

Généralisation de la méthode de calcul de l'énergie d'un satellite : cas hyperbolique et parabolique

par Alioune Ouedraogo
FAST Université de Ouagadougou - B.P. 7021
et Guy Chanussot
LPS - B.P. 138 - Université de Bourgogne - 21004 Dijon

Ce travail est une généralisation du calcul de l'énergie d'un satellite sur orbite elliptique [1]. Il établit l'expression de cette énergie pour des trajectoires hyperboliques et le cas limite des trajectoires paraboliques.

INTRODUCTION

A partir de la loi de gravitation de Newton [2], on établit que les planètes décrivent des orbites elliptiques autour du Soleil, qui en est l'un des foyers (pôle). Généralement, un objet soumis à un champ de force centrale en $1/r^2$ peut avoir une trajectoire elliptique, hyperbolique ou parabolique (r étant la distance au pôle). Dans les trois cas, l'énergie totale E est une constante du mouvement ; elle est négative pour une trajectoire elliptique, positive pour une trajectoire hyperbolique et nulle pour une trajectoire parabolique. Le calcul de E ayant été appliqué au premier cas (trajectoire elliptique) [1], nous l'avons généralisé aux deux autres coniques, c'est-à-dire, l'hyperbole et la parabole.

Si pour l'ellipse nous avons utilisé le Théorème de l'Énergie Cinétique entre les points A et B de la courbe, situés sur le grand axe, ceci n'est plus possible pour une hyperbole, dans la mesure où le satellite ne parcourt que la branche qui entoure le pôle O_1 , représentant pratiquement le centre de la terre.

RAPPELS

Cas de l'ellipse [1]

On désigne respectivement par A et B, l'apogée et le périégée de l'orbite elliptique d'un satellite S soumis uniquement à une force d'attraction newtonienne due à la terre, de module :

$$F = \frac{GMm}{r^2} \quad (1)$$

G : C^{ste} de gravitation,

M : Masse de la terre,

m : Masse du satellite.

On note dans la suite le pôle O_1 , pratiquement le centre de la terre ; $\vec{F}$ qui comprend l'ensemble des forces appliquées s'identifie au poids du satellite S. L'application du Principe fondamental de la Dynamique et du Théorème de l'Énergie cinétique entre les points A et B, où les supports des vecteurs de Frénet coïncident avec ceux des vecteurs de la base locale, conduit à l'expression donnant le rayon de courbure ρ_A en fonction des longueurs $r_A = O_1A$ et $r_B = O_1B$.

$$\frac{2}{\rho_A} = \frac{2}{\rho_B} = \frac{1}{r_B} + \frac{1}{r_A} \quad (2)$$

On en déduit alors que :

$$E = -\frac{GMm}{2a} < 0 \quad (3)$$

avec $2a = AB$, grand axe de l'ellipse.

MÉTHODE

Le calcul décrit ci-dessus dans le cas d'une orbite elliptique s'applique bien au cas limite parabolique. Mais pour une trajectoire hyperbolique, le satellite S ne décrivant que la branche entourant le foyer O_1 , on ne peut plus utiliser le Théorème de l'Énergie Cinétique entre les deux points du grand axe de l'hyperbole. Nous proposons une démonstration de la relation (2) à l'aide de la formule bien connue de la courbure [3] :

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\left| \frac{\vec{r}}{r} \wedge \frac{\ddot{\vec{r}}}{r} \right|}{\left| \frac{\vec{r}}{r} \right|^3} \quad \text{où} \quad \frac{\dot{\vec{r}}}{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad \text{et} \quad \frac{\ddot{\vec{r}}}{r} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

1 - Cas de l'ellipse

En polaires, l'équation d'une conique faisant intervenir le paramètre p et l'excentricité e est :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad (4)$$

Aux points A et B qui sont des extrémums, on note que $\dot{r} = 0$; d'où la relation :

$$\frac{1}{\rho} = - \frac{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2}{(\dot{r\theta})^2}$$

De (4), on tire facilement les expressions de $\ddot{r}$ et $\ddot{r\theta}$ à l'apogée A et au périhélie B de la trajectoire :

$$\ddot{r}_A = \frac{pe\dot{\theta}^2}{(1+e)^2} \quad \text{et} \quad \ddot{r\theta}_B = \frac{pe\dot{\theta}^2}{(1+e)^2}$$

Comme $r_A = \frac{p}{1-e}$ et $r_B = \frac{p}{1+e}$ il vient que :

$$\frac{1}{\rho_A} = \frac{e}{p} + \frac{1}{r_A} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\rho_B} = -\frac{e}{p} + \frac{1}{r_B}$$

et on en déduit que $\rho_A = \rho_B = p$ ainsi que l'expression (2) :

$$\frac{2}{\rho_A} = \frac{2}{\rho_B} = \frac{1}{r_A} + \frac{1}{r_B}$$

L'énergie du satellite qui est constante, se calcule sans difficulté au périhélie B, en utilisant le Principe fondamental de la Dynamique appliqué à Sainsi que la relation ci-dessus(2), sachant que $r_A + r_B = 2a$ grand axe de l'ellipse.

$$E = - \frac{GMm}{2a} < 0$$

2 - Cas de la parabole

La solution est immédiate si l'on fait tendre r_A vers l'infini. L'apogée de la trajectoire est rejeté à l'infini. On en déduit que l'énergie E est nulle :

$$r_A + r_B = 2a \rightarrow \infty \quad E \rightarrow 0$$

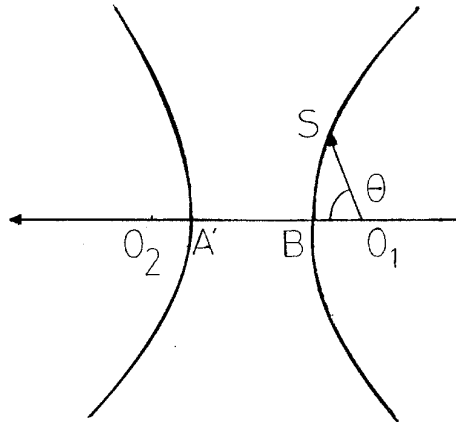
et le rayon de courbure en B vaut : $\rho_B = 2r_B$

A l'infini, l'énergie potentielle est nulle ; l'énergie mécanique totale E se conservant, ceci implique que l'énergie cinétique est nulle. En conséquence, la vitesse de S est nulle à l'infini ; ce qui n'est pas vrai pour l'hyperbole.

3 - Cas de l'hyperbole

Pour une force de gravitation attractive, le satellite va décrire la branche de l'hyperbole entourant le foyer O_1 (figure ci-dessous). Considérons le point A' sur l'axe principal O_1O_2 de la conique (axe des foyers) à la place de l'apogée A défini pour le cas de l'ellipse et posons alors :

$$r_{A'} = -r_A \quad (4)$$



L'équation des coniques faisant intervenir le paramètre p et l'excentricité e , donne :

$$r_A = \frac{p}{1-e} = -r_{A'} \text{ (avec } r_{A'} > 0 \text{) pour } \theta = \pi,$$

et :

$$r_B = \frac{p}{1+e} \text{ pour } \theta = 0$$

Le point A' est donc situé sur la branche répulsive de l'hyperbole, tel que :

$$r_{A'} > r_B.$$

Les rayons de courbure en A' et B sont égaux et vérifient la formule :

$$\frac{2}{\rho_{A'}} = \frac{2}{\rho_B} = \frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_{A'}} \quad (5)$$

On vient à poser : $r_B + r_A = r_B - r_{A'} = -A'B = -2a$.

L'énergie du satellite s'exprime alors par :

$$E = + \frac{GMm}{2a} > 0 \quad (6)$$

CONCLUSION

La méthode proposée dans [1] pour le calcul de l'énergie E d'un satellite sur orbite elliptique a été généralisée aux autres coniques, que sont la parabole et l'hyperbole. Lorsqu'on passe de l'ellipse à une trajectoire hyperbolique, l'apogée est remplacé par le point A' d'intersection de la seconde branche de l'hyperbole avec l'axe principal. Le cas du mouvement parabolique est immédiat.

La relation donnant les rayons de courbure aux extrémums pour l'ellipse, s'applique au signe près aux cas des deux autres types de trajectoires.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. OUEDRAOGO - Une méthode de calcul de l'énergie d'un satellite sur orbite elliptique, B.U.P. n° 751, 195-200, 1993.
- [2] MURRAY R. SPIEGEL - Théorie et applications de la Mécanique Générale, Série Schaum, Ediscience, S.A. Paris
et M. LE BELLAC - Introduction à la Mécanique, Dia Université.
- [3] J. FAGET et J. MAZZASCHI - Travaux dirigés de Physique. Vuibert.