Les centres d'inversion d'une sinusoïde et les axes binaires d'une cycloïde de période a forment un ensemble de période $a/2$: une propriété analogue est observée dans les cristaux.

APPLICATION AUX SURFACES

Soit une surface possédant un plan de symétrie m . Soit M un point remarquable de la surface : ou bien il est unique en son genre et situé sur m , ou bien il appartient à une orbite de deux points symétriques par rapport à m . Soit de même une droite remarquable associée à cette surface : ou bien elle est unique en son genre et contenue dans m ou perpendiculaire à m , ou bien elle appartient à une orbite de deux droites symétriques par rapport à m .

Chaque axe principal d'un ellipsoïde est totalement symétrique. Si l'ellipsoïde est de révolution, les axes binaires forment une orbite d'ordre infini. Les diamètres d'une sphère forment une orbite. Les points d'un tore où le plan tangent est parallèle à l'axe de révolution forment deux orbites, ce sont les cercles équatoriaux ; les points où le plan tangent est perpendiculaire à l'axe de révolution forment une orbite constituée de deux cercles symétriques par rapport au plan équatorial.

Rappelons brièvement les propriétés de courbure des surfaces⁽¹²⁾. Soient R_1 and R_2 les rayons principaux de courbure en un point M de la surface. Si le produit $R_1.R_2$ est positif, M est un point elliptique, caractérisé par deux directions principales de courbure, perpendiculaires entre elles. Si $R_1 = R_2$, M est un ombilic. Si $R_1.R_2$ est négatif, M est un point hyperbolique ou point selle, caractérisé par deux directions asymptotiques, et deux directions principales qui en sont les bissectrices. Si $R_1 = -R_2$, M est un point selle symétrique. Si R_1 ou R_2 est infini, M est un point parabolique. En chaque point M d'une ligne principale (asymptotique), la tangente est parallèle à la direction principale (asymptotique) de la surface en M .

Appliquons le principe de symétrie. Soit M un point quelconque d'une surface situé dans un plan de symétrie m : une direction principale est soit contenue dans m , soit perpendiculaire à m , puisque les deux directions ne sont pas équivalentes ; si le point est hyperbolique, les deux directions asymptotiques sont équivalentes et forment une orbite, elles sont symétriques par rapport à m . La section de la surface par m est donc une ligne principale. Si la surface est de révolution, les lignes principales sont les sections méridiennes et les cercles parallèles (fig.9).

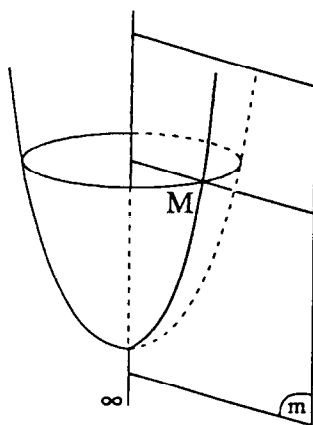


Fig.9 - Lignes principales d'une surface de révolution.

Chaque point d'une sphère est un ombilic, l'orbite correspondante est la surface de la sphère elle-même. Pour un ellipsoïde de symétrie mmm tel que $a > b > c$, on s'attend à trouver un ombilic soit en position générale, soit dans un plan de symétrie (mais pas sur un axe de symétrie, puisque les sommets ne sont pas des ombilics). S'il existe des ombilics, ils forment donc des orbites de 4 ou 8 éléments. Des calculs analytiques montrent qu'il en existe quatre, situés dans le plan a-c (fig.10), de coordonnées :

$$x = \pm a \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2 - c^2}}, \quad z = \pm c \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{a^2 - c^2}}$$

Si $c = 0$, l'ellipsoïde se réduit à une ellipse et les ombilics deviennent les foyers de cette ellipse. L'hyperboloïde elliptique à deux nappes a lui aussi quatre ombilics formant une orbite dans un plan de symétrie. Le parabolôïde elliptique de symétrie 2mm a une orbite de deux ombilics, l'hyperboloïde elliptique à une nappe et le parabolôïde hyperbolique n'ont pas d'ombilics puisque ce sont des surfaces réglées, dont tous les points sont paraboliques.

Une surface de révolution peut avoir zéro ombilic (tore), un seul ombilic situé sur l'axe de symétrie (sommet d'un parabolôïde elliptique), une orbite d'ombilics sur l'axe de symétrie (sommets d'un ellipsoïde) ou des cercles parallèles d'ombilics.

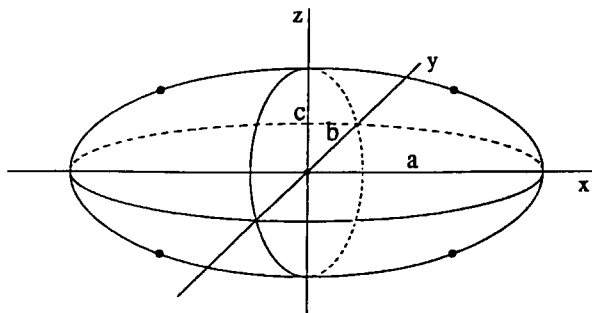


Fig.10 - Ombilics d'un ellipsoïde.

BRISURES SPONTANÉES DE SYMÉTRIE

Il arrive souvent qu'un système physique de symétrie G et dépendant d'un paramètre scalaire pouvant varier continument subisse un abaissement brutal de sa symétrie G à celle d'un sous-groupe H quand le paramètre franchit une valeur critique. Le système possède alors deux ou plusieurs configurations équivalentes dans les opérations de $G - H$, appelées domaines ou variants. Les courbes usuelles présentent des phénomènes analogues.

Si le rapport ω'/ω est irrationnel, la courbe de Lissajous $x = A \cos \omega t$, $y = B \cos(\omega't + \phi)$ est ouverte, elle remplit le rectangle $2A \times 2B$ et possède la symétrie $2mm$. Si ω'/ω devient rationnel, la courbe se ferme sur elle-même et ne possède pas de symétrie particulière si ϕ est quelconque ; si ϕ est un multiple de $\pi/4$ ⁽¹³⁾, la courbe ne possède qu'un centre ou un plan de symétrie.

Considérons également une hypocycloïde dont le rapport R_1/R_2 est irrationnel, elle remplit entièrement la région comprise entre les cercles de centre O et de rayons R_1 et $R_1 - 2 R_2$: sa symétrie est ∞/mm . Si R_1/R_2 devient égal à un rationnel irréductible p/q , la symétrie s'abaisse brusquement : il existe une infinité de domaines, ce sont toutes les hypocycloïdes étoilées p/q se déduisant de l'une d'elles par rotation ; on sélectionne un domaine en se donnant un point de la courbe.

CONCLUSION

Courbes et surfaces sont des outils pédagogiques intéressants et attrayants permettant d'illustrer les concepts de base de la symétrie. Cette approche a l'intérêt d'établir un lien utile entre les cours de mathématiques et ceux de physique, de familiariser les étudiants avec certaines courbes et surfaces qui interviennent souvent en physique, en particulier en mécanique et en optique, de les inciter à en percevoir autant les propriétés géométriques que les propriétés analytiques, et de leur montrer que le principe de symétrie s'applique aux objets mathématiques comme aux objets physiques. Les courbes périodiques telles que la cycloïde et la sinusoïde, qui possèdent à la fois des invariances rotationnelles et translationnelles, sont particulièrement utiles pour introduire la symétrie cristalline.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- (1) Voir en particulier J. TAILLE, *Courbes et surfaces*, Collection Que Sais-je ? n°564, Presses Universitaires de France (1953).
- (2) M. J. BUERGER, *Elementary Cristallography*, John Wiley, New-York (1956).
- (3) J. SIVARDIERE, *European J. of Physics* 15, 62-64 (1994).
- (4) M. H. SUSSMAN, *American J. of Physics* 34, 416-418 (1966).
- (5) J. SIVARDIERE, Congrès de la SFP, article DA4, Caen (1991).
- (6) E. R. HARRISON, *American J. of Physics* 27, 315-317 (1959).
- (7) M. GARDNER, *Scientific American* 213, 222 (septembre 1965).
- (8) I. STEWART, *Pour la Science* 140, 90 (juin 1989).
- (9) J. SIVARDIERE, *European J. of Physics* 7, 283-286 (1986).
- (10) Voir R. SHAW, *American J. of Physics* 33, 300-301 (1965) et J. SIVARDIERE, BUP n°689, 1579 (décembre 1986).
- (11) A. B. PIPPARD, *European J. of Physics* 1, 13 (1980) et D. R. LOVETT et J. TILLEY, *European J. of Physics* 11, 208 (1990).
- (12) Voir M. SPIVAK, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol.3, Publish or Perish editions, Boston (1975) et J. SIVARDIERE, BUP n°744, 771 (mai 1992).
- (13) M. ALONSO M. et E. J. FINN, *Physique générale*, vol. 1, InterEditions, Paris (1986).