88e Année - Nº 762 Publication Mensuelle Mars 1994

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

La théorie de la relativité générale*

par H. ANDRILLAT
Professeur à l'Université de Montpellier II - 34095 Montpellier

DEUXIÈME PARTIE
LA MÉTHODE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Application à l'étude des trois types de décalages spectraux

LE FORMALISME TENSORIEL DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

Un système tensoriel est un système de fonctions des coordonnées qui se transforment par covariance** ou par contrevariance dans tout changement du système de coordonnées. Il nous suffira de savoir que les transformations covariantes ou contrevariantes sont des formes **linéaire**s pour comprendre que si les composantes d'un système tensoriel sont nulles dans un système de coordonnées, elles le sont dans tout autre système de coordonnées.

---

* La première partie de cet article (les fondements de la relativité générale) a été publiée dans le nº 760 (janvier 1994).

** Dans un changement de variables (des x en x'), par **covariance**, la fonction f_k se transforme en f'_i telle que $f'_i = (\partial x^k / \partial x'^i) \cdot f_k$ avec sommation sur k (voir ci-dessous la règle de sommation).
Par **contrevariance**, ce serait : $f'^i = (\partial x'^i / \partial x^k) \cdot f^k$.

Dans un espace à n dimensions (n coordonnées), un système tensoriel covariant du premier ordre est noté par exemple :

$$A_k$$

où l'indice k, placé conventionnellement en position inférieure pour le cas de la covariance, peut prendre les valeurs de l à n. A_k est donc un système de n fonctions des coordonnées.

On convient de même de placer en position supérieure l'indice afférent à la contrevariance ; par exemple, le système :

$$A_k^{ij}$$

est un système tensoriel du troisième ordre (système de n^3 fonctions des coordonnées) contrevariant en i et j mais covariant en k, ce qui signifie que, dans un changement de coordonnées, sa composante A_2^{57} par exemple, se transforme par covariance par rapport à la coordonnée x^2 et par contrevariance par rapport aux coordonnées x^5 et x^7. Un tel système est dit mixte.

Un tenseur se présente comme un être mathématique composé de systèmes tensoriels covariants, contrevariants et mixtes.

L'équation tensorielle :

$$A = 0$$

signifie que toutes les composantes du tenseur A sont nulles. Alors, si l'on peut démontrer qu'elles le sont effectivement dans un certain système de coordonnées bien adapté à la démonstration, on est assuré qu'elles le sont dans tout autre système. C'est là toute l'extraordinaire puissance du calcul tensoriel.

Le principe de relativité générale pose que **tous** les systèmes de référence sont équivalents pour décrire les lois de la physique. Ces dernières doivent donc rester invariantes dans tout changement de systèmes de coordonnées. Le **formalisme tensoriel** est donc bien adapté à leur expression. Une loi physique exprimée sous la forme d'une équation tensorielle :

$$A = 0$$

gardera la même forme dans tout changement de coordonnées.

Nous indiquons sans démonstration les résultats suivants :

– La métrique la plus générale d'un espace métrique à n dimensions s'écrit :

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k \qquad (1)$$

avec la convention de la règle de sommation (sommation de tous les termes correspondant aux différentes valeurs de 1 à n des indices i et k répétés deux fois dans le monôme du second membre et appelés indices muets).
Ainsi (1) est écrit pour :

$$ds^2 = g_{11}\, dx^1\, dx^1 + g_{12}\, dx^1\, dx^2 + \dots + g_{nn}\, dx^n\, dx^n$$

Le système tensoriel g_{ik} covariant du second ordre fait partie du **tenseur de métrique**, G, avec ses autres composantes contrevariantes g^{ik} et mixtes g^i_k.

Les différentielles des variables dx^i ou dx^k sont des systèmes contrevariants du premier ordre ; leur produit, un système contrevariant du second ordre qui, multiplié par le système covariant du second ordre g_{ik}, donne l'**invariant** ds^2.

Exemple : la métrique de Minkowski, en coordonnées cartésiennes :

$$ds^2 = -\,dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\, dt^2$$

ou, en coordonnées sphériques :

$$ds^2 = -\,dr^2 - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + c^2\, dt^2$$

– Les équations tensorielles des géodésiques de l'espace dont la métrique est (1) sont :

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} + \left(\begin{matrix} j \\ i\,k \end{matrix}\right) \frac{dx^i}{ds}\, \frac{dx^k}{ds} = 0 \qquad (2)$$

avec sommation sur i et k.

Ce sont n équations différentielles du second ordre correspondant aux n valeurs de 1 à n de l'indice j. Le symbole $\left(\begin{matrix} j \\ i\,k \end{matrix}\right)$, appelé symbole de Christoffel est une forme linéaire des dérivées premières de g_{ik} par rapport aux coordonnées.

Exemple : géodésiques de l'espace-temps de Minkowski, espace-temps euclidien de la relativité restreinte : les g_{ik} de la forme cartésienne sont des constantes ; les symboles de Christoffel sont donc nuls ; les équations (2) se réduisent à :

$$\frac{d^2 x^j}{ds^2} = 0 \qquad \text{avec } j = 1, 2, 3, 4 \text{ (4-espace).}$$

Ce sont les équations des droites du 4-espace :

$$x^j = as + b \qquad \text{(a et b des constantes).}$$

Le caractère tensoriel de ces équations nous assure que nous aurions trouvé le même résultat à partir de l'expression de la métrique dans n'importe quel autre système de coordonnées, par exemple à partir de la forme en coordonnées sphériques, mais avec des calculs beaucoup plus compliqués faisant intervenir le calcul des symboles de Christoffel.

L'ESPACE-TEMPS ET LA GÉOMÉTRISATION DU MOUVEMENT

Une courbe de l'espace s'obtient en faisant dépendre toutes les coordonnées d'un même paramètre ou n – l d'entre elles de la $n^{ème}$. Une courbe de l'espace-temps x, y, z, t a donc pour équations des équations de la forme :

$$x = x(t) \qquad y = y(t) \qquad z = z(t)$$

qui sont aussi les équations de mouvement du point P de coordonnées x, y, z dans le 3-espace physique par rapport au temps t.

Il y a donc bijection entre l'ensemble des courbes du 4-espace (espace-temps) et l'ensemble des mouvements du point dans le 3-espace. La courbe du 4-espace est appelée ligne d'univers du point P. C'est la **géométrisation du mouvement**.

Les **géodésiques** de l'**espace-temps** constituent donc un sous-ensemble de l'ensemble de ses courbes et correspondent dans le 3-espace physique à une famille particulière de mouvements, les mouvements des **particules libres**, d'après la loi des géodésiques posée par Einstein. L'exemple ci-dessus de l'espace-temps de Minkowski est bien cohérent avec cette loi : les géodésiques sont alors des droites du 4-espace qui correspondent aux mouvements rectilignes uniformes dans le 3-espace ;

ce sont bien les mouvements des particules libres dans l'espace euclidien, d'après le principe de Galilée.

L'existence de courbes de longueur nulle (ds = 0) dans l'espace est assurée par la «signature» (arbitraire) de la métrique – – – +. De telles courbes sont évidemment de longueur minimale ; ce sont des géodésiques particulières de l'espace-temps que l'on appelle des géodésiques nulles. Comme ds = 0 implique, dans l'espace-temps de Minkowski, v = c (voir première partie, B.U.P. n° 760, janvier 1994), on conviendra que, dans tout espace-temps d'une théorie physique, les **géodésiques nulles** correspondront aux mouvements de ces particules libres particulières que sont les **photons**. C'est ainsi qu'on imposera toujours a priori aux métriques de la relativité générale d'avoir une signature – – – + pour assurer l'existence des géodésiques nulles du 4-espace (espace-temps).

La géométrisation du mouvement constitue une puissante méthode de représentation des phénomènes physiques : une fois établie la métrique de l'**espace-temps**, on sait toujours écrire les équations de ses géodésiques (2) qui sont les équations de mouvement des systèmes physiques libres (domaine de la mécanique) et l'équation ds = 0 des géodésiques nulles est l'équation du mouvement général des photons (domaine de l'optique).

LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN

Pour établir les métriques d'espace-temps, Einstein a formulé les célèbres «équations du champ» (de gravitation) qui portent désormais son nom. Ce sont des équations tensorielles qui s'écrivent, à l'aide des composantes covariantes des tenseurs :

$$\frac{1}{2}\, g_{ik}\, R - R_{ik} - \Lambda\, g_{ik} = \frac{8\,\pi\, G}{c^4}\, T_{ik} \qquad (3)$$

– G est la constante de gravitation ;

– c est la vitesse de la lumière dans le vide ;

– les g_{ik} sont les composantes covariantes du tenseur de la métrique à déterminer ;

– les R_{ik} et R sont les composantes respectives du tenseur de Ricci (tenseur de courbure de l'espace du second ordre) et de l'invariant de courbure (tenseur de courbure d'ordre 0). Ces tenseurs sont tous déduits du tenseur général de courbure de l'espace (tenseur de Riemann du quatrième ordre).

Les tenseurs de courbure ne dépendent, dans un espace donné par sa métrique (1), que des g_{ik} de la métrique, et de leurs dérivées premières et secondes par rapport aux coordonnées.

– Le terme $\Lambda\, g_{ik}$ a été introduit ultérieurement par le mathématicien E. Cartan pour assurer à ces équations toute la généralité possible. La constante Λ était a priori une constante arbitraire qui fut appelée ultérieurement la **constante cosmologique** à la suite des applications de la relativité générale à la cosmologie. Les développements les plus récents de cette science semblent devoir l'interpréter désormais comme liée à la densité du vide quantique.

– Le tenseur T_{ik} est le tenseur impulsion-énergie du milieu physique qui emplit l'espace. Il dépend de la pression p et de la densité ρ de ce milieu. Il est nul dans le vide de l'Univers actuel.

Einstein fut conduit à la forme de ces équations par une double considération : d'abord, l'idée d'introduire en physique la notion essentielle de **courbure de l'espace** (l'espace mathématique le plus général est courbe), ensuite la conviction d'une cause physique à cette courbure, suivant en cela un principe général posé par son ami, le mathématicien et physicien autrichien Mach :

La géométrie de l'espace est déterminée par son contenu matériel.

Tel est bien le sens des équations (3) : la géométrie de l'espace (sa métrique) déterminée par le tenseur du premier membre à l'aide des tenseurs de courbure, **en fonction** du tenseur impulsion-énergie du second membre qui caractérise le milieu physique contenu dans l'espace.

La cohérence mathématique est assurée par le fait que le tenseur du premier membre comme le tenseur impulsion-énergie du second membre de (3) sont du second ordre, symétriques (par exemple $T_{ik} = T_{ki}$) et à divergence tensorielle nulle*. On démontre que le tenseur géométrique du premier membre est à divergence nulle. Le tenseur

---

* La divergence est la somme des dérivées partielles : $\Delta_i\, T_{ik} = 0$. Δ_i est le symbole de dérivée tensorielle par rapport à x_i.
Il y a sommation sur i. Restent quatre équations (k = 1, 2, 3, 4).

impulsion-énergie est construit de telle manière que ses quatre conditions de divergence nulle expriment, en mécanique des milieux continus, les deux lois de conservation de l'impulsion et de l'énergie (trois équations pour l'impulsion qui est un vecteur et une équation pour l'énergie qui est un scalaire).

Le coefficient numérique de liaison $8 \pi G/c^4$ a été choisi pour permettre de retrouver l'équation de Poisson de la théorie newtonienne comme cas particulier des équations (3) d'Einstein.

Théoriquement, les équations d'Einstein permettent de déterminer la métrique de l'espace-temps sur la donnée des valeurs des trois constantes qui y figurent : Λ, p, ρ. Ce sont en effet seize équations (n = 4 pour un espace-temps) aux dérivées partielles pour déterminer les seize fonctions g_{ik} de la métrique. On rappelle que R et R_{ik} contiennent les dérivées premières et secondes des g_{ik} par rapport aux coordonnées.

En fait, la symétrie des tenseurs réduit à dix le nombre d'équations distinctes et les quatre conditions de divergence nulle les ramènent à six équations indépendantes. De leur côté, par symétrie, dix seulement des g_{ik} sont distincts et, dans un 4-espace, on peut choisir en chaque point arbitrairement les valeurs de quatre d'entre eux, ce qui réduit à six également le nombre des fonctions g_{ik} à déterminer.

Malgré ces simplifications, la solution générale des équations d'Einstein n'est pas encore trouvée. On tourne la difficulté en adoptant l'hypothèse hautement vraisemblable de la **symétrie sphérique de l'espace**. Alors, a priori, la métrique, écrite en coordonnées sphériques évidemment, a la forme générale suivante :

$$ds^2 = -e^{\lambda} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2 \theta \, d\varphi^2 + e^{\upsilon} c^2 dt^2 \qquad (4)$$

où λ et υ sont des fonctions de r et de t seulement (de r seulement si l'on suppose l'espace statique). Ces fonctions inconnues qui constituent les termes en g_{11} et g_{44} de la métrique sont introduites par la fonction exponentielle toujours positive, pour respecter la signature – – – + de la métrique. Les équations d'Einstein se réduisent alors à deux **équations différentielles** distinctes permettant de déterminer les deux fonctions inconnues λ et υ. On sait alors les résoudre dans tous les cas utiles.

LA MÉTHODE DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE

1) Elle consiste, pour chaque problème à résoudre, à choisir d'abord les valeurs des trois constantes figurant dans les équations d'Einstein (3). Par exemple, le problème du mouvement des planètes, considérées comme des particules d'épreuve dans un espace **vide** autour du soleil, pourra se résoudre en prenant $\Lambda = 0$ et $T_{ik} = 0$. Alors qu'en cosmologie, pour déterminer le modèle d'univers, on prendra a priori une valeur Λ de la constante cosmologique et on considérera l'espace universel comme empli d'un véritable gaz de galaxies de densité ρ et de pression $p = 0$ (collisions rarissimes des galaxies).

2) On résoudra les équations d'Einstein ainsi obtenues sous l'hypothèse de la symétrie sphérique de l'espace, en utilisant a priori la forme (4) de la métrique.

3) On écrira et on résoudra les équations de géodésiques (2) et des géodésiques nulles ds = 0 qui décriront alors le mouvement des systèmes matériels et des photons dans l'espace considéré.

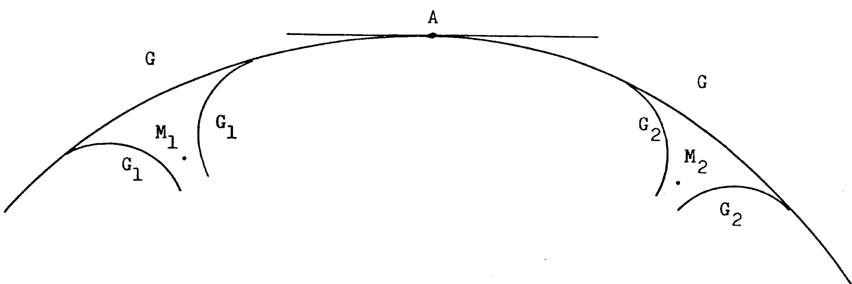

Figure 1 : Schéma montrant le raccordement des principales métriques utilisées en relativité générale.
La géométrie de l'espace universel «enveloppe» les géométries locales gravitationnelles.
La métrique de Roberston-Walker décrit la géométrie générale G. Celle de Schwarzschild décrit les géométries G_1, G_2, ... autour des masses M_1, M_2, ...
En A, sur leur partie asymptotiquement plate, loin des masses importantes, l'espace euclidien tangent de la relativité restreinte, décrit par la métrique de Minkowski, représente correctement la physique locale.
C'est dans un tel espace que l'observateur mesure le temps.

On pourrait être surpris par la diversité des métriques ainsi obtenues et étudiées, chacune relative à un problème particulier. C'est en fait une question d'échelle : l'espace est fortement courbé au voisinage immédiat d'une grande masse mais cette courbure s'atténue à distance et lorsqu'on s'éloigne de la masse l'espace devient asymptotiquement plat. Ainsi, loin de tout champ de gravitation intense, la métrique sans courbure de la relativité restreinte (métrique de Minkowski) décrira localement les phénomènes physiques de façon parfaite, cependant que les phénomènes gravitationnels causés par une masse importante devront être décrits par la métrique de Schwarzschild qui représente un espace-temps courbe, à très forte courbure près de la masse. Mais à l'échelle cosmique, la courbure générale de l'espace universel est en fait «l'enveloppe» de toutes ces courbures locales dues aux masses qu'elle n'a pas à prendre en compte individuellement. Le raccordement des principaux types de métriques rencontrées est symbolisé dans la figure 1.

TROIS EXEMPLES D'APPLICATION DE LA RELATIVITÉ GÉNÉRALE : LES TROIS TYPES DE DÉCALAGES SPECTRAUX

1 - L'effet Doppler-Fizeau : décalage spectral dû à un effet de vitesse de la source lumineuse

La question peut être traitée dans le cadre de la relativité restreinte, vue comme un cas particulier de la relativité générale. La métrique de Minkowski est en effet solution des équations d'Einstein (3) sous les conditions $\Lambda = 0$ et $T_{ik} = 0$.

La première de ces conditions a longtemps revêtu un caractère arbitraire (raison de simplicité). On pense aujourd'hui que la constante cosmologique représente la densité du vide quantique ; **nulle** dans l'univers actuel, elle aurait eu une très grande valeur dans les premiers instants du Big Bang, au moment de la rupture de la symétrie de la grande unification, à cause de la densité des bosons de Higgs qui participent au mécanisme de la rupture spontanée de cette symétrie.

La seconde condition est celle d'un espace vide ($p = 0$, $\rho = 0$). Comme indiqué précédemment, l'éloignement de tout champ gravitationnel important est équivalent au vide pour le mouvement des particules d'épreuve.

Ces conditions étant posées, la métrique de Minkowski est évidemment solution des équations (3), puisque les tenseurs de courbure relatifs à cet espace-temps plat sont nuls.

Considérons alors, dans l'espace-temps de la relativité restreinte décr par le métrique de Minkowski, le mouvement d'un système physique quelconque par rapport à l'observateur supposé situé au centre du système de coordonnées. L'intervalle d'espace-temps, ds, décrit par un point du système physique pendant la durée dt mesurée dans l'échelle de temps de l'observateur est donné par l'équation de métrique :

$$ds^2 = -\,dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2\,dt^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (5)$$

en coordonnées cartésiennes, ou :

$$ds^2 = -\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 - r^2\sin^2\theta\,d\varphi^2 + c^2\,dt^2 = c^2\,dt^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (6)$$

en coordonnées sphériques ; v est le module de la vitesse du système physique par rapport à l'observateur.

Pour un observateur **comobile** avec le système (v = 0), on a, en prenant positivement les intervalles :

$$\frac{ds}{c} = dt \qquad (7)$$

La quantité ds/c est appelée la **durée propre** du phénomène observé ; c'est sa durée mesurée dans l'échelle de temps d'un observateur immobile par rapport au système physique où le phénomène se produit. On dit alors que l'observateur est **comobile** avec le système en question, ce qui signifie qu'il a **même** mouvement que ce système physique par rapport à n'importe quel référentiel. Comme l'intervalle ds, la durée propre est un invariant dans tout changement de coordonnées.

Par contre, si l'observateur est en mouvement par rapport au phénomène, la durée propre de celui-ci n'est plus égale à celle mesurée dans l'échelle de temps de l'observateur. C'est le phénomène bien connu désormais de la **relativité du temps** mais qui continue à nous déconcerter, parce qu'il heurte nos concepts les plus intuitifs d'un temps absolu. On peut, faute de le concevoir, l'imaginer comme une perspective du temps de l'autre. De (5) ou de (6), il vient :

$$ds/c = dt\,\sqrt{1 - v^2/c^2} \qquad (8)$$

soit : $dt > ds/c$

La perspective du temps nous fait estimer plus longue qu'elle n'est la durée de tout phénomène relatif à un système physique en mouvement par rapport à nous. L'effet est réciproque : chacun voit s'alonger les durées de l'autre par rapport à leurs valeurs propres.

A côté de la durée propre d'un phénomène et de sa durée (en général différente) dans l'échelle de temps de l'observateur, il y a aussi la **durée de son observation** qui s'effectue en général à distance et donc avec un certain retard dû au temps mis par la lumière pour en apporter l'information à l'observateur. Cette dernière durée sera encore différente des deux autres, parce qu'entre le début du phénomène et sa fin, la distance que doivent parcourir les photons n'est pas la même, à cause du mouvement du système physique où a lieu le phénomène par rapport à l'observateur.

On pourrait appeler ce dernier effet le **retard différentiel à l'information**.

Analysons l'observation d'un phénomène à la lumière de ces différents effets : l'observateur est supposé situé au centre du système des coordonnées sphériques, r, θ, φ, et soit S le système physique, siège du phénomène observé et animé de la vitesse $\vec{v}$ par rapport à l'observateur (figure 2).

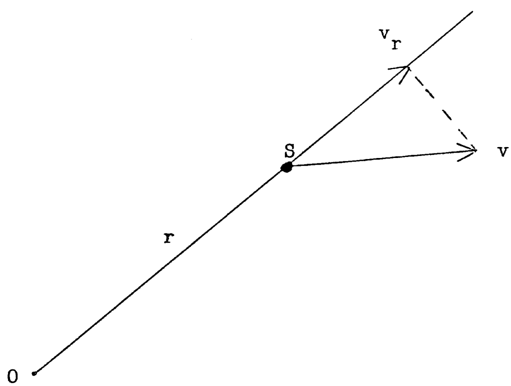

Figure 2 : **L'effet Doppler-Fizeau**.
Il est dû à la vitesse $\vec{v}$ de la source S par rapport à l'observateur 0
Il dépend du module v de cette vitesse mais aussi de la vitesse radiale v_r. Celle-ci est comptée positivement pour une vitesse d'éloignement et négativement pour une vitesse d'approche. Il lui correspond respectivement un décalage spectral vers le rouge ou vers le bleu.

Si ds/c est la **durée propre du phénomène**, celui-ci va se situer, dans l'échelle de temps de l'observateur entre, disons, les instants t_e et $t_e + dt_e$ et l'on a, par effet de perspective du temps, dû à sa nature essentielle (équation (8)) :

$$ds/c = dt_e \sqrt{1 - v^2/c^2} \tag{9}$$

Passons à l'**observation** du phénomène : les photons qui apportent à l'observateur 0 l'information du **début** du phénomène ont quitté le système S à l'instant t_e de l'échelle de temps de l'observateur (instant d'émission de ces photons) et atteignent l'observateur à l'instant t_0 de son échelle de temps (instant de leur réception). Ces photons ayant des trajectoires radiales, si le système S a pour coordonnée radiale r à l'instant t_e, on a :

$$t_0 - t_e = r/c \tag{10}$$

De même, les photons qui apportent l'information de la **fin** du phénomène sont partis de S à l'instant $t_e + dt_e$ et sont reçus en 0 à l'instant $t_0 + dt_0$ dans l'échelle de temps de l'observateur ; mais dt_0 qui est la **durée d'observation du phénomène** est différente de dt_e à cause de l'effet de retard à l'information signalé ci-dessus. Pendant la durée dt_e la distance de S a varié algébriquement de dr, donc :

$$\left(t_0 + dt_0\right) - \left(t_e + dt_e\right) = (r + dr)/c \tag{11}$$

De (10) et (11), on déduit par différence :

$$dt_0 = dt_e + dr/c$$

ou :

$$dt_0 = dt_e\left(1 + v_r/c\right) \tag{12}$$

en remarquant que dr/dt_e est la **vitesse radiale**, v_r, de S mesurée dans le référentiel de l'observateur, puisque dt_e est évaluée dans son échelle de temps.

Le rapport membre à membre des équations (12) et (9) donne alors le rapport entre la durée de l'observation du phénomène et sa durée propre, soit :

$$\frac{dt_0}{ds/c} = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \tag{13}$$

Le second membre exhibe bien les deux effets qui interviennent sur le temps : au numérateur, l'effet de retard à l'information faisant intervenir seulement la **vitesse radiale** v_r du système S et au dénominateur, l'effet de relativité intrinsèque du temps (perspective du temps) qui fait intervenir le module v de la **vitesse totale** de S.

Si le phénomène observé est l'émission d'un rayonnement par le système S, on peut appeler ds/c sa **période propre** d'émission. La période du rayonnement reçu par l'observateur sera alors dt_0 donnée par (13). On rappelle que les longueurs d'onde sont proportionnelles aux périodes. Soit alors λ la longueur d'onde du rayonnement émis par S. La longueur d'onde du rayonnement reçu par l'observateur est $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$. Ce rayonnement reçu présente donc, par rapport au rayonnement émis un décalage spectral :

$$z = \frac{\Delta\lambda}{\lambda}$$

donné par : $$1 + z = 1 + \frac{\Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda + \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{\lambda'}{\lambda} = \frac{1 + v_r/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad (14)$$

C'est la relation de l'**effet Doppler-Fizeau** établissant l'existence d'un décalage spectral dû au seul effet de **vitesse** de la source.

On notera que, pour les petites valeurs de v, négligeables devant c, seul subsiste l'effet de retard à l'information et (14) devient simplement :

$z = v_r/c$ (relation dite «classique» de l'effet Doppler»).

Par contre, l'effet relativiste de perspective du temps maintient un décalage spectral même pour une vitesse transversale de S.

C'est l'effet Doppler-Fizeau transversal, décelable seulement pour des valeurs de v proches de c. Il a été mis en évidence par l'expérience des «rayons canaux» qui constitue une éclatante vérification et de la théorie de la relativité et de la relativité des durées due à l'essence même du temps.

2 - L'effet Einstein : décalage spectral d'origine gravitationnel

Un rayonnement émis dans un champ de gravitation intense est observé avec un décalage spectral vers le rouge. Cet effet a été prédit par Einstein dans le cadre de sa théorie relativiste de la grativation, fondée sur la relativité générale.

Pour en rendre compte dans le cadre de cette théorie, nous utiliserons la métrique des Schwarzschild qui décrit l'espace-temps vide autour d'une masse à symétrie sphérique ; on pourra donc traiter dans ce cadre le cas d'un rayonnement émis par la surface d'une étoile (le soleil par exemple) et qui est observé avec un décalage spectral.

La métrique de Schwarzschild est solution des équations d'Einstein (3) ; elle s'écrit avec $\Lambda = 0$:

$$ds^2 = \frac{-dr^2}{1 - 2m/r} - r^2\, d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 + (1 - 2m/r)\, c^2\, dt^2 \qquad (15)$$

avec : $$m = \frac{GM}{c^2}$$

G est la constante de gravitation,
c est la vitesse de la lumière dans le vide,
le facteur $1 - 2m/r$ introduit la courbure de l'espace.

On ne peut manquer de rappeler que ce sont les équations des géodésiques de cette métrique qui permettent de retrouver, en tant qu'équations de mouvement des particules libres de l'espace, les équations du mouvement képlérien.

On notera qu'à l'infini ($r = \infty$), le terme $2m/r$ s'annule et la métrique se réduit à cette de Minkowski ; l'espace de Schwarzschild est asymptotiquement plat et la variable temporelle t qui figure dans la métrique n'est autre que le temps de l'observateur à l'infini (disons très éloigné de la masse à symétrie sphérique dont le centre fixe est le centre des coordonnées). L'observateur mesure toujours le temps en effet dans son espace-temps local qui est un espace-temps de Minkowski ; il ne coïncidera donc avec le temps de Schwarzschild que si r est très grand.

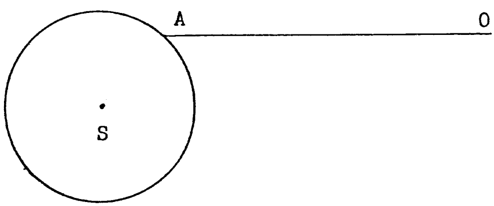

Figure 3 : **Effet Einstein**
Il est dû à la présence d'un champ de gravitation. Par exemple, le rayonnement émis par un atome A à la surface d'un astre présente pour un observateur extérieur 0 un décalage spectral d'origine gravitationnelle.
On peut en rendre compte à l'aide de la métrique de Schwarzschild qui décrit l'espace-temps vide autour de la masse à symétrie sphérique centré en S.

La figure 3 schématise le problème qui apparaît statique en ce sens que le centre de l'astre S, l'atome A qui émet le rayonnement et l'observateur 0 sont fixes les uns par rapport aux autres.

Le phénomène, qui consiste en l'émission d'une période de rayonnement par A, parcourt un intervalle d'espace-temps ds donné par l'équation de métrique dans laquelle on a fait $dr = d\theta = d\varphi = 0$, puisque A est immobile par rapport aux coordonnées. Il vient donc :

$$ds = cdt\sqrt{1 - 2m/r}$$

où ds/c apparaît comme la période propre du rayonnement émis par A et dt est la mesure de cette période dans l'échelle de temps de l'observateur (à l'infini). Mais cette durée est égale à la durée de l'**observation**, puisque, tous les éléments du problème étant fixes, il n'y a pas de retard différentiel à l'information quand les photons apportent à l'observateur l'information du début du phénomène ou de sa fin.

Le rayonnement sera donc observé avec un décalage spectral z donné par :

$$1 + z = \frac{\lambda' + \Delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt}{ds/c} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2m/r}} \qquad (16)$$

C'est la relation de l'effet Einstein qui établit l'existence d'un décalage spectral d'origine purement gravitationnel (nul si m = 0 ou r infini).

Le dernier membre de (16) étant plus grand que 1, z est positif et le décalage spectral a lieu vers le rouge.

La quantité $r_0 = 2m = 2GM/c^2$ est appelée le **rayon** de Schwarzschild de la masse M. Avec une masse de 2.10^{30} kg, le soleil a un rayon de Schwarschild de 3 km, alors que son rayon véritable est de 700 000 km.

Pour une petite valeur du rapport 2m/r, on peut utiliser un développement de Taylor du dernier terme de (16) limité au premier terme en m/r. On trouve pour le couple terre-soleil :

$$z = m/r = 2 \,.\, 10^{-6}$$

soit un décalage de 0,01 A à 5 000 A de longueur d'onde.

Le phénomène est plus net et plus intéressant dans le cas d'un astre en état d'écroulement gravitationnel ; en fin d'évolution stellaire, les réactions nucléaires au centre de l'étoile ayant épuisé l'hydrogène (transformé en hélium), l'énergie produite n'est plus capable de contrebalancer, par la pression gazeuse, la gravité et l'étoile commence à s'écrouler sur elle-même.

Si la masse de l'astre ne dépasse pas 1,4 masse solaire environ, l'écroulement se limitera au stade de **naine blanche**, véritable étoile d'hydrogène solide de la dimension d'une planète comme la terre. Avec un rayon de 7 000 km environ (cent fois plus petit que celui du soleil) mais une masse de l'ordre de la masse solaire, le décalage spectral du rayonnement de surface sera au moins cent fois plus grand que celui du soleil, de l'ordre de 1 A à 5 000 A de longueur d'onde, résultat bien vérifié par les observations astronomiques de naines blanches.

Avec une masse plus grande, l'astre évolue vers le stade d'étoile à neutrons (pulsar). Enfin, pour de très grandes valeurs de masse, supérieures à deux masses solaires par exemple, l'écroulement gravitationnel est total et l'étoile devient un **trou noir**. Le rayon* de l'astre n'ayant plus alors de limite inférieure (jusqu'à la singularité intrinsèque de l'espace-temps $r = 0$), r tend vers $2m$ par valeurs décroissantes et le décalage spectral z croît indéfiniment d'après (16) faisant disparaître l'astre à la vue de l'observateur par effet de décalage spectral infini sur toutes les longueurs d'onde de son rayonnement.

Il existe une autre façon de décrire le phénomène du trou noir.

Considérons l'information que l'observateur reçoit de l'astre par les photons radiaux. Les équations de leur mouvement sont :

$$ds = 0 \text{ (géodésiques nulles)} \quad \text{et} \quad d\theta = d\varphi = 0 \text{ (trajectoires radicales)}$$

La métrique (15) permet alors de calculer le module de la vitesse dr/dt des photons sur leur trajectoire radiale (qui ne serait c que dans le vide), soit :

$$dr/dt = c\,(1 - 2m/r)$$

On voit que cette vitesse est nulle en $r = 2m$.

* En fait, la surface r = cte de l'espace non euclidien de Schwarzschild n'est pas la surface d'une sphère euclidienne de rayon r. Mais cette surface a même métrique que la surface d'une sphère euclidienne de rayon très voisin de la constante r.

Aucun photon ne peut sortir du trou noir ou, ce qui est équivalent, on peut dire qu'il met un temps infini à rejoindre l'observateur. Sous l'effet du fantastique champ de gravitation de l'astre écroulé, la courbure de l'espace-temps le referme sur lui-même, interdisant à tout photon et a fortiori à toute particule matérielle de sortir du trou noir.

On assiste aussi avec le trou noir au plus extraordinaire effet de relativité du temps : on sait calculer la durée de l'écroulement **total** d'un astre de grande masse. On trouve une durée de l'ordre de 10^{-5} s pour une étoile typique dans un système de référence comobile avec la surface de l'astre. L'observateur extérieur, au contraire, non comobile avec l'écroulement, le verra seulement s'approcher asymptotiquement de sa sphère de Schwarzschild, en un temps **infini**. C'est là la plus extrême perspective du temps, qui élude pour l'observateur le problème physique de la disparition de l'astre en la singularité intrinsèque de l'espace-temps $r = 0$, lors de l'écroulement **total**.

3 - La loi de Hubble : le décalage spectral cosmologique

Avec la notion d'espace courbe, la théorie de la relativité générale allait donner un renouveau extraordinaire à la cosmologie.

L'espace euclidien, infini et plat s'était avéré non signifiant pour l'étude de l'univers dans son ensemble. L'univers ne pouvait y apparaître que comme l'ensemble de tout ce qui existe, définition sans potentialité scientifique.

La géométrie d'un espace non euclidien est au contraire hautement signifiante de l'univers à grande échelle. Déterminée localement par les observations astronomiques à portée nécessairement limitée, elle peut être extrapolée au tout et sous-tendre les lois physiques générales de l'univers, celui-ci pouvant à la limite être défini comme la géométrie de son espace.

La métrique cosmologique la plus générale a été établie par Robertson et Walker, sous les hypothèses d'homogénéité (densité constante dans tout l'espace) et d'isotropie (symétrie sphérique et propriétés identiques dans toutes les directions d'observation). Elle constitue alors la solution la plus générale des équations d'Einstein (3), avec une valeur a priori non nulle de la constante cosmologique Λ et un tenseur impulsion-énergie T_{ik} construit avec les valeurs p et ρ de la pression et de la densité du «gaz de galaxies» qui emplit l'espace. La densité moyenne actuelle de matière dans l'univers est de l'ordre de 10^{-30} g.cm^{-3}.

La métrique de Robertson-Walker s'écrit :

$$ds^2 = -R(t)^2 \cdot \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) + c^2\, dt^2 \qquad (17)$$

Les géométries possibles de la métrique de Robertson-Walker sont des espaces **à trois dimensions** du second degré*. Elles correspondent à trois valeurs possibles de la constante k.

Pour k = 1, l'espace est **elliptique**. Comme l'ellipse, il est **fermé** sur lui-même. Mais avec trois dimensions cette fermeture n'est pas concevable intuitivement. Il correspond à un **univers fini**.

Pour k = 0, l'espace est **parabolique**. Il est **ouvert** (comme la parabole) et correspond à un univers **infini**.

Pour k = – 1, l'espace est **hyperbolique**. Il est **ouvert** (comme la branche d'hyperbole) et correspond à un univers **infini****.

Quant à la fonction R(t), appelée **facteur de courbure** ou parfois improprement «rayon de l'univers», elle introduit la variation de la courbure de l'espace au cours du temps. Elle traduit le fait cosmologique le plus important de la cosmologie moderne : le caractère **évolutif** de l'univers. On avait cru pendant des siècles à l'immutabilité de l'univers.

La métrique de Robertson-Walker contient donc toute l'information cosmologique : la géométrie de l'espace (valeur de la constante k), question rattachée au problème de la finitude ou de l'infinitude de l'univers et la loi d'évolution de l'univers (fonction R(t)). Chaque fonction R(t) compatible avec les équations d'Einstein (3) correspond à un modèle d'univers.

---

* Les courbes du second degré, les coniques (ellipse, parabole, hyperbole) sont à la droite ce que les 3-espaces du second degré considérés ici sont à l'espace euclidien.

** Ce sont là les solutions du second degré des équations d'Einstein pour les espaces à trois dimensions, de même qu'à une dimension, ces solutions sont les trajectoires gravitationnelles (les coniques).

On notera tout particulièrement l'importance des modèles de Friedmann (figure 4) qui présentent tous trois (modèle elliptique, modèle parabolique, modèle hyperbolique) l'existence d'une explosion primordiale de l'univers ou Big Bang (dR/dt infini en R = 0). Ils correspondent aux choix des valeurs $\Lambda = 0$ et $p = 0$, la condition de pression nulle étant justifiée par la rareté des collisions entre les galaxies et la valeur nulle de la constante cosmologique correspondant à son interprétation moderne comme densité du vide quantique, nulle dans l'état physique actuel de l'univers. Ces modèles sont actuellement presque unanimement adoptés pour représenter l'univers physique.

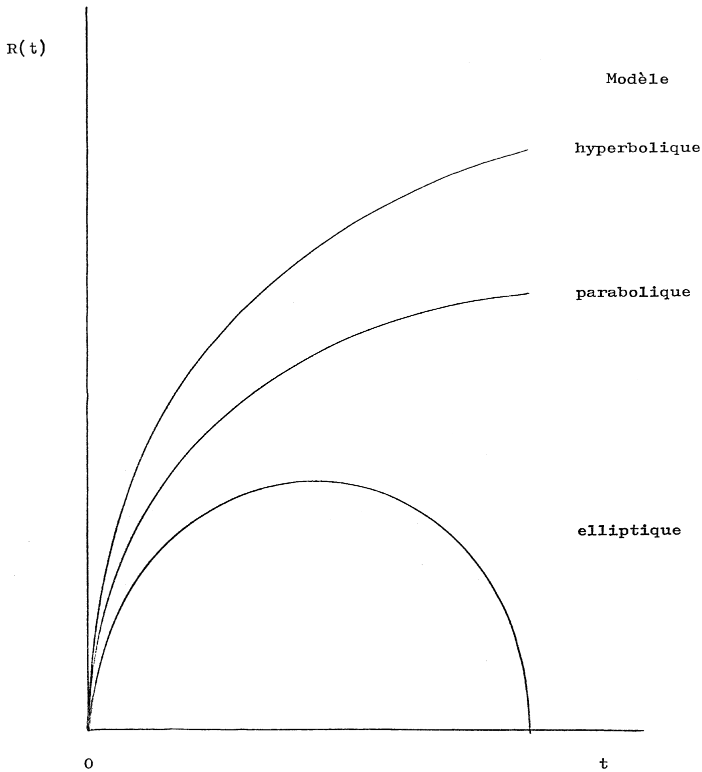

Figure 4 : Variation du facteur de courbure R(t) au cours du temps dans les modèles de Friedmann.

LA LOI DE HUBBLE

Avec la découverte du «royaume des nébuleuses» entre les années 1924 et 1929, l'astronome américain Edwin Hubble formula la loi qui porte son nom et qui constitue la première grande loi observationnelle de la cosmologie :

> Le spectre des galaxies présente un décalage systématique vers le rouge proportionnel à leurs distances.

A l'époque, l'interprétation du phénomène ne pouvait relever que de l'effet Doppler-Fizeau. Le décalage spectral était dû à la vitesse radiale (positive) des galaxies et Hubble en écrivit la relation à la distance sous la forme :

$$v_r = cz = H \cdot d$$

où z est le décalage du spectre de la galaxie, d, sa distance et H une constante, appelée constante de Hubble.

On aurait ainsi assisté à une **récession générale** de toutes les galaxies par rapport à nous, à une gigantesque explosion **mécanique** de l'univers, avec un centre d'explosion où nous serions éventuellement situés.

Outre ce retour fâcheux au géocentrisme, cette explication posait des problèmes apparemment insolubles. Quelle curieuse explosion que celle dont les fragments les plus rapides sont les plus éloignés du centre de l'explosion ! Et comment expliquer la fantastique énergie cinétique (une galaxie compte cent milliards d'étoiles) des galaxies les plus lointaines dont la vitesse radiale approcherait la valeur c ?

Par opposition avec cette interprétation mécanique de la loi de Hubble, la théorie de la relativité générale propose une explication dans le cadre de l'hypothèse où toutes les galaxies sont **immobiles**, plus exactement comobiles avec le système des coordonnées, r, θ, φ, supposé centré sur l'observateur.

Toutes les galaxies ont alors le même temps propre, celui de l'observateur. Les conditions de comobilité :

$$dr = d\theta = d\varphi = 0$$

portées dans la métrique de Robertson-Walker (17) entraînent en effet :

$$ds/c = dt$$

et t est le temps de l'observateur, dans la métrique de Robertson-Walker

Ce temps propre commun à toutes les galaxies (et à la nôtre) est appelé le **temps cosmique**.

Il n'y a donc pas d'effet de temps relatif (perspective du temps) sur la période d'un rayonnement émis par une galaxie lointaine, puisque cette galaxie a même temps propre que l'observateur.

Par contre, il y a un effet important de retard différentiel à l'information sur la période du rayonnement reçu, effet que nous allons évaluer :

Soit G la galaxie observée et G_0 la nôtre. Leurs coordonnées radiales respectives sont :

$$r = r_1 \qquad \text{et} \qquad r = 0 \text{ (observateur).}$$

Les photons que nous recevons en provenance de G nous parviennent par trajectoire radiale. Les équations de leur mouvement sont donc :

$$ds = 0 \qquad d\theta = d\varphi = 0$$

Portant ces valeurs dans l'équation de métrique (17), on obtient :

$$0 = -R(t)^2 \frac{dr^2}{1 - kr^2} + c^2\, dt^2$$

soit, en intégrant le long de la trajectoire radiale cette équation différentielle de mouvement des photons, de G_0 ($r = 0$, $t = t_0$) à G ($r = r_1$; $t = t_e$) :

$$\int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{c\,dt}{R(t)} \qquad (18)$$

La première intégrale définie a une valeur constante à cause de la comobilité de la galaxie G avec le système de coordonnées (r_1 = cte). Les instants t_e et t_0 sont respectivement l'instant d'émission des photons par la galaxie G et l'instant de leur réception en G_0.

Un phénomène de G, de durée dt_e, survenant entre les instants t_e et $t_e + dt_e$ sera observé en G_0 entre les instants t_0 et $t_0 + dt_0$ et l'on aura pareillement pour le mouvement des photons qui apportent à G_0 l'information de fin du phénomène :

$$\int_{t_e + dt_e}^{t_0 + dt_0} \frac{c\,dt}{R(t)} = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - kr^2}} = \text{cte} \qquad (19)$$

et, par différence avec l'équation (18)*

$$\frac{cdt_0}{R(t_0)} = \frac{cdt_e}{R(t_e)}$$

La durée de l'**observation** du phénomène, dt_0, par l'observateur situé en G_0 est donc reliée à sa durée effective, dt_e (toutes durées mesurées dans l'échelle du temps cosmique) par la relation :

$$\frac{dt_0}{dt_e} = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \qquad (20)$$

En particulier, si le phénomène est l'émission par la galaxie G d'un rayonnement de période dt_e, la période dt_0 du rayonnement reçu par l'observateur de notre galaxie G_0 sera donnée par (20) et l'observateur constatera l'existence d'un décalage spectral z donné par :

$$1 + z = \frac{R(t_0)}{R(t_e)} \qquad (21)$$

Ce décalage spectral est appelé décalage spectral cosmologique. Il est dirgé vers le rouge (z positif) si la fonction R(t) est croissante ($t_0 > t_e$). C'est l'explication du décalage cosmologique par l'**expansion de l'univers**.

Il est dû seulement à un effet de **distance**. A cause de la distance de la source, la lumière met le temps $t_0 - t_e$ pour nous apporter l'information du phénomène observé. Pendant ce temps, le facteur de courbure de l'univers a varié. Le décalage est donc d'autant plus grand que la durée $t_0 - t_e$ est plus grande, c'est-à-dire l'objet observé plus lointain.

On remarquera que la galaxie G_0 est quelconque et ne joue aucun rôle particulier. Il n'y a plus d'effet de géocentrisme : la loi de Hubble serait observée pareillement depuis n'importe quelle galaxie. On remarquera aussi que le décalage existe sans qu'il soit besoin d'imaginer un **mouvement** des galaxies, conformément à l'hypothèse, essayée au départ, de la comobilité des galaxies avec le système des coordonnées. Ainsi aucune énergie cinétique n'est mise en jeu ; c'est la

* Penser à la définition d'une intégrale vue comme la somme de ses éléments différentiels successifs, ici les cdt/R(t). Les 2 intégrales que l'on retranche l'une de l'autre diffèrent par + cdt_0 / $R(t_0)$ et – cdt_e / $R(t_e)$.

métrique de l'espace qui varie, étirant toutes les distances proportionnellement à R(t). Cela signifie seulement que, pour représenter le réel à l'échelle de l'univers tout entier et ses lois cosmologiques les plus profondes, nous avons besoin de faire **varier** au cours du temps cosmique la courbure de l'espace-temps.

On retrouvera aisément la forme de la loi de Hubble, en développant R(t0) en série de Taylor par rapport à l'argument t0 – te. (21) devient :

$$1 + z = \frac{R(t_e) + (t_0 - t_e)\,\dot{R}(t_e) + \ldots}{R(t_e)} \qquad (22)$$

en limitant le développement aux deux premiers termes.

On peut encore écrire (22) :

$$cz = c\,(t_0 - t_e) \cdot \frac{\dot{R}(t_e)}{R(t_e)}$$

$\dot{R}(t)$ est la dérivée première de R(t) par rapport au temps t.

C'est la loi de Hubble (cz = Hd). Le terme $c(t_0 - t_e)$ est la distance de la source, distance difficile à définir dans un espace à métrique variable et qui est vue ici comme la distance effectivement parcourue par les photons. Le terme $\dot{R}(t)/R(t)$ est la «constante» de Hubble. Constante à l'échelle humaine, c'est en général une fonction du temps cosmique t. Imposer à ce terme d'être une vraie constante, reviendrait à choisir un modèle d'univers où la fonction R(t) serait la fonction exponentielle. Tel est le célèbre modèle stationnaire de Hoyle, à création continue, qui ne peut plus être retenu aujourd'hui comme représentatif de l'univers physique réel.

La meilleure valeur actuelle de la constante de Hubble H semble être :

$$H = 50\ km.s^{-1}\ .\ Mpc^{-1}$$

Le mégaparsec (Mpc) vaut $3{,}08.10^{19}$ km.

La quantité :

$$1/H = R(t)/\dot{R}(t)$$

a la dimension d'un temps. C'est d'ailleurs une bonne approximation de l'âge de l'univers. L'approximation de Taylor qui a été effectuée pour retrouver la loi de Hubble à partir de (21) a donc en fait consister à se limiter aux cas où $t_0 - t_e$ est petit devant l'âge de l'univers.

La loi de Hubble, établie sur l'observation des galaxies les plus proches, apparaît donc comme une approximation de la loi relativiste du décalage spectral relativiste. A des distances plus grandes, l'écart avec la loi linéaire de Hubble est de nature à faire connaître la fonction R(t) et donc le véritable modèle d'univers. Avec aujourd'hui encore trop d'imprécision sur les mesures de distances des galaxies, le test «décalage spectral - magnitude apparente» reste très prometteur pour la détermination définitive du modèle d'univers et de la constante de Hubble.

CONCLUSIONS GÉNÉRALES

Nous avons étudié dans le cadre des théories de la relativité les trois types de décalages spectraux fondamentaux :

– Le décalage Doppler-Fizeau, qui est dû à un effet de **vitesse** et qui est dirigé indifféremment vers le bleu ou le rouge suivant que la vitesse est une vitesse d'approche ou d'éloignement mais dont l'effet transversal est toujours dirigé vers le rouge.

– Le décalage gravitationnel qui est dû à l'effet d'une **masse** proche de la source et qui est toujours dirigé vers le rouge.

– Le décalage cosmologique qui est dû à un effet de **distance** de la source et qui est toujours dirigé vers le rouge.

Il s'agit là notamment de phénomènes très profonds de la physique que, seule, la relativité générale permet d'interpréter avec succès.

Pour ce faire, elle a dû passer par les généralisations successives des notions d'espace et de temps : l'**espace-temps euclidien** pour interpréter l'effet Doppler-Fizeau, l'**espace-temps courbe** pour interpréter l'effet Einstein, l'**espace-temps à courbure variable** pour interpréter la loi de Hubble, ultime généralisation pour interpréter la loi sans doute la plus étonnante mais aussi la plus profonde de l'univers.

L'astronomie, comme la physique des particules élémentaires nous confrontent avec des conditions extrêmes de la physique. C'est dans ces domaines à haute courbure d'espace, hors de l'espace euclidien tangent où ne peuvent s'interpréter que les phénomènes d'une physique à basse énergie, que la relativité restreinte ou générale donne et donnera longtemps encore toute sa mesure.