

Mise en œuvre pratique de l'analyse spectrale numérique

par C. CANCE
Lycée N. Appert - 44700 Orvault

Le nouveau programme de la classe de seconde qui est appliqué depuis la rentrée 1993, indique que l'ordinateur sera utilisé pour analyser un son et en produire le spectre. De même on réalisera la synthèse d'un son à partir de son spectre.

De nombreux logiciels permettent en principe d'atteindre ce but, toutefois, les résultats obtenus lorsque l'on utilise le spectre pour reconstituer le son, sont, souvent, décevants.

On invoque des raisons qui sont toutes en définitive la non-stationnarité du signal et partant, du spectre, au cours du temps. Ceci est sans doute légitime, mais la principale difficulté est ailleurs :

Le spectre est obtenu à partir d'une transformée de Fourier qui n'est pas la bonne, ou bien le calcul des coefficients des séries de Fourier porte sur un signal qui n'est pas celui que l'on cherche à analyser.

Il s'agit d'une difficulté inévitable avec les matériels utilisés, liée, pour l'essentiel, au rapport entre la durée d'échantillonnage et la période des signaux analysés.

On peut régler le problème en une phrase, disant que «la durée d'observation (durée d'échantillonnage) doit être un multiple entier (exactement) de la période du signal étudié».

Cette façon de procéder, outre qu'elle n'explique rien, présente bien des inconvénients :

- elle semble limiter l'analyse spectrale numérique aux signaux périodiques,
- elle ne se préoccupe pas de savoir si la condition énoncée pourra être remplie ou non, en pratique,
- la proposition est incomplète car elle ne garantit pas, seule, l'exactitude du spectre de phase.

Dans le domaine de la simulation, toutes les conditions nécessaires pour obtenir des spectres corrects sont implicitement remplies. Si le signal est réellement acquis via un interface, comme Orphy-GTS, Candibus, ou Esao3, ou à partir d'un oscilloscope numérique, il en va tout autrement.

Nous nous proposons de montrer que les résultats (spectres calculés) peuvent être grandement améliorés pour peu que l'on ait bien présent à l'esprit les propriétés des outils mathématiques employés, et en ajoutant en amont et en aval du calcul de transformation de FOURIER des traitements adéquats.

L'expérience montre que la discussion de ces problèmes est généralement embrouillée par des définitions mal assises et par une distinction qui n'est pas suffisamment faite entre une SÉRIE de Fourier et une TRANSFORMÉE de Fourier.

Et même si cela est, on ne comprend pas très bien par exemple, si le spectre est *défini* de façon plus ou moins implicite à partir de la transformation de Fourier, pourquoi le résultat - purement mathématique - ne serait pas automatiquement correct. Or ce n'est manifestement pas le cas.

On doit donc pouvoir définir un spectre autrement, ce que nous allons faire à partir d'un protocole expérimental strictement physique, ensuite nous chercherons à raccorder nos desiderata aux calculs de FOURIER.

Il existe d'excellents ouvrages sur l'analyse spectrale numérique (voir les éléments bibliographiques en annexe), que l'on consultera pour plus de détails, car nous nous limiterons au minimum. On pourra consulter également les articles «Analyse Spectrale Numérique» et «Traitement Numérique du Signal» de J. ESQUIEU, B.U.P. n° 754 de mai 1993.

Les exemples traités ici le seront à l'aide du logiciel Spector, écrit par l'auteur de cet article, dans le cadre des activités du groupe EVARISTE (CNAM (Paris) - DLC15). Ce logiciel traite des mesures effectuées à l'aide de l'interface ORPHY-GTS, une version récente du logiciel permet de traiter à égalité des données acquises à l'aide de la carte Candibus via le logiciel LABO (Langage et Informatique), ou avec l'interface ESAO 3 via le logiciel ACTILAB (Jeulin).

PARTIE A : POSITION DU PROBLÈME

1. QU'EST CE QU'UN SPECTRE ?

Cet «objet» fait partie, actuellement et depuis très longtemps, de notre enseignement (général, secondaire) :

Soit un circuit série RLC en régime sinusoïdal forcé permanent, tel qu'il est étudié en terminale.

La courbe classique de résonance en intensité, qui donne la valeur de l'intensité efficace dans le circuit en fonction de la fréquence (ou de la pulsation de la tension d'alimentation), va nous servir à introduire la notion de spectre d'amplitude d'un signal.

De même, nous pourrions définir un spectre de phase du même signal, à partir de l'étude du déphasage du courant par rapport à la tension d'alimentation.

On appellera U_e et U_r le signal d'entrée (tension fournie par le G.B.F.) et le signal de sortie (aux bornes de la résistance) en valeurs efficaces, $U_e(t)$ et $U_r(t)$ les valeurs instantanées.

a - Mode opératoire

Pour relever la courbe de résonance en intensité, nous nous servons habituellement d'un générateur basse fréquence qui délivre un signal sinusoïdal, d'amplitude réputée constante et de fréquence variable. Cette variation peut être manuelle ou automatique (wobulation). Nous relevons la valeur de la tension U_r à l'aide d'un voltmètre alternatif ou sur un appareil équivalent à un voltmètre alternatif.

Si nous travaillons par wobulation, la fréquence du signal d'entrée varie continûment dans un intervalle borné, par exemple entre $F = 0$ Hz et F_m , valeur maximale.

Si nous travaillons manuellement, pour des raisons pratiques, nous pouvons choisir un ensemble fini de valeurs différentes de la fréquence F , ensemble noté $\{F_i\}$ réalisant ainsi un échantillonnage fréquentiel. L'échantillonnage sera dit régulier si les F_i sont séparés d'un intervalle constant δF .

L'échantillonnage s'introduit naturellement même sans ordinateur.

b - Définitions

• Raie

Dans un diagramme $U_r(f)$ nous portons les points correspondant aux valeurs mesurées, puis nous traçons la projection de ce point sur l'axe des abscisses, qui est ici la fréquence, et nous obtenons une RAIE.

• Spectre d'amplitude

Nous disons que l'ensemble des raies forme un SPECTRE D'AMPLITUDE par DÉFINITION.

La ligne continue qui joint le sommet des raies (i.e. : les points) forme l'ENVELOPPE SPECTRALE du spectre d'amplitude du signal de sortie U_r de notre élément de circuit.

Dans ce cas le nombre des raies réelles dans le signal de sortie est infini : le tracé de l'enveloppe spectrale redonne les raies hors échantillonnage spectral par régularité implicite et le spectre coïncide avec son enveloppe (spectre continu).

• Spectre de phase

Il existe une fréquence pour laquelle le signal de sortie U_r est en phase avec le signal d'entrée U_e - à la résonance - nous la prenons arbitrairement pour référence et nous disons qu'à cette fréquence la phase du signal de sortie est nulle, (nous pourrions également lui affecter une certaine valeur particulière) par convention. Ceci définit une référence de phase dans le signal de sortie. Pour toute autre fréquence le signal de sortie a une phase non nulle par rapport à cette référence (c'est le signal d'entrée qui fait office de «garde phase», mais non de référence directe). L'ensemble échantillonné des phases $\{\Phi_n\}$ est par définition le spectre de phase du signal.

L'unique but de cette façon de voir est de pouvoir considérer les Φ_n comme les phases relatives des raies.

c - Obtention d'un spectre

Jusqu'à présent nous appliquons successivement des signaux de formes identiques à l'entrée, c'est-à-dire aux bornes de l'ensemble RLC :

$$U_i(t) = U_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_i t)$$

le même résultat peut être obtenu en procédant avec un signal unique (fourni par un G.B.F. hypothétique), défini par la somme des signaux élémentaires ci-dessus.

Pour trouver l'expression du signal d'entrée $U_e(t)$, il nous faut, dans le cas de la wobulation, sommer sur tout l'intervalle fréquentiel entre 0 et F_m , dans le cas de l'échantillonnage fréquentiel, une somme discrète suffit, sur les F_i correspondants aux échantillons :

$$U_e(t) = \sum_i U_m \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_i \cdot t)$$

Le courant $i(t)$, dans le circuit, est alors la superposition de courants sinusoïdaux élémentaires aux fréquences F_i , il suffit d'invoquer pour cela la linéarité de l'équation différentielle qui régit l'évolution du circuit ; la tension aux bornes de la résistance prend alors la forme :

$$U_i(t) = \sum_i U_i \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_i \cdot t + \Phi_i) \quad (1)$$

L'ensemble des valeurs $\{U_i\}$ correspond au spectre d'amplitude, l'ensemble des valeurs $\{\Phi_i\}$ correspond au spectre de phase.

d - Généralisation

Nous aurons effectué *l'analyse spectrale* d'un signal $U(t)$ quelconque lorsque nous l'aurons mis sous la forme (1) et lorsque nous aurons déterminé les ensembles $\{U_i\}$ et $\{\Phi_i\}$. Cette proposition ne préjuge pas de la faisabilité de la chose.

e - Techniques d'analyse spectrale

Des solutions purement matérielles existent pour déterminer les spectres. Il est possible, par exemple, d'appliquer le signal à analyser à un filtre à bande étroite centrée sur une fréquence ajustable et d'effectuer un balayage fréquentiel, on peut aussi utiliser une batterie de filtres à fréquences fixes (analyseur à banc de filtres) mais il faut, dans ce cas, que les fréquences de ces filtres correspondent aux composantes fréquentielles du signal (voir les articles de Y. DAVEAU et J.-P. MULLER dans le B.U.P. n° 752 de mars 1993).

L'analyse spectrale numérique ressemble beaucoup à ce dernier cas (banc de filtres) mais procède uniquement par calcul, elle utilise la transformation de FOURIER, que nous allons définir.

2. SÉRIE DE FOURIER ET TRANSFORMATION DE FOURIER

Il s'agit de deux notions différentes qu'il convient de ne pas confondre.

Dans la suite, nous nous limitons au problème envisagé ci-dessus, c'est-à-dire celui qui consiste à exprimer le signal $U(t)$ sous la forme (1) :

$$U(t) = \sum_n U_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_n \cdot t + \Phi_n) \quad (1)$$

Il est bien évident que le signal peut être une grandeur physique quelconque autre qu'une tension, sans changer le problème.

Le signal (1) pourrait s'écrire :

$$U(t) = \sum_n U_a \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot F_n \cdot t) + \sum_n U_b \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_n \cdot t) \quad (2)$$

Nous préférons la forme (1) qui permet de séparer le spectre d'amplitude $\{U_n\}$ et le spectre de phase $\{\Phi_n\}$.

On a de toutes façons :

$$U_n = \sqrt{U_a^2 + U_b^2} \quad \text{et} \quad \tan \Phi_n = U_a / U_b$$

a - Série de FOURIER

Un sous-ensemble particulier des signaux de la forme (1) est formé par les signaux périodiques, qui par définition se reproduisent identiques à eux-mêmes avec une périodicité temporelle T .

Leurs spectres ont les propriétés suivantes :

- le spectre d'amplitude est formé d'un ensemble discret de raies d'amplitudes *non-nulles* (partiels),
- les fréquences des partiels sont dans des rapports simples.

La fréquence la plus basse (hormis une éventuelle composante continue) est celle du signal lui-même $F_0 = 1/T_0$, les autres raies ont des fréquences multiples entier de F_0 (fondamental), soit : $F_n = n \cdot F_0$, et donc des périodes T_n sous multiples de T_0 : $T_n = T_0/n$.

Pour ces signaux :

$$U(t) = U(t + k \cdot T) = \sum U_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot n \cdot F_0 \cdot t + \Phi_n) \quad (3)$$

avec k et n entiers ($n = 0$ redonne la composante continue).

Par exemple un signal rectangulaire de rapport cyclique $1/2$ de période T_0 et de fréquence $F_0 = 1/T_0$ sera formé d'un fondamental d'amplitude U_0 de fréquence F_0 et ne contiendra que des harmoniques impairs de fréquence $F_{2k+1} = (2k+1) \cdot F_0$ avec des amplitudes décroissantes comme l'inverse du rang :

$$U_{2k+1} = U_0 / (2k+1)$$

Le spectre, qui est formé d'un nombre infini de raies, est cependant discret, l'enveloppe spectrale est une hyperbole, le spectre ne coïncide plus partout avec son enveloppe.

Ceci conduit aux trois remarques suivantes :

- 1) Les signaux périodiques ne représentent pas tous les signaux de la forme (1) possibles ;
- 2) Les formes (1) ou (2) peuvent être interprétées comme la décomposition d'un vecteur-signal sur une base de fonctions orthogonales (les divers sinus et cosinus), les composantes de ce vecteur sont directement liées aux spectres d'amplitude et de phase. Trouver ces spectres revient à trouver les composantes du vecteur signal ;
- 3) Les signaux périodiques définissent eux-mêmes (par l'intermédiaire du fondamental) leur propre base (minimale) de représentation : ou si l'on préfère les fréquences auxquelles il convient de calculer les amplitudes des partiels sont dictées par le signal à étudier lui-même : il suffit de connaître la fréquence du fondamental.

b - Transformation de FOURIER

Il s'agit d'une radicalisation de la remarque (2) associée à la remarque (1) : le spectre du signal $g(t)$ sera obtenu par projection orthogonale du vecteur signal, sur une base formée d'une infinité de fonctions orthogonales, soit en utilisant la notation complexe :

$$G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot e^{-2\pi i f t} dt \quad (i = \sqrt{-1}) \quad (4)$$

appelée Transformée de FOURIER de la fonction $g(t)$ (T.F.).

Cette transformation est inversible, dans le sens que l'intégrale :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) \cdot e^{+2 \pi i f t} df \equiv g(t) \quad (5)$$

redonne précisément $g(t)$ (à une constante multiplicative près).

Dans cette expression le signal à analyser est défini par l'ensemble des valeurs prises au cours du temps.

Dans le cas d'un signal de la forme générale (1), superposition de signaux périodiques, l'intégrale (4) n'est pas calculable. Par contre l'intégrale (4) a un sens si nous limitons l'intégration à une période du fondamental (ou n (entier) périodes ou fondamental) ; en vertu de l'existence des séries de Fourier pour ces signaux, une période du fondamental contient un nombre entier de périodes de n importe quel partiel.

D'un point de vue physique un signal strictement périodique n'a d'ailleurs pas de sens : il transporte une puissance constante et donc a une énergie infinie : les signaux réels doivent s'annuler pour $t = \pm \infty$.

Dans le cas d'un signal de forme quelconque, un son par exemple, la forme de la fonction (son équation mathématique) $f(t)$ n'est pas connue, même si elle l'était, le calcul de l'intégrale (4) ne pourrait être fait, numériquement, qu'à partir d'un échantillonnage du signal : cela vient de la taille forcément finie des mémoires des machines. De même le calcul de $G(f)$ ne pourra être effectué que pour un ensemble fini de valeurs de la fréquence f , nous aurons donc un échantillonnage spectral.

L'échantillonnage sera le plus souvent régulier, effectué avec une période T_e et donc avec une fréquence $F_e = 1/T_e$, la durée d'observation du signal est $T = n \cdot T_e$, appelée aussi par abus de langage, «largeur de la fenêtre d'observation».

Pour garantir la réversibilité de la transformation (reconstitution du signal à partir de son spectre), le pas d'échantillonnage fréquentiel est pris égal à F_e/N , N étant le nombre d'échantillons prélevés sur le signal à analyser.

En choisissant convenable l'origine des temps, le k ième échantillon de la fonction $f(t)$ est obtenu à la date $k \cdot T_e$, la fonction $f(t)$ est donc représentée par un ensemble d'échantillons noté $\{x(k)\}$, k variant de 0 à $N - 1$, T_e est sous entendu ou bien ceci est équivalent à prendre $T_e = 1$ (changement d'unité de temps).

De la même façon le n ième échantillon fréquentiel de $G(f)$ est : $X(n)$ avec la même convention $X(n \cdot F_e/N)$, cette fois-ci, c'est le terme F_e/N qui est sous-entendu.

Le terme $F_e/N = \delta F$ joue un rôle très important ; c'est l'intervalle minimal entre deux raies : il correspond à la résolution spectrale et mesure l'incertitude sur les valeurs des fréquences calculées, dans la mesure où il n'y a pas d'erreur sur la fréquence d'échantillonnage elle-même (vrai en général).

Avec ces notations, l'intégrale (4) devient la somme discrète :

$$X(n \cdot F_e/N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot (n \cdot F_e/N) \cdot k \cdot T_e) \quad (6)$$

Avec $T_e = 1$ (et $F_e = 1$ évidemment) :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot n/N) \quad (7)$$

La transformation inverse est définie par :

$$x(k) = (1/N) \sum_{n=0}^{N-1} X(n) \exp(+2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot n/N) \quad (8)$$

On a tenu compte des éléments différentiels :

$$dt \rightarrow T_e \quad \text{et} \quad df \rightarrow F_e/N \quad \text{avec} \quad T_e = 1 \quad \text{et} \quad F_e = 1$$

Entre le signal $\{x(k)\}$ et sa T.F existe la relation :

$$\sum_k x(k)^2 = (1/N) \cdot \sum_n X(n)^2 \quad (9)$$

Connue sous le nom d'identité de PARSEVAL (Voir sa démonstration en annexe).

D'un point de vue physique, l'identité de Parseval est l'expression de la conservation de l'énergie entre les deux représentations temporelle et fréquentielle du même signal, en effet la puissance transportée par le signal est proportionnelle au carré de son amplitude, l'énergie normalisée d'un signal $u(t)$ s'obtient en sommant sur la durée d'observation :

$$E = \int_T u^2(t) \cdot dt$$

ce qui correspond au premier membre.

Le second membre correspond à une sommations sur les fréquences :

$$\int U^2(f) \cdot df \quad (\text{toujours avec } df = F_e/N \text{ et } F_e = 1)$$

L'identité de Parseval affirme que la seconde intégrale est aussi l'énergie du signal.

Les sommes dans (9) sont équivalentes a des sommations par la méthode des rectangles (aire sous la courbe...), il s'ensuit que l'énergie E ne sera correctement évaluée que si, en particulier, les échantillons $x(k)$ ne diffèrent pas trop des valeurs moyennes du signal pendant la durée d'échantillonnage T_e , ce point important sera rediscuté plus loin.

Ainsi définie, la transformée de Fourier devient la Transformée de FOURIER discrète notée TFD.

Pour un signal échantillonné sur N points, les relations de définition montrent que le volume de calcul à effectuer et donc le temps de calcul croît comme N^2 : les sommes croissent comme N et le nombre d'échantillons spectraux à calculer aussi. Les durées de calcul deviennent vite inacceptables.

Il existe heureusement un algorithme de calcul, dit TRANSFORMATION DE FOURIER RAPIDE, (FFT en anglais) dont la durée d'exécution varie seulement comme $N \cdot \log(N)$. Il consiste à remarquer que le calcul de la TFD sur N points se ramène aux calculs de 2 TFD sur $N/2$ points. On ramène ensuite le calcul des TFD sur $N' = N/2$ points à deux calculs de TFD sur $N'/2$ points, etc.

Si N est une puissance entière de 2, on aboutit au calcul élémentaire d'une TFD sur 2 points.

Le principal inconvénient de cet algorithme réside dans la nécessité d'avoir $N = 2^n$ soit 256, 512, 1024, 2048 points, ce qui, ajouté au fait que la fréquence d'échantillonnage ne peut pas être arbitrairement ajustée entraîne la quasi impossibilité d'inscrire un nombre entier de périodes du signal dans la fenêtre d'observation.

Si elle est calculée par un algorithme de calcul rapide la TFD devient la TFR (ou FFT an anglais), mais quel que soit le mode de calcul la TFD possède des propriétés particulières qui produisent plusieurs effets parasites au niveau des spectres, qui peuvent et doivent être corrigés, comme nous allons le montrer sur des exemples.

c - Remarques préliminaires

La principale difficulté due à l'échantillonnage vient du fait qu'il introduit dans le calcul une grandeur périodique supplémentaire, étrangère au signal : la fréquence d'échantillonnage. C'est la fréquence d'échantillonnage qui décide (en quelque sorte) des fréquences auxquelles le calcul de l'amplitude et de la phase des raies sera effectuée, et non plus le signal lui-même : nous avons perdu la référence interne, et c'est là qu'apparaît l'analogie avec le banc de filtres. Ceci est aussi à rapprocher du fait que la sommation est effectuée sur la durée d'observation et non pas sur une durée évaluée à partir de la période du signal.

Il en découle deux possibilités :

Premier cas : (exceptionnel)

- la période d'échantillonnage est T_e ,
- le nombre d'échantillonnage est N , la durée d'observation ou largeur de la fenêtre d'échantillonnage est $T = N \cdot T_e$,
- le signal est périodique de période T_s de fréquence F_s ,
- et T est un multiple entier de la période T_s du signal.

On a donc $T = n \cdot T_s$ soit $N \cdot T_e = n \cdot T_s$ alors $F_s = n \cdot F_e / N$.

Il est clair que les fréquences de tous les partiels du signal sont des multiples de la résolution F_e/N , et donc que des raies seront

calculées aux fréquences cherchées, et donc encore que le spectre sera correct (au moins en ce qui concerne l'amplitude).

Il est clair aussi que cette situation ne peut-être que le fruit du hasard, sauf si la fréquence d'échantillonnage est asservie par un moyen quelconque à la fréquence du signal étudié. Dans la pratique, la fréquence d'échantillonnage obtenue avec nos cartes d'acquisition de données, ne peut pas être ajustée à une valeur quelconque, et la fréquence du signal à analyser n'est de toute façon pas connue.

Deuxième cas : (le plus fréquent)

- le signal échantillonné pendant la durée T est périodique mais a une fréquence sans relation simple avec la fréquence d'échantillonnage,
- ou bien le signal peut s'écrire sous la forme (1), mais il n'a pas de fréquence à proprement parler (onde modulée en fréquence), ou bien les fréquences des composantes ne sont pas dans un rapport simple (DTMF), etc.

Alors le calcul des grandeurs de raies s'effectue à des fréquences qui ne coïncident jamais avec celles des partiels du signal étudié. Le spectre calculé sera erroné, au sens propre du terme : il différera du spectre exact d'une «erreur», qu'il est possible de réduire dans des proportions considérables, après analyse.

Les moyens de réduire l'erreur seront étudiés sur des exemples choisis de façon à ce que le spectre cherché soit connu a priori :

- sinusoïde simple,
- spectre d'un signal carré (donc signal périodique),
- spectre d'une onde modulée en fréquence (que signifie une expression telle que «...la période du signal étudié» puisqu'elle change tout le temps ?).

Dans un article ultérieur nous traiterons le cas des signaux utilisés pour le codage des claviers téléphoniques (dits «à fréquences vocales» ou DTMF pour Dual Tone Multi Frequency).

PARTIE B : MISE EN PRATIQUE

1. CAS D'UN SIGNAL CARRÉ

Le signal de la figure 1 correspond aux échantillons prélevés sur un créneau de fondamental $F_0 = 300$ Hz environ, l'amplitude des partiels - tous impairs - décroît lentement lorsque la fréquence augmente d'où une fréquence d'échantillonnage grande par rapport à F_0 .

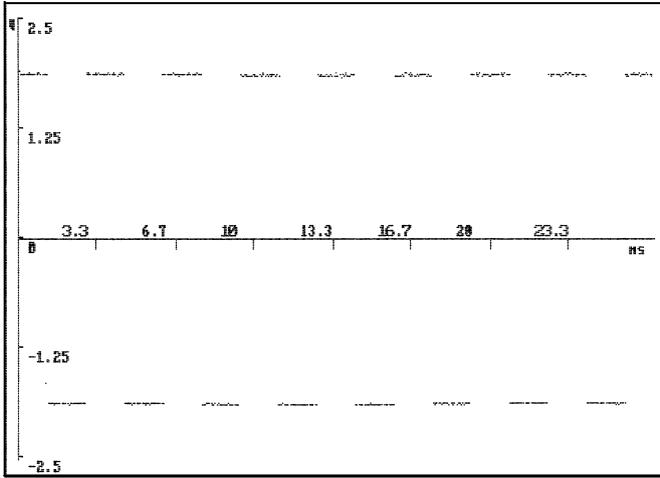


Figure 1 : Signal rectangulaire de rapport cyclique 0.5 délivré par un générateur de fonction et d'amplitude voisine de 1.875 V.

La valeur crête du fondamental est : $1.875 \times 4/\pi = 2.39$ V.

Le fenêtre d'échantillonnage contient un peu plus de 8 périodes.

La fréquence d'échantillonnage vaut 19 207 Hz (valeur maximale permise par l'interface ORPHY), avec 512 échantillons la résolution spectrale est $19\,207/512 = 37.5$ Hz. Puisqu'il y a 8 périodes dans la fenêtre d'observation la fréquence du signal est voisine de $8 \times 37.5 = 300$ Hz (un peu supérieure à cette valeur).

Si une seule période était échantillonnée on aurait :

$$T_0 = N \cdot T_e \quad \text{soit} \quad F_0 = F_e/N = \delta F$$

...ce qui correspond à la résolution spectrale, la précision sur F_0 serait très faible, pour l'augmenter il faut augmenter le nombre d'échantillons et donc la durée d'observation du signal.

Le signal est périodique, mais la fenêtre d'observation ne contient pas un nombre entier de périodes, bien que ce nombre soit voisin de 8.

On obtient le spectre d'amplitude de la figure 2, par calcul brutal de la TFR du signal contenu dans la fenêtre.

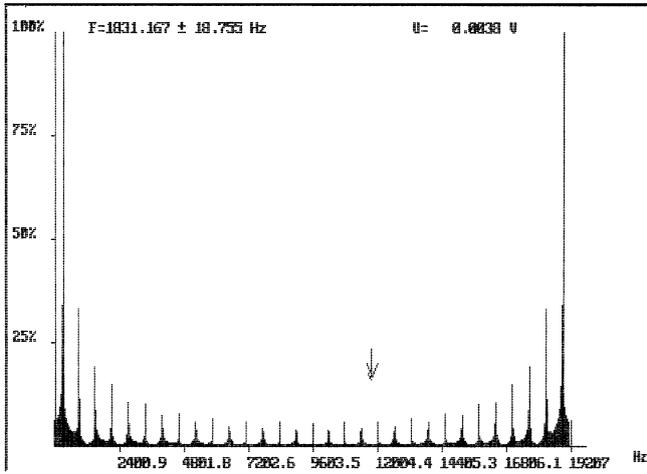


Figure 2 : Spectre d'un signal carré de fréquence voisine de 300 Hz.

La fréquence d'échantillonnage est de 19 207 Hz (valeur maximale autorisée par l'interface).

La limite de SHANNON est $F_e/2 = 9\,603$ Hz.

Remarquer la symétrie du spectre par rapport à cette valeur.

L'utilisation d'une fenêtre rectangulaire rend ce spectre peu satisfaisant.

Ce spectre est peu satisfaisant, on observe :

- une symétrie autour de $F_e/2$,
- que les pieds de raies sont élargis et confus,
- que l'enveloppe spectrale s'écarte notablement d'une hyperbole.

La symétrie autour de $F_e/2$ s'explique par les propriétés de la TFD définie par les relations (7) et (8), qui sont :

a - Périodicité

$X(n)$ est périodique de période N :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot n/N) \quad (10)$$

$$X(n+N) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot (n+N)/N) = X(n)$$

car $\exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot k) = 1$ quel que soit l'entier k .

Le spectre obtenu est donc périodique de période F_e (constitué de la répétition périodique sur l'axe des fréquences de la partie $0 < f < F_e$).

Par symétrie, le signal $x(k)$ est lui-aussi périodique de période égale à la durée d'observation $T = N \cdot T_e$ (il est rendu périodique). Si l'on préfère, le spectre calculé est celui d'un signal constitué de la répétition périodique dans le temps de la fraction du signal réel qui se trouve dans la fenêtre d'observation. Pour la TFD il n'existe que des signaux périodiques.

Comme ici la fenêtre d'observation ne contient pas exactement 8 périodes, le spectre calculé est celui d'un signal différent de celui observé : ceci est visible de façon outrée sur la figure 3, où l'on voit en particulier que le rapport cyclique est perdu.

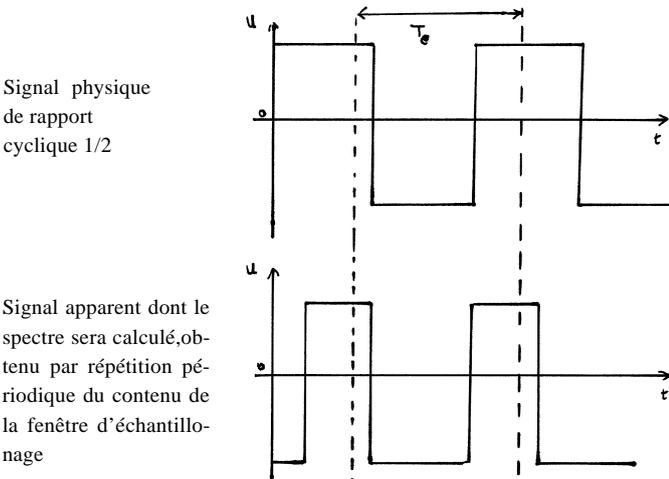


Figure 3 : Fenêtre d'observation.

b - Symétrie

Le spectre d'amplitude est symétrique par rapport à l'origine, et par rapport à $F_e/2$:

$$X(N-n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) \cdot \exp(-2 \cdot \pi \cdot i \cdot k \cdot (N-n)/N) = X(-n)$$

Or $X(-n) = X^*(n)$ complexe conjugué, donc :

$$X(N-n) \cdot X^*(N-n) = X(n) \cdot X^*(n) \quad \text{ou} \quad |X(N-n)| = |X(n)| \quad \text{cqfd}$$

C'est bien ce que l'on voit figure 2.

Pour la même raison le spectre de phase sera antisymétrique :

$$\Phi(n) = -\Phi(-n) \quad \text{et} \quad \Phi(n) = -\Phi(N-n)$$

On voit apparaître une valeur importante de la fréquence : $F_e/2$. Il existe un théorème d'échantillonnage, dit Shannon, selon lequel l'échantillonnage d'une sinusoïde de fréquence f nécessite au moins deux points par période, autrement dit, la fréquence d'échantillonnage doit être au moins le double de la fréquence du partiel de rang le plus élevé : nous devons nous interdire d'interpréter les raies de fréquences supérieures à $F_e/2$. Il n'empêche que ces raies sont dans le spectre d'amplitude elles apparaissent parfois comme des raies parasites dans la zone $0 \dots F_e/2$.

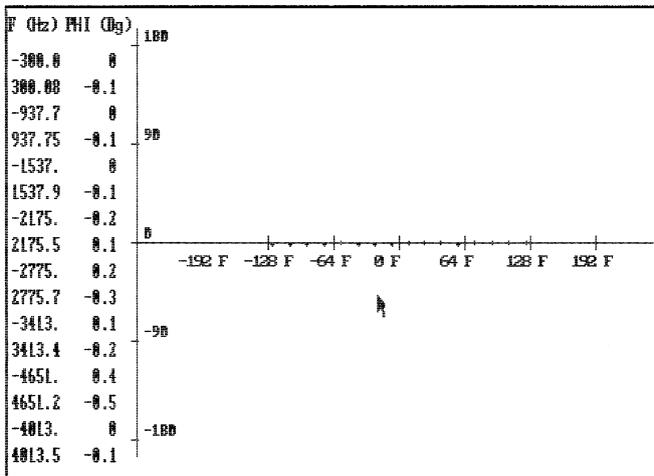


Figure 4 : Spectre de phase du signal précédent.

L'axe des abscisses est gradué en unités «F» et F représente ici la résolution (notée δF dans le texte).

La graduation va de $-(N/2) \cdot F$ jusqu'à $+(N/2) \cdot F$; ce qui est équivalent à une représentation entre 0 et $(N-1) \cdot F$, vue la périodisation des spectres induite par la T.F.D.

Noter l'anti-symétrie.

Aux erreurs de mesure près, tous les partiels ont la même phase Φ_n (qui est nulle ici).

c - Spectre de phase

Le spectre de phase du signal est donné par la figure 4, il est plus lisible sur un moniteur couleur d'ordinateur.

Tous les partiels sont en phase (terme de jargon nous entendons par là que tous les Φ_n sont égaux et ici, en plus, nuls : mais ceci EST UN HASARD ; en général on obtient le spectre de phase de la figure 5.

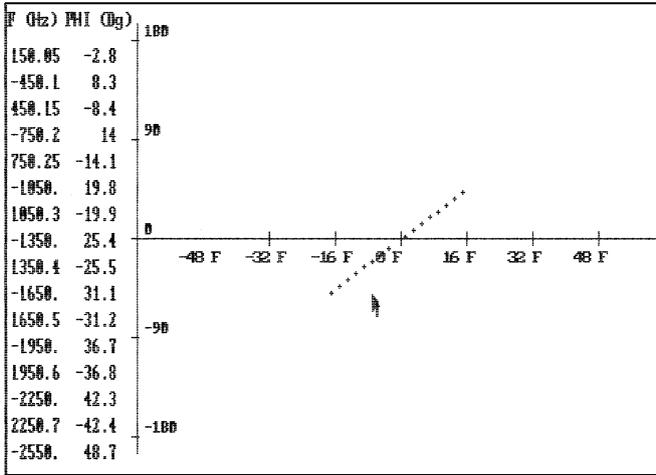


Figure 5 : Autre acquisition - dans les mêmes conditions - d'un signal carré. Les partiels DEVRAIENT avoir la même phase, mais comme les instants d'échantillonnage sont mal placés par rapport à la discontinuité du signal chaque Φ_n est entaché d'une erreur systématique proportionnelle à son rang n.

En effet revenons à la forme (1) soit :

$$U(t) = \sum U_n \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot F_n \cdot t + \Phi_n)$$

Un changement de l'origine des temps $t' = t + \delta t$, se traduit pour l'harmonique de rang n par un déphasage :

$$\delta\Phi_n = 2 \cdot \pi \cdot F_n \cdot \delta t$$

comme $F_n = n \cdot F_0$, $\delta\Phi_n$ est proportionnel au rang de l'harmonique.

Donc le spectre de phase n'est pas invariant par translation (dans le temps) du signal.

Comme les phases sont évaluées par rapport à la fenêtre d'échantillon-

nage, les phases obtenues ne sont plus les phases relatives des différents partiels.

Il y a plus grave : chaque échantillon du signal prélevé aux dates $n \cdot T_e$, est censé représenter la valeur moyenne du signal sur une durée T_e centrée sur la date $n \cdot T_e$. On s'en convaincra en remarquant que l'identité de Parseval donne bien l'énergie, ou la puissance du signal, si cette condition est vérifiée (voir plus haut). Or chaque échantillon représente effectivement la valeur moyenne du signal si celui-ci ne varie pas trop vite : dans le cas d'un signal carré, il faudrait absolument avoir un échantillon au milieu des fronts montant et descendant, ou deux échantillons placés symétriquement par rapport à la discontinuité. Si tel n'est pas le cas, l'échantillon est la valeur moyenne du signal sur une durée T_e centrée sur un instant antérieur ou postérieur à la date effective d'échantillonnage, et la position dans le temps de la discontinuité est erronée : la valeur de l'erreur δt est inconnue, et le spectre de phase est la superposition du spectre correct et d'un déphasage $\delta\Phi_n$ proportionnel à n ; voir la figure 6.

C'est ce qui explique la pente des segments de droite sur lesquels s'appuient les points représentatifs des Φ_n de la figure 5, il faut alors un peu d'habitude pour deviner que tous les partiels sont en phase les uns par rapport aux autres !

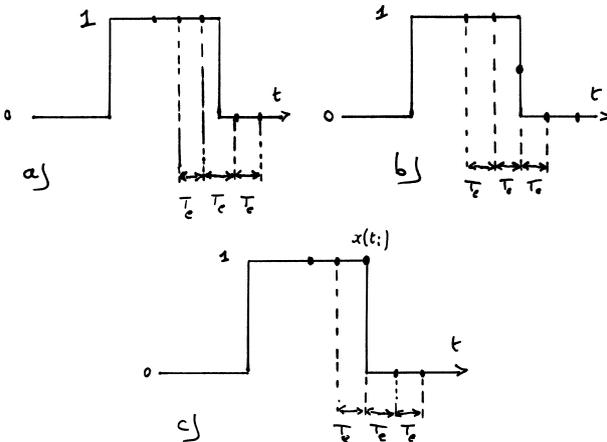


Figure 6 : a) et b) Échantillonnage satisfaisant du créneau d'amplitude 1.

Chaque échantillon prélevé à la date t_i mesure la valeur moyenne de la fonction sur un intervalle de temps centré sur t_i et de $1/2$ largeur $0,5 T_e$.

c) Échantillonnage défectueux : l'échantillon placé juste avant le front descendant, soit t_i cette date, vaut 1 au lieu de 0,5 : il est représentatif de la fonction (de sa valeur moyenne sur une durée T_e) à un instant antérieur de $0,5 \cdot T_e$.

d - Les remèdes

Pour des signaux réels il faut s'affranchir des symétries du spectre. L'existence de la limite de Shannon implique qu'il suffit de visualiser la moitié inférieure du spectre de ($F = 0$ Hz à $F_e/2$).

La parité pose un problème dont la solution est matérielle : pour éviter de retrouver dans le domaine $0 .. F_e/2$ des raies situées en réalité à une fréquence supérieure à $F_e/2$ il faut placer à l'entrée de l'interface un filtre de pente la plus grande possible qui élimine toutes les fréquences supérieures à $F_e/2$ (filtre anti-repliement). Dans la pratique on peut se dispenser de ce filtre moyennant quelques précautions ou hypothèses raisonnables :

- avoir une idée de la (ou des) fréquence(s) du signal f_0 ,
- limiter son analyse à un harmonique de rang raisonnable, par exemple le dixième (10 fois la valeur f_0 ci-dessus),
- choisir une fréquence d'échantillonnage supérieure à 20 fois la fréquence du signal (avec l'exemple pris) pour avoir 2 points par période à la fréquence la plus élevée analysée,
- il faut de plus supposer que l'amplitude des harmoniques diminue lorsque la fréquence augmente, cas le plus général, et donc que les raies parasites dues au repliement auront une amplitude négligeable au-delà de $20 f_0$.

Pour ce qui est de la synchronisation entre la fréquence f du signal et la fréquence d'échantillonnage F_e , il n'y a pas de solution évidente : la fréquence d'échantillonnage ne pouvant pas être ajustée continûment, aussi faut-il ajouter au calcul par TFD deux traitements :

- Un traitement en amont du calcul de TFD : le fenêtrage

Comme le spectre obtenu est celui de la répétition périodique de celui du signal inscrit dans la fenêtre d'observation, nous pouvons amoindrir les distorsions en affectant aux échantillons se trouvant près des bords de celle-ci un poids moindre que celui des échantillons au voisinage du centre.

Ceci est obtenu en multipliant le signal par une fonction qui s'annule en $t = 0$ et $t = T$ (durée d'observation). Cette fonction est la fenêtre de pondération.

Plusieurs types de fenêtrage existent, par exemple à partir de cosinus de période $2T$, plus ou moins optimisés, ou autres fonctions, de plus amples détails seront trouvés dans les ouvrages cités en bibliographie (fenêtre Hamming, Hanning, Blackman, Keyser, etc.).

Pour percevoir le rôle exact des fenêtres de pondération, on peut examiner le spectre d'une sinusoïde «pure» fournie par un GBF courant (figure 7) et son spectre (figure 8) obtenu sans pondération des échantillons (fenêtre rectangulaire).

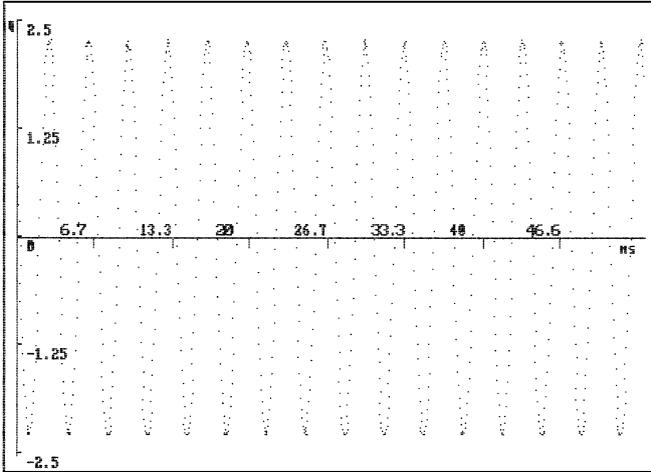


Figure 7 : Échantillonnage d'un signal sinusoïdal pur.
La fenêtre d'observation ne contenant pas un nombre entier de périodes, la valeur moyenne du signal n'est pas nulle.

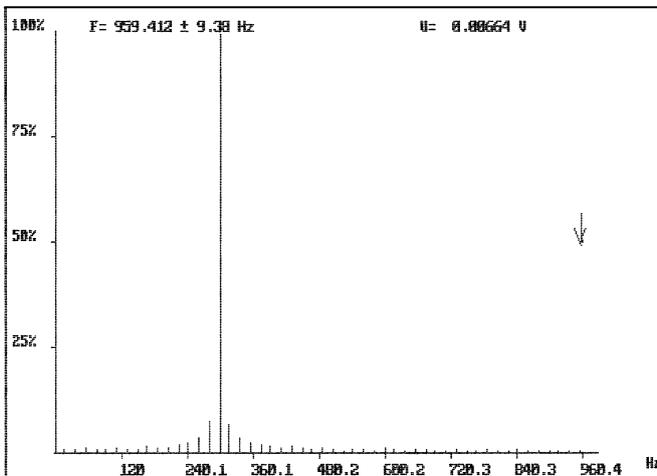


Figure 8 : Raie centrale et lobes latéraux produits par la T.F.
Si la symétrie ne semble pas rigoureusement respectée de part et d'autre de la raie centrale, cela est dû à l'utilisation de recopie d'écran.

On obtient une grande raie, flanquée de petites raies latérales d'amplitudes décroissantes, à mesure que l'on s'en écarte.

Cette figure est analogue à la figure de diffraction obtenue à l'infini si l'on éclaire une fente de largeur a uniformément.

La raie ou lobe central correspond à la tache de diffraction, et on appellera lobes secondaires les raies latérales.

La largeur du lobe central est $2 \cdot F_e/N$ soit 2 fois la résolution.

Les raies latérales sont produites par la T.F., et *ne sont pas* des composantes spectrales du signal.

L'inconvénient de ces lobes secondaires vient du fait qu'ils peuvent masquer ou rendre peu visibles des raies bien réelles : en échelle logarithmique on met ainsi en évidence dans le signal précédent, de la distorsion par harmonique 2 et 5, voir la figure 9.

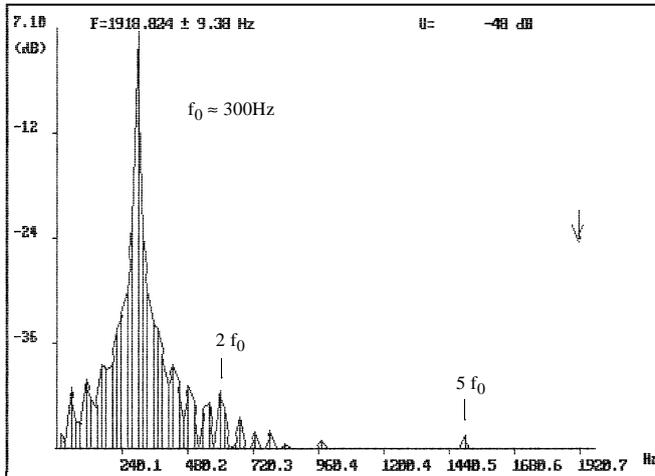


Figure 9 : Visualisation du spectre du signal de la figure 7, en échelle logarithmique. (0 dB correspond à la plus grande raie du spectre).

L'harmonique 2 est presque noyé dans les raies parasites produites par la T.F.

Avec une fenêtre de Hamming dite généralisée, le i -ème échantillon du signal est multiplié par :

$$\alpha + (1 - \alpha) \cdot \cos [2 \cdot \pi \cdot (i + N/2)/N] \quad \text{et} \quad \alpha = 0,54$$

(Pour $\alpha = 0,5$ on obtient une fenêtre de Hanning, la valeur de 0,54 optimise l'atténuation du premier lobe secondaire).

La largeur du lobe central devient $4 \cdot F_e/n$ les lobes secondaire sont

fortement atténués au prix d'une perte de résolution : (figure 10). Avec un fenêtre de Blackman donnée par :

$$0,42 + 0,5 \cdot \cos [2 \cdot \pi \cdot (i + N/2)/N] + 0,08 \cdot \cos [4 \cdot \pi \cdot (i + N/2)/N]$$

la largeur du lobe central passe à $6 \cdot F_c/N$ figure 11.

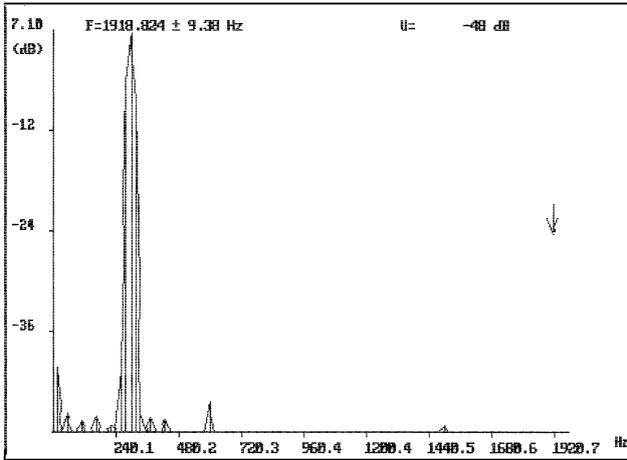


Figure 10 : Avec fenêtre de Hamming, la largeur, pour chaque raie, du lobe central est égale à 4 fois la résolution.

Les lobes secondaires ne cachent plus l'harmonique 2.

On observe, près de l'origine, un 1/2 lobe central correspondant à une fréquence nulle : composante continue créée par l'échantillonnage (signal observé de moyenne non-nulle).

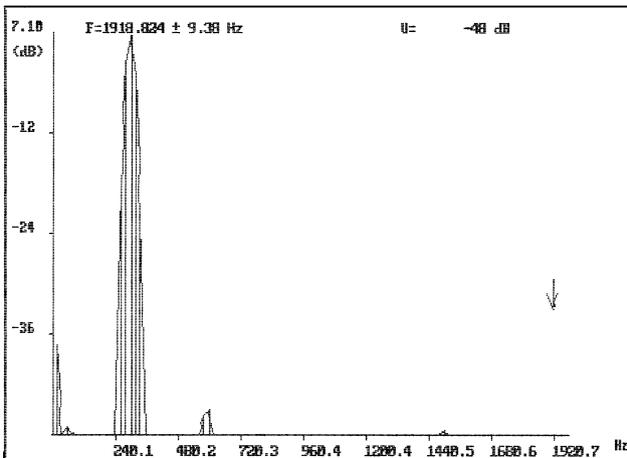


Figure 11 : Avec fenêtre de Blackman, la largeur du lobe central est 6 fois la résolution.

Revenons au spectre du signal carré de la figure 2, dans ce cas le signal n'est pas analysé sur un nombre entier de périodes et nous avons en plus un phénomène d'étalement des raies : l'amplitude de la raie cherchée, raie dont la fréquence n'est pas un multiple de la résolution, est distribuée sur les raies voisines les plus proches, de l'échantillonnage fréquentiel.

La raie unique est donc étalée sur un «paquet», ce phénomène d'étalement apparaît pour tous les partiels, avec des importances diverses, ce qui fait que les amplitudes relatives des raies considérées comme l'amplitude de la plus grande raie du paquet sont fausses, comme on le voit sur les figures 12 et 13.

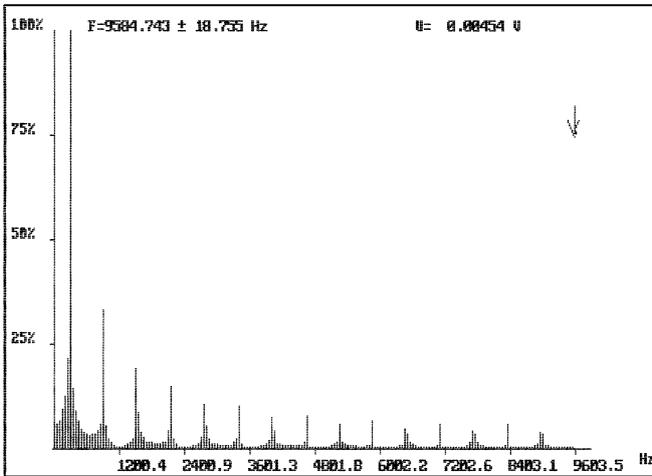


Figure 12 : Spectre du signal carré précédent calculé brutalement, sans fenêtre de pondération, et visualisé sans lissage de PARSEVAL.

On observe que la base des raies est très élargie (apparition de raies parasites) et que l'enveloppe spectrale s'éloigne sensiblement d'une hyperbole aux fréquences élevées et se met à onduler.

Recherche des 10 raies principales. Résolution 37.51 Hz. Fen. Rectangulaire		
Amplitude A=	2.1588 V	Fréquence F= 300.00 Hz Ordre K=8
Amplitude A=	0.7083 V	Fréquence F= 937.75 Hz Ordre K=25
Amplitude A=	0.4188 V	Fréquence F= 1537.91 Hz Ordre K=41
Amplitude A=	0.3172 V	Fréquence F= 2175.58 Hz Ordre K=58
Amplitude A=	0.2255 V	Fréquence F= 2775.74 Hz Ordre K=74
Amplitude A=	0.2125 V	Fréquence F= 3413.41 Hz Ordre K=91
Amplitude A=	0.1647 V	Fréquence F= 4651.24 Hz Ordre K=124
Amplitude A=	0.1557 V	Fréquence F= 4813.57 Hz Ordre K=137
Amplitude A=	0.1411 V	Fréquence F= 5889.07 Hz Ordre K=157
Amplitude A=	0.1284 V	Fréquence F= 37.51 Hz Ordre K=1

Figure 13 : La recherche des amplitudes des raies donne :

Fondamental sous évalué d'environ 11 %,

Des amplitudes relatives de raies erronées, en prenant le fondamental comme unité, on trouve :

- harmonique $3*f_0$ 0.33 erreur 1 %
- harmonique $5*f_0$ 0.191 erreur 4.5 %
- harmonique $7*f_0$ 0.1475 erreur 3 %.

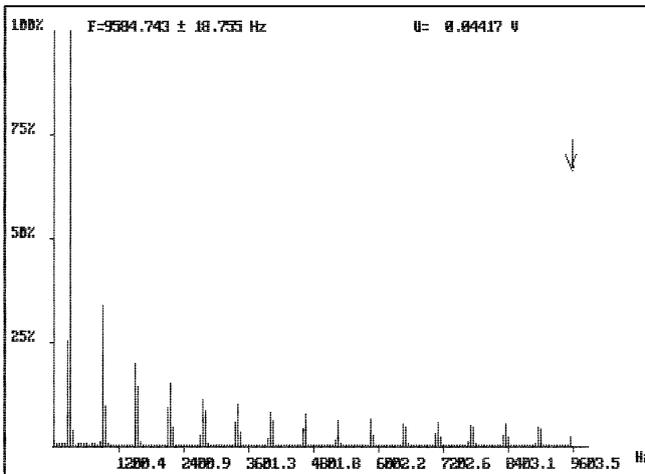


Figure 14 : Spectre du même signal recalculé en utilisant une fenêtre de HAMMING.

On remarque surtout la disparition des raies parasites en « pied de raie », par contre toutes les raies sont élargies et correspondent maintenant à un paquet contenant essentiellement 3 raies d'amplitudes non-négligeables.

Avec fenêtre de pondération l'étalement existe encore mais est indépendant de la fréquence de la raie les pieds de raie deviennent bien plus propres, mais il y a une perte de résolution.

Les amplitudes relatives des raies ne sont toujours pas correctes. Figures 14 et 15 avec une fenêtre de Hamming généralisée.

Recherche des 10 raies principales. Résolution 37.51 Hz. Fen. de Hanning			
Amplitude A=	1.9392 V	Fréquence F=	300.00 Hz Ordre K=8
Amplitude A=	0.6526 V	Fréquence F=	937.75 Hz Ordre K=25
Amplitude A=	0.3049 V	Fréquence F=	1537.91 Hz Ordre K=41
Amplitude A=	0.2882 V	Fréquence F=	2175.58 Hz Ordre K=58
Amplitude A=	0.2158 V	Fréquence F=	2775.74 Hz Ordre K=74
Amplitude A=	0.1905 V	Fréquence F=	3413.41 Hz Ordre K=91
Amplitude A=	0.1525 V	Fréquence F=	4013.57 Hz Ordre K=107
Amplitude A=	0.1471 V	Fréquence F=	4651.24 Hz Ordre K=124
Amplitude A=	0.1253 V	Fréquence F=	5309.07 Hz Ordre K=157
Amplitude A=	0.1201 V	Fréquence F=	5251.40 Hz Ordre K=140

Figure 15 : (Raies du spectre figure 14).

Les amplitudes ne sont toujours pas correctes, l'erreur sur le fondamental avoisine les 20 %, l'erreur sur l'harmonique 3 vaut environ 2 %, celle sur l'harmonique 5 environ 1 %, celle sur l'harmonique 7 environ 4 %.

• Traitement en aval du calcul de TFD : lissage spectral

Les grandeurs des raies spectrales sont entachées d'une erreur, nous pouvons utiliser, pour nous en affranchir, une technique classique dans le traitement numérique des données appelée le moyennage par groupe de points, utilisée pour lisser les courbes, d'où le terme de lissage spectral.

Il n'existe guère à notre connaissance de méthode qui ne se ramène en définitive à un moyennage.

Soit une grandeur physique de valeur X , mesurée pour la i -ème fois, la valeur exacte X_i et le résultat de la mesure x_i sont en général différents :

$$x_i = X_i + e_i$$

La grandeur X peut évoluer entre deux mesures, nous ne voulons pas dire que tous les X_i devraient être égaux.

Les différences e_i ne sont pas connues, mais, si les causes d'erreurs systématiques ont été éliminées, on peut espérer que les valeurs de e_i fluctuent de manière aléatoire autour d'une valeur moyenne nulle. En remplaçant la valeur x_i mesurée par la moyenne des x_i calculée sur un intervalle s'étendant de $i-p$ à $i+p$:

$$\bar{x}_i = \left(\sum_{j=i-p}^{j=i+p} x_j \right) / (2 \cdot p + 1) = \langle X \rangle + \langle e \rangle$$

nous obtenons une valeur qui ne diffère de la moyenne $\langle X \rangle$ sur le même intervalle de la valeur exacte que d'une quantité $\langle e \rangle$, moyenne des erreurs e_i . En prenant p suffisamment grand, $\langle e \rangle$ doit être proche de 0.

L'inconvénient de cette méthode est que seules les valeurs moyennes sur un intervalle de X peuvent être obtenues, et encore en prenant p grand, sinon le moyennage des erreurs est peu efficace, de plus le nombre d'échantillons utiles est divisé par $2 \cdot p + 1$ ce qui oblige, pour conserver un nombre suffisant de mesures, à un sur-échantillonnage important qui accroît la taille des tableaux en mémoire (le même traitement peut être effectué sur chaque point - sauf sur les p premiers éléments et sur les p derniers - mais le calcul doit être fait sur une copie du tableau et non plus «en place» ce qui occupe aussi de la mémoire).

Dans le domaine de l'analyse spectrale la méthode peut être adaptée de façon à ce qu'elle perde une bonne partie de ses inconvénients car les e_i *ne sont plus indépendants*.

Nous avons vu plus haut que la conservation de l'énergie entre les deux représentations temporelle et fréquentielle du signal est contenue dans l'identité de Parseval. Il existe donc une tranformation licite du point de vue de ce principe : l'énergie totale n'est pas modifiée si nous remplaçons tout groupe de raies contiguës par une raie unique qui transporte la même énergie que le groupe, soit en posant pour la raie n :

$$X_n^2 = \sum_{r=n-p}^{r=n+p} X_r^2 \quad (11)$$

et en prenant la racine carrée.

Le fenêtrage localise l'étalement de l'énergie et dans (11) les erreurs DOIVENT se compenser.

Avec fenêtre de Hamming généralisée, l'étalement de l'énergie porte sur 3 raies d'amplitudes non nulles : le maximum du paquet et les deux raies de part et d'autre. Il suffit de poser $p = 1$ dans la formule ci-dessus : un groupe de trois raies est remplacé par une raie unique (les autres raies du groupe sont remises à zéro). Le paramètre de

Parseval est la quantité $P = 2 \cdot p + 1$.

Cette opération ne dégrade évidemment pas la résolution par rapport au fenêtrage, et améliore énormément la précision sur l'estimation des amplitudes des raies figures 16 et 17.

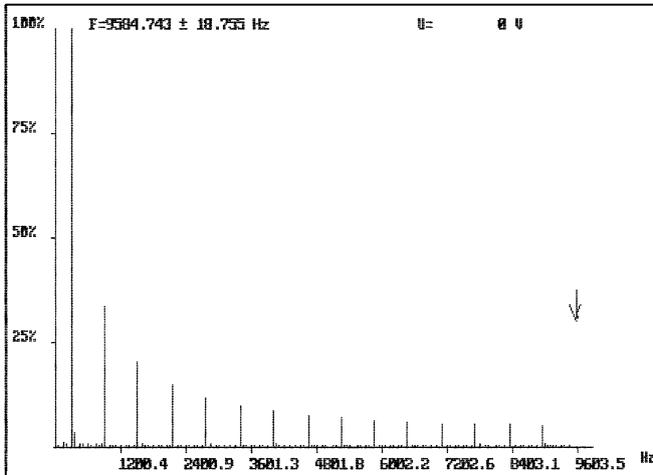


Figure 16 : Le spectre du même signal (figure 2), calculé avec fenêtre de Hamming et visualisé avec un lissage de PARSEVAL d'ordre 3, c'est-à-dire en calculant l'amplitude de la raie unique transportant la même énergie que le paquet précédent. L'ondulation de l'enveloppe spectrale n'est sensible qu'à des fréquences bien plus élevées (l'absence de filtre anti-repliement se fait peut-être aussi sentir).

Recherche des 10 raies principales. Résolution 37.51 Hz. Fen. de Hanning			
Amplitude A=	2.3941 V	Fréquence F=	389.88 Hz Ordre K=8
Amplitude A=	0.7971 V	Fréquence F=	937.75 Hz Ordre K=25
Amplitude A=	0.4811 V	Fréquence F=	1537.91 Hz Ordre K=41
Amplitude A=	0.3477 V	Fréquence F=	2175.58 Hz Ordre K=58
Amplitude A=	0.2759 V	Fréquence F=	2775.74 Hz Ordre K=74
Amplitude A=	0.2283 V	Fréquence F=	3413.41 Hz Ordre K=91
Amplitude A=	0.1968 V	Fréquence F=	4013.57 Hz Ordre K=107
Amplitude A=	0.1745 V	Fréquence F=	4651.24 Hz Ordre K=124
Amplitude A=	0.1588 V	Fréquence F=	5251.40 Hz Ordre K=140
Amplitude A=	0.1485 V	Fréquence F=	5889.87 Hz Ordre K=157

Figure 17 : On constate que l'amplitude du fondamental est obtenue à 0.2 % près. Les amplitudes relatives des diverses raies, toujours par rapport au fondamental pris comme unité, s'écartent de la théorie respectivement

- harmonique 3 erreur 0.3 %
- harmonique 5 erreur 0.9 %
- harmonique 7 erreur 2 %.

L'algorithme de traitement est d'une simplicité considérable :

- calculer le spectre par TFR simple (N échantillons fréquentiels),

- balayer le spectre pour rechercher les maximums locaux (autrement dit les sommets des paquets de raies),
- évaluer les amplitudes correctes à l'aide de (11).

Avantage de la méthode :

- le lissage peut avoir lieu seulement au moment de l'affichage des résultats puisqu'il n'est pas intégré au calcul de TFD proprement dit,
- il est adaptable à n'importe quel type de fenêtrage (y compris rectangulaire), on fera simplement varier le «paramètre de Parseval» pour tenir compte des largeurs d'étalement dues à chaque fenêtre particulière.

2. ONDE SINUSOÏDALE MODULÉE EN FRÉQUENCE

L'ensemble des propriétés vues pour les signaux carrés se retrouve dans ce cas, comme on peut le voir sur les figures 18 à 24.

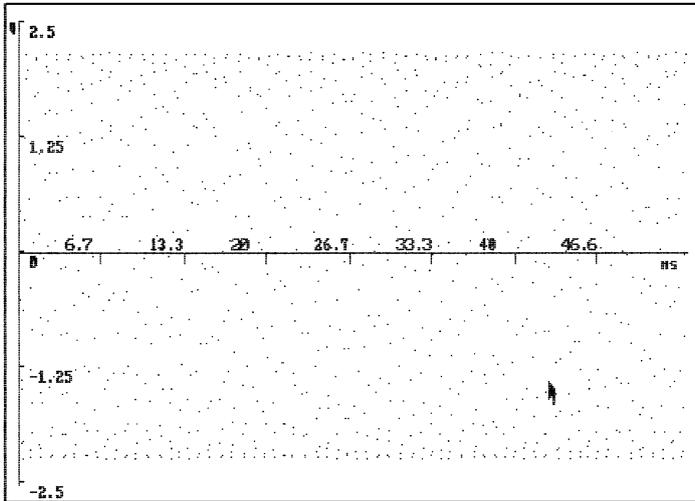


Figure 18 : Tension sinusoidale modulée sinusoidalement en fréquence. Porteuse à 1 200 Hz, modulante à 150 Hz (ce sont les valeurs affichées sur les G.B.F.). L'échantillonnage donne un nuage de points dans lequel aucune périodicité n'apparaît clairement.
Comment envisager dans ce cas de régler la fréquence d'échantillonnage ?

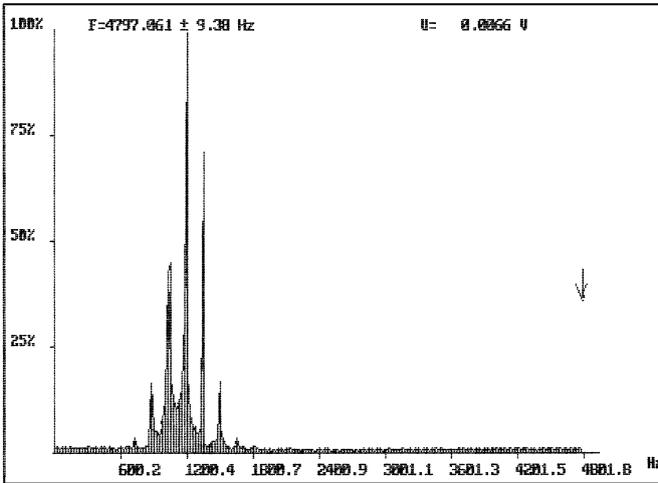


Figure 19 : Spectre du signal précédent calculé avec une fenêtre rectangulaire (donc sans pondération des échantillons).

On devrait obtenir un spectre symétrique par rapport à la raie centrale qui est la porteuse (l'indice de modulation a été choisi faible dans ce but).

Les fréquences sont évaluées correctement à la résolution près qui est de 19 Hz environ.

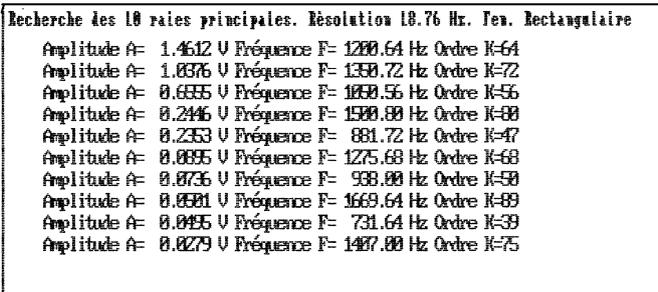


Figure 20 : La différence relative entre les deux raies latérales, en principe égales, est de l'ordre de 40 %.

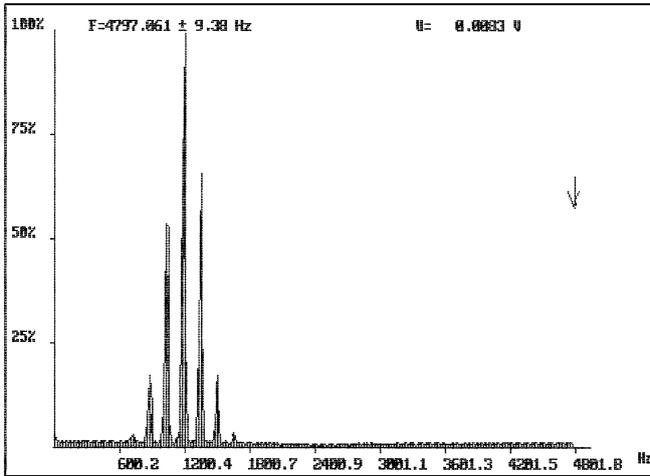


Figure 21 : Spectre du signal précédent (figure 18) calculé avec une fenêtre de HANNING.

L'amélioration est nette.

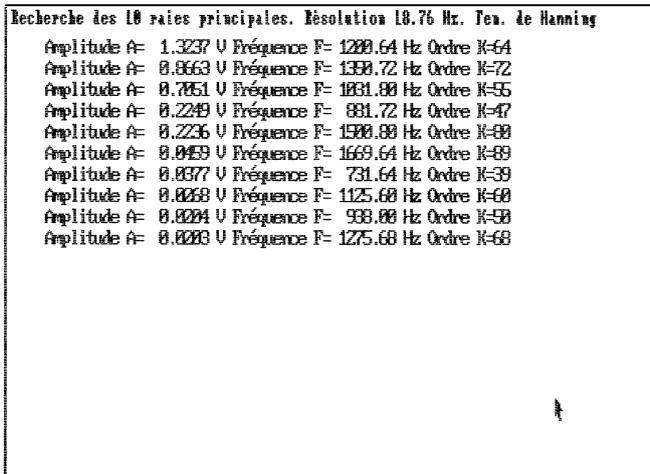


Figure 22 : La différence de grandeur entre les deux principales raies latérales n'est plus «que» de 20 %.

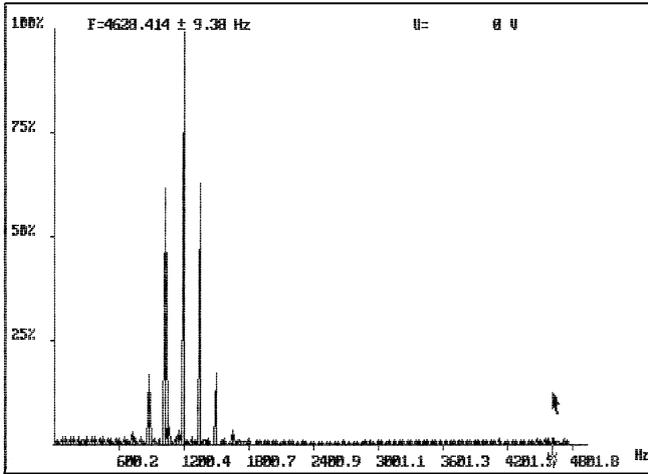


Figure 23 : Spectre du même signal avec lissage de PARSEVAL d'ordre 3. La largeur apparente de raies est due à l'utilisation d'une loupe logicielle qui dilate d'un facteur 4 l'échelle des fréquences.

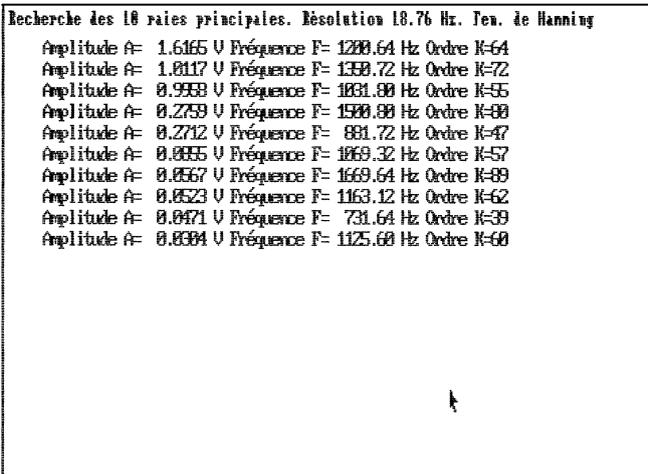


Figure 24 : La symétrie du spectre est rétablie, de façon acceptable (à 1 % près environ).

CONCLUSION

Il résulte de ce qui précède que les choses ne sont pas tellement simples, en définitive. On ne perdra pas de vue que le but est d'obtenir un spectre convenable, pour cela on peut distinguer deux types d'utilisations :

a) Pour une analyse spectrale de routine, ou si l'on ne veut pas (si l'on ne peut pas...) expliciter les notions en causes, le paramétrage du logiciel sera fait une bonne fois pour toutes :

- choisir une fréquence d'échantillonnage, la plus grande possible (pour éviter le repliement),
- choisir un nombre d'échantillons le plus grand possible (pour affiner la résolution),
- choisir une fenêtre (HAMMING c'est très bien),
- choisir un coefficient de lissage spectral (PARSEVAL, on prendra 3 ce qui est bien suffisant pour une fenêtre de Hamming), etc...

...Ces tâches incombent au professeur, qui ne les expliquera pas davantage qu'il n'explique le rôle de tous les boutons de l'oscilloscope à mémoire !

b) Pour une utilisation plus particulière il peut être avantageux de calculer le spectre avec des fenêtres différentes, et des lissages plus ou moins radicaux, il est bon que les paramètres soient accessibles.

Même si les paramètres deviennent invisibles, encore faut-il qu'ils existent et qu'ils aient une valeur correcte ; à quoi ils correspondent et comment les choisir en fonction du problème posé : c'était le but de cet article.

BIBLIOGRAPHIE

J. ESQUIEU - *Traitement numérique du signal* - B.U.P. n° 754.

J. ESQUIEU - *Analyse spectrale numérique* - B.U.P. n° 754.

Sons et séries de FOURIER :

FEYNMAN - *Cours de physique de FEYNMAN : Mécanique* - Tome 2 - (InterÉditions).

Résonance série et spectres :

Cours de Physique de VERKELEY - Tome 3 : Ondes - (Armand Colin).

Transformation de FOURIER et signaux en général :

F. de COULON - *Théorie et traitement des signaux* - (Dunod).

Algorithmes de traitements :

M. KUNT - *Traitement numérique des signaux* - (Dunod).

Théorème de Shannon :

J. AUVRAY - *Électronique des signaux échantillonnés et numériques* - (Dunod).

Annexe :
Démonstration de l'identité de PARSEVAL,
conservation de l'énergie

La puissance transportée par le signal est proportionnelle au carré de son amplitude, donc l'énergie du signal échantillonné s'obtient en sommant sur la durée d'observation $T = N \cdot T_e$:

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} x(k)^2$$

en remplaçant $x(k)$ par son expression :

$$E = \sum_{k=0}^{N-1} \left[\left(\frac{1}{N} \right)^2 \left(\sum_{n=0}^{N-1} X(n) \cdot e^{+2\pi jnk/N} \right) \left(\sum_{m=0}^{N-1} X(m)^* \cdot e^{-2\pi jkm/N} \right) \right]$$

le produit des sommes sur n et m donne :

$$P(k) = \sum_n |X(n)|^2 + \sum_n \sum_{m \neq n} X(n) X^*(m) e^{-2\pi jk(m-n)/N}$$

d'où E en sommant sur les k , comme somme de deux termes :

$$E = \left[\frac{1}{N} \right]^2 \sum_k P(k) = \frac{1}{N} \sum_n |X(n)|^2 + 0$$

en effet, en intervertissant les ordres de sommation :

$$\sum_k \sum_n \sum_{m \neq n} X(n) X^*(m) e^{-2\pi jk(m-n)/N} =$$

$$\sum_n \sum_{m \neq n} \sum_k X(n) X^*(m) e^{-2\pi jk(m-n)/N}$$

On reconnaît la somme des vecteurs de Fresnel associés aux N racines, complexes de l'unité ; somme qui est nulle.

On obtient l'identité dite de PARSEVAL :

$$\sum_k x(k)^2 = \frac{1}{N} \sum_n |X(n)|^2$$