

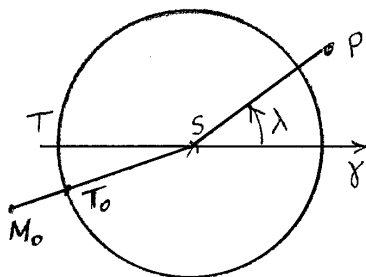
# Képler et l'orbite de Mars

par J.-P. ROSENSTIEHL

Lycée Montesquieu - 72000 Le Mans

Historiquement, Képler en se basant sur les mesures de Tycho Brahé, a établi les lois classiques portant son nom. Plus modestement, nous pouvons proposer à nos élèves ayant choisi l'option Sciences expérimentales en classe de première (unité U1 Observateurs et mouvement), de *construire* l'orbite de la planète Mars en utilisant la «méthode de Képler».

## 1. LONGITUDE HÉLIOCENTRIQUE D'UNE PLANÈTE



S : le soleil

P : une planète

$\gamma$  : le point vernal (direction origine  $S\gamma$ ). On voit S dans la direction  $S\gamma$  à partir de la Terre à l'équinoxe de printemps.

Pour toute planète :  $\lambda = S\gamma, SP$  ; pour la Terre le 20 ou 21 mars on a  $\lambda_T = 180^\circ$ .

## 2. OPPOSITIONS DE MARS

Il y a opposition si les longitudes héliocentriques de Mars et de la Terre sont égales  $\lambda_M = \lambda_T$ .

Vu de la Terre, Mars se lève à l'instant où le Soleil se couche. Ainsi, S, T<sub>0</sub>, M<sub>0</sub> sont approximativement alignés (on néglige l'inclinaison de l'orbite de Mars sur l'écliptique).

Si les orbites de T et de M étaient circulaires et coplanaires, chacune parcourue à vitesse constante, le phénomène serait périodique. En fait, l'étude des valeurs consignées dans le tableau (donnant notamment des indications sur les 12 dernières oppositions de Mars), montre qu'il n'en est rien. Voir tableau en annexe.

La date est notée sous la forme AAAA.MMDD avec AAAA = année MM = mois et DD = jour.

*Exemple* : 1993.0107 signifie le 7 janvier 1993.

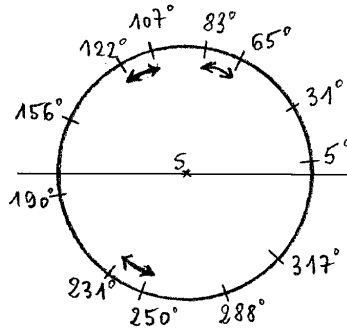
N représente le nombre de jours écoulés depuis le 0 janvier 1901. Ainsi, le premier jour du XX<sup>ème</sup> siècle correspond à N = 1. Cette colonne permet de calculer la durée écoulée entre deux dates ; entre les oppositions de 90 et de 75, il s'est écoulé un nombre de jours égal à  $32838 - 27377 = 5471$ .

### 3. PÉRIODE DE RÉVOLUTION SYNODIQUE

Il est facile de constater, à partir du tableau, que la durée qui sépare 2 oppositions successives, n'est pas constante. Elle varie entre 764 et 811 jours ; cause : l'excentricité des orbites (surtout celle de Mars). La période de révolution synodique est la durée moyenne qui sépare deux oppositions successives. Il faudrait un grand nombre d'oppositions pour obtenir une bonne valeur. Il est possible cependant d'obtenir une valeur approchée à partir d'un nombre restreint d'oppositions. On calcule la moyenne de toute une série d'oppositions, la première et la dernière doivent avoir lieu dans des régions voisines de l'orbite de Mars. Cette période est notée  $\theta$ .

Nous retiendrons les oppositions de 78 et de 93 ; puis de 75 et de 90 et enfin celles de 69 et de 84. On obtient respectivement  $5464 / 7 = 780.57$  ensuite  $5461 / 7 = 780.14$  et finalement  $5459 / 7 = 779.86$  la moyenne est 780.20 jours (les tables donnent 779.94 jours).

On peut remarquer que 2 oppositions séparées de 15 ans se produisent dans des conditions assez semblables : Mars visible dans la même constellation.



Longitudes de 12 oppositions de Mars

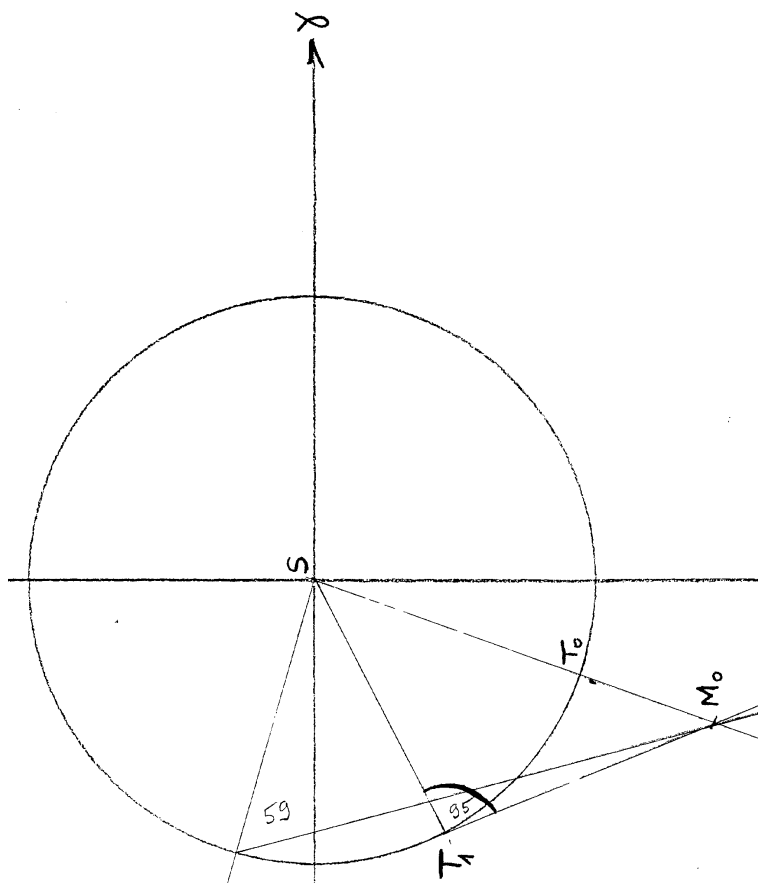
#### 4. PÉRIODE DE RÉVOLUTION SIDÉRALE

Il s'agit de la durée d'une révolution autour du Soleil (repère de Copernic). Soit  $T_T$  celle de la Terre et  $T_M$  celle de Mars ; cette dernière n'est pas directement accessible à l'observation. On fait le calcul : entre 2 oppositions successives, la Terre effectue un tour de plus que Mars, d'où  $2\pi = (\omega_T - \omega_M) \theta$  on en déduit  $T_M$  car  $\frac{1}{\theta} = \frac{1}{T_T} - \frac{1}{T_M}$

$T_M = \theta * T_T / (\theta - T_T)$  soit  $T_M = 686.80$  j (les tables donnent 686.98 j).

#### 5. CONSTRUCTION DE L'ORBITE DE MARS

On trace un cercle de rayon 5 cm (orbite de la Terre supposée circulaire). L'idée de Képler est la suivante : on part de l'opposition  $ST_0M_0$ . Ensuite, après une révolution de Mars, celle-ci se retrouve *au même point*  $M_0$ . Mais la Terre est alors en  $T_1$  : elle n'a pas fait 2 tours et, de ce fait, l'angle  $\alpha = T_1 S, T_1 M_0$  est accessible à la mesure (voir le tableau en annexe) ; on obtient ainsi le point d'intersection entre  $ST_0$  et  $T_1 M_0$  soit  $M_0$  ; on refait le même raisonnement lorsque Mars a bouclé un nouveau tour (voir schéma). On fait la construction pour plusieurs oppositions, 5 par exemple, ce qui donne 5 points de l'orbite. En résumé il faut utiliser les positions de la Terre sur son orbite pour les dates  $t + T_M$  puis  $t + 2 T_M$ ,  $t$  étant la date d'une opposition et les angles  $\alpha$  correspondants ; toutes ces valeurs sont disponibles dans le tableau. Les points numérotés de 1 à 5 sur la figure B correspondent aux positions de Mars obtenues de la manière décrite précédemment lors des oppositions de 69, 71, 73, 78 et 82.



**Figure A :** Opposition de 1969  $\lambda = 250^\circ$ .

En toute rigueur, l'orbite de Mars est une ellipse. Cependant on peut admettre avec une bonne approximation qu'elle est circulaire à condition de décaler le centre qui n'est pas confondu avec S (voir complément). Soit O le centre cherché. Pour les trouver, deux méthodes sont utilisables. La première, assez longue, consiste à tracer les médiatrices de plusieurs couples de points jalonnant la trajectoire et à adopter la position moyenne de leurs intersections. Une deuxième méthode est l'utilisation de séries de cercles concentriques préalablement tracés sur papier calque et de procéder par superposition. On pose  $c = OS$ .

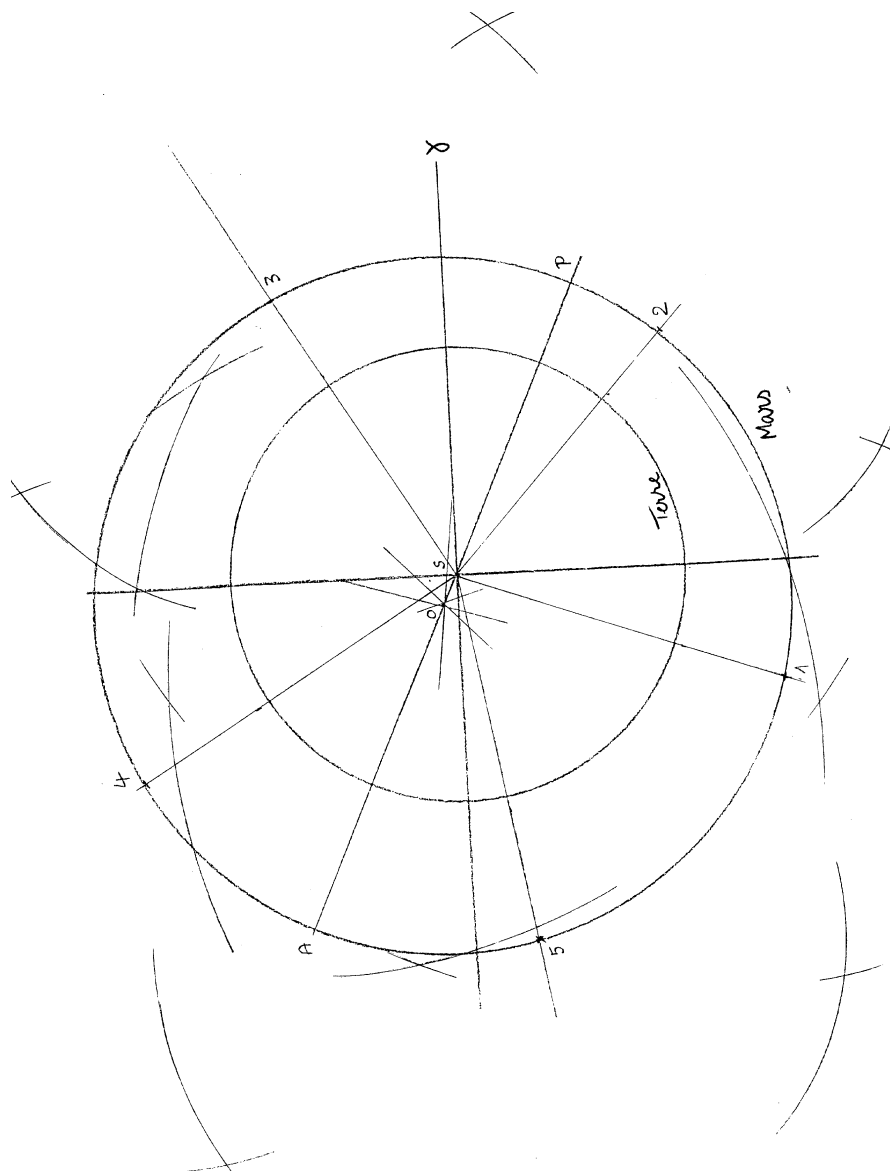


Figure B

Le rayon de ce cercle donne le demi-grand axe de l'orbite cherchée assimilée à un cercle ; soit  $a = 7.6$  cm ce qui correspond à  $7.6/5 = 1.52$  U.A. La droite OS coupe l'orbite en P (périhélie) et en A (aphélie) ; on mesure SP et SA ce qui conduit à 1.38 et 1.66 U.A.

Calcul de l'excentricité :  $e = c/a = 0.70 / 7.6 = 0.092$ . Mesure de la longitude du périhélie :  $\lambda_p = 336^\circ$ .

## 6. PROLONGEMENTS POSSIBLES

Vérification de la 3<sup>ème</sup> loi de Képler :

$a^3/T^2 = 1$  pour la Terre avec  $T_T = 1$  an et  $a = 1$  U.A.

$$= (1.52)^3 / (1.88)^2 = 0.993 \text{ pour Mars } T_M = 686.8/365.25 = 1.88 \text{ an.}$$

Calculs des vitesses héliocentriques de Mars :

– vitesse moyenne =  $2\pi a/T_M = 24.1 \text{ km s}^{-1}$ ,

– vitesse au périhélie : entre les positions 2 et 3 (de part et d'autre de P)  $\lambda$  varie de  $74^\circ$  en 120 jours ce qui donne :

$$v_p = 2\pi * 1.38 * 74 * 150 * 10^6 / (360 * 120 * 86400) = 25.8 \text{ km s}^{-1},$$

– vitesse à l'aphélie : on trouve de même  $v_a = 22 \text{ km s}^{-1}$  ; (à partir des positions 4 et 5).

Ces variations illustrent bien la loi des aires qu'il est possible de vérifier.

## 7. REMARQUES CONCERNANT L'OBSERVATION

Il est intéressant de mettre en place les constellations du zodiaque à l'extérieur de la figure B (voir l'article sur le «mouvement apparent du Soleil...», B.U.P. n° 759, décembre 1993).

En reportant les valeurs des longitudes pour les années 95, 97 et 99 on peut prévoir les oppositions de Mars successivement dans le Cancer, le Lion, la Vierge.

**COMPLÉMENT**

O est le centre d'un cercle et d'une ellipse. Avec des notations classiques :

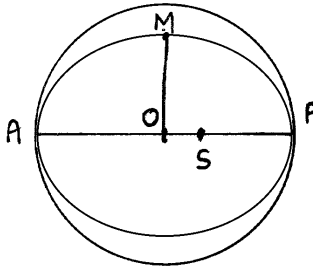
$$OM = b \quad OP = a$$

$$OS = c = ae$$

$e$  = excentricité (faible)

$$b = a \sqrt{1 - e^2} \approx a \left( 1 - \frac{e^2}{2} \right)$$

si  $e \approx 0,1$   $\frac{e^2}{2} = 5 \times 10^{-3}$  ainsi  $b \approx a$  précision 0,5 %.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] Cahiers CLAIRAUT - Bulletin de liaison du CLEA.
- [2] A. KOYRÉ : *La révolution astronomique*, Éditions Hermann.
- [3] MGJ MINNAERT : *Practical work in elementary astronomy*, Éditions Reidel.
- [4] S. BOUIGUES : *Calcul astronomique pour amateurs*, Éditions Masson.

*Annexe*  
*Tableau des valeurs*

---

| Date          | N     | $\lambda_M^\circ$ | $\lambda_T^\circ$ | $\alpha^\circ$ |
|---------------|-------|-------------------|-------------------|----------------|
| 1 { 1969.0531 | 24988 | 250               | 250               | 180            |
| 1 { 1971.0418 | 25675 | 250               | 207               | 95             |
| 1 { 1973.0305 | 26362 | 250               | 164               | 59             |
| 2 { 1971.0810 | 25789 | 317               | 317               | 180            |
| 2 { 1973.0627 | 26476 | 317               | 275               | 92             |
| 2 { 1975.0515 | 27163 | 317               | 234               | 59             |
| 3 { 1973.1025 | 26596 | 31                | 31                | 180            |
| 3 { 1975.0912 | 27283 | 31                | 349               | 94             |
| 3 { 1977.0730 | 27970 | 31                | 307               | 60             |
| 1975.1215     | 27377 | 83                | 83                | 180            |
| 4 { 1978.0122 | 28146 | 122               | 122               | 180            |
| 4 { 1979.1210 | 28833 | 122               | 77                | 97.5           |
| 4 { 1981.1027 | 29520 | 122               | 33                | 59.5           |
| 1980.0225     | 28910 | 156               | 156               | 180            |
| 5 { 1982.0331 | 29675 | 190               | 190               | 180            |
| 5 { 1984.0216 | 30362 | 190               | 147               | 100            |
| 5 { 1986.0103 | 31049 | 190               | 102               | 60             |
| 1984.0511     | 30447 | 231               | 231               | 180            |
| 1986.0710     | 31237 | 288               | 288               | 180            |
| 1988.0928     | 32048 | 5                 | 5                 | 180            |
| 1990.1127     | 32838 | 65                | 65                | 180            |
| 1993.0107     | 33610 | 107               | 107               | 180            |
| 1995.0212     | 34376 | 143               | 143               | 180            |
| 1997.0317     | 35140 | 177               | 177               | 180            |
| 1999.0424     | 35908 | 214               | 214               | 180            |