Approximation sinusoïdale par paire différentielle

par J. CANDAU
Professeur agrégé en Génie Électrique
Lycée d'Altitude - 05100 Briançon

1. INTRODUCTION

Les générateurs de signaux basses fréquences (triangle, carré, sinus) constituent généralement un chapitre important des cours d'électronique de par la variété des fonctions de base qu'ils associent. Bien que l'obtention d'une sinusoïde approchée par conformateur à diodes (approximation par segments) ait largement été décrite, un autre principe d'approximation sinusoïdale, à la fois moins connu, plus simple et plus performant, est rencontré dans les schémas. Il met en œuvre une paire différentielle à transistors et l'étude qui suit se propose :

a) de décrire le principe de l'approximation sinusoïdale par paire différentielle dénaturée,

b) de mettre en forme les méthodes de calculs et d'optimisation,

c) de permettre une approche expérimentale à travers un schéma structurel simple.

2. PRINCIPE DE L'APPROXIMATION SINUSOIDALE

2.1. Principe (Figure 1)

L'idée directrice est de mettre à profit la non-linéarité intrinsèque de l'amplificateur à paire différentielle dénaturée (présence des résistances d'émetteur R_0). L'allure de la caractéristique de transfert d'une telle structure, donnée sur le graphe n° 1, peut ressembler à une fonction sinusoïdale entre $-\pi/2$ et $+\pi/2$ à condition de contrôler judicieusement l'incursion dans le domaine non-linéraire.

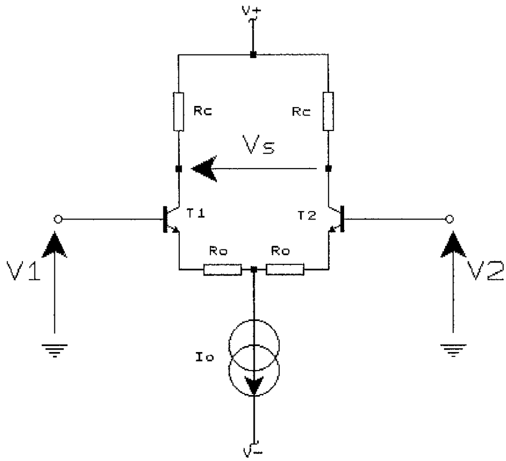
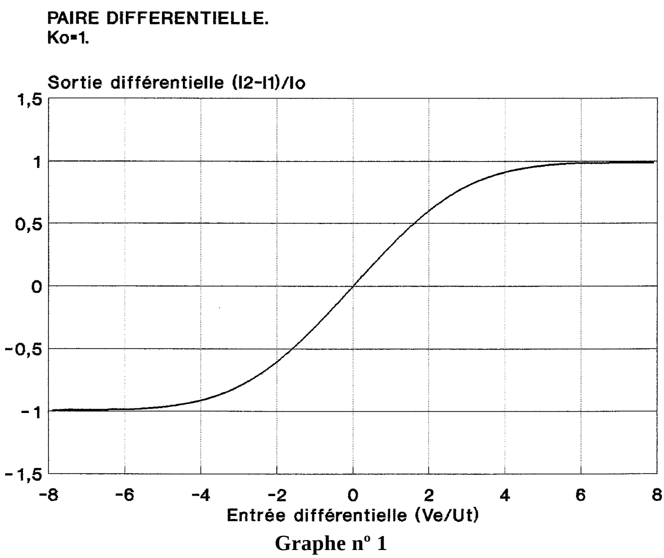
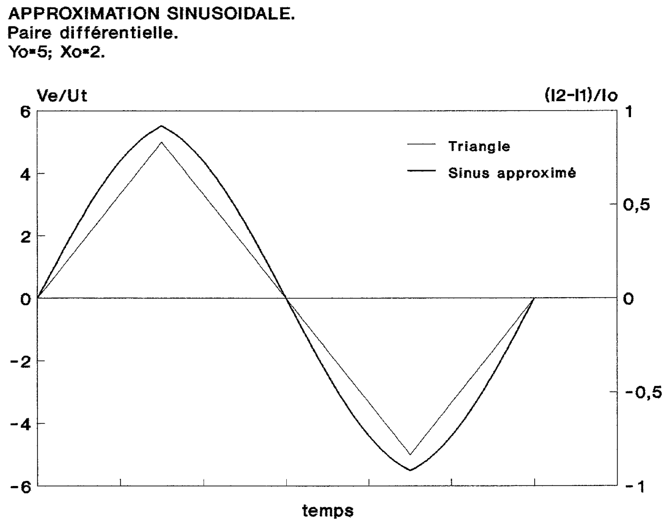


Figure 1

En appliquant une tension d'entrée différentielle $V_e = (V_2 - V_1)$ triangulaire centrée d'amplitude telle que l'excursion en sortie déborde suffisamment du domaine linéaire d'amplification, l'axe horizontal (V_e/U_t) devient équivalent à l'axe du temps (V_e est fonction linéaire du temps) et la sortie, obtenue par un jeu de symétries successives, a donc bien l'allure sinusoïdale donnée sur le graphe n° 2.



Graphe n° 1



Graphe n° 2

2.2. Mise en équations

Rappel : pour un transistor bipolaire placé dans les conditions suivantes :

– faible niveau d'injection (faible charge stockée),

– polarisation directe dans le domaine linéaire,

le courant collecteur est donné par la formule suivante :

$$I_c = I_s \, . \, \exp\left(\frac{V_{be}}{U_t}\right), \qquad \text{avec} \quad U_t = \frac{k \, . \, T}{q}$$

où : k = constante de Boltzmann ($8{,}620.10^{-5}$ eV/K),

T = température absolue,

q = charge de l'électron ($1{,}602.10^{-19}$ C),

V_{be} = tension base-émetteur,

I_s = courant de «saturation», fonction de la température, du matériau (nature et dopages), et de la géométrie de la jonction.

Remarque : pour $T = 300\,K$, $U_t \approx 26\,mV$.

Pour le schéma de la figure 1, nous pouvons écrire les équations suivantes :

$$\begin{cases} I_1 + I_2 = I_0 = \text{cste} \\ V_e = V_2 - V_1 = V_{be_2} - V_{be_1} + R_0 \cdot (I_2 - I_1) \end{cases}$$

En posant :

$$\delta I = (I_2 - I_1) \;\; ; \;\; x = \frac{\delta I}{I_0} \;\; ; \;\; K_0 = \frac{R_0 \cdot I_0}{U_t} \;\; ; \;\; y = \frac{V_e}{U_t}$$

Il vient :

$$y = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+x}{1-x}\right) + K_0 \cdot x \qquad \text{(I)}$$

où Ln représente le logarithme Néperien.

L'équation (I) donne ainsi la caractéristique de transfert en courant représentée sur le graphe n° 1 sous la forme $x = F_0(y)$. Remarquons que l'expression analytique de $F_0(y)$ ne nous est pas connue.

La tension de sortie V_s donnée par :

$$V_s = R_c \cdot (I_2 - I_1) = R_c \cdot I_0 \cdot x$$

conserve donc a un coefficient multiplicateur près la même caractéristique de transfert. De ce fait, nous raisonnerons par la suite uniquement sur l'équation (I) qui donnera la forme de l'approximation sinusoïdale.

En appliquant à l'entrée une tension triangulaire symétrique et centrée d'amplitude crête V_{eM}, on obtient donc en sortie (x) une forme d'onde plus ou moins sinusoïdale (graphe 2) et le *«modelage»* de cette sinusoïde approximée est contrôlé par les deux paramètres suivants (nombres sans dimensions) :

$$K_0 = \frac{R_0 \cdot I_0}{U_t} \quad \text{et} \quad Y_0 = \frac{V_{eM}}{U_t}$$

Le graphe n° 2 correspond aux valeurs arbitraire $K_0 = 2$ et $Y_0 = 5$.

2.3. Notations - Définitions

Pour des raisons évidentes de symétrie, l'étude sera menée sur un quart de période, ce qui correspond à l'intervalle $[0;\pi/2]$ soit $[0;Y_0]$.

En posant : $\theta = \dfrac{\pi}{2 \cdot Y_0} \cdot y$ on aura : $x = F_0(y) = F_1(\theta)$.

La fonction $F_1(\theta)$ définit donc la fonction d'approximation sinusoïdale sur l'intervalle $[0;\pi/2]$. On retrouve une fonction du temps en posant classiquement : $\theta = \omega \cdot t$

Un couple de valeur (K_0,Y_0) définit ainsi une sinusoïde approximée $F_1(\theta)$ que nous caractériserons de la manière suivante :

E_1 = amplitude de fondamentale,

$E_d(\theta)$ = fonction résiduelle = $F_1(\theta) - E_1 \cdot \sin(\theta)$. E_d est donc naturellement la somme de tous les harmoniques restants.

La qualité de l'approximation sera évaluée grâce au taux de distorsion α calculé de la façon suivante :

$$\alpha = \frac{\text{Valeur efficace de la fonction résiduelle}}{\text{Fondamental}} = \frac{(E_d)_{eff}}{E_1}$$

Le problème de l'approximation consistera à ajuster les valeurs de deux paramètres qui sont :

– l'excursion maximale en tension d'entrée (paramètre Y_0),

– la réaction d'émetteur (paramètre K_0),

pour approcher au mieux une fonction sinusoïdale pure.

3. APPROCHE ANALYTIQUE

Une approche analytique n'est pas a priori évidente. En effet, la forme de l'équation (I) ne permet pas de trouver l'expression de $F_0(y)$.

Cependant on peut envisager de faire coïncider «au mieux» la fonction d'approximation $F_1(\theta)$ et la sinusoïde «cible» en identifiant autant qu'il est possible les développements limités des deux fonctions.

Le développement limité au cinquième ordre de (I) donne :

$$y \approx (2+K_0)\,.\,x + \frac{2\,.\,x^3}{3} + \frac{2\,.\,x^5}{5} + \ldots \qquad \text{(II)}$$

Par ailleurs on souhaite avoir $x = A\,.\,\mathrm{Sin}(\theta)$, soit $\theta = \mathrm{Arcsin}(x/A)$. Il suffit de prendre le développement limité de la fonction Arcsin(x) appliqué dans ce cas et nous obtenons :

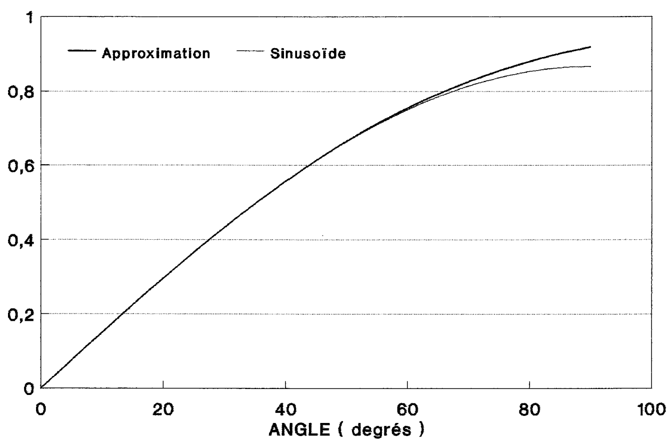
$$\theta = \frac{\pi\,.\,y}{2\,.\,Y_0} = \frac{x}{A} + \frac{x^3}{6\,.\,A^3} + \frac{3\,.\,x^5}{40\,.\,A^5} + \ldots \qquad \text{(III)}$$

En identifiant (II) et (III) au cinquième ordre, on obtient :

$$A = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ; \quad K_o = 1 \quad \text{et} \quad Y_o = \frac{3\,.\,\sqrt{3}\,.\,\pi}{4} \approx 4{,}081$$

Le graphe n° 3 donne la fonction d'approximation et la sinusoïde «cible» dont l'amplitude vaut 0,866. Malgré l'identification jusqu'au cinquième ordre ce type d'approche amène à une approximation qui, satisfaisante au voisinage de zéro, va en se dégradant vers les grandes amplitudes (à partir de 60° nettement) où les termes de rangs élevés deviennent prépondérants. Le taux de distorsion α = 1,2 % montre les limites de ce type d'approche.

APPROXIMATION SINUSOIDALE.
Paire différentielle.
Ko=1; Yo=4,081; Distorsion=1,2%.



Graphe n° 3

4. OPTIMISATION

La mise en œuvre d'un algorithme adéquat sur calculateur permet de résoudre *numériquement* l'équation : $\alpha = \text{Fonction}(K_0, Y_0)$. Autrement dit on peut obtenir directement le taux de distorsion α correspondant à un couple de *valeurs numériques* quelconques (K_0,Y_0) fourni initialement à l'algorithme de calcul.

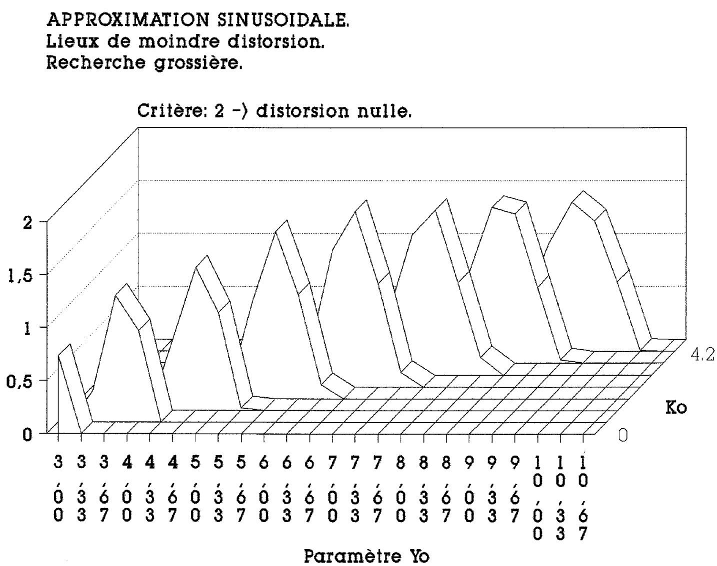
En ne s'intéressant qu'aux cas favorables où la distorsion est inférieure à 2 %, on peut définir le critère d'optimisation (dont on recherchera le maximum) de la façon suivante :

$$\{C = 2 - 100 \cdot \alpha \ ; \ \text{si } C < 0 \ \text{ alors } C = 0\}$$

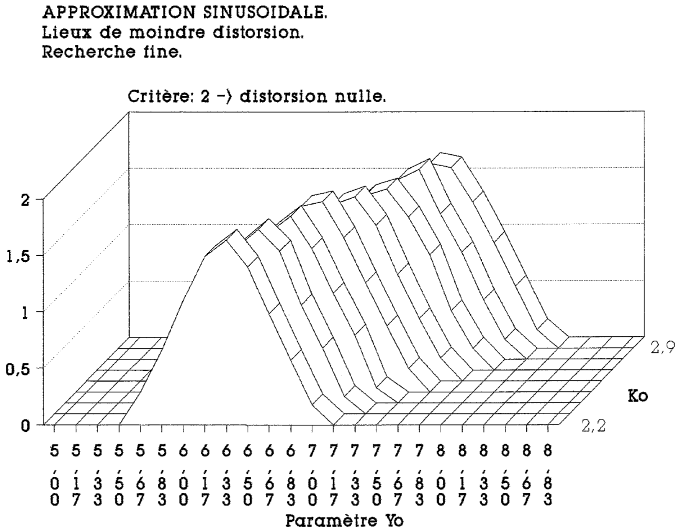
On procède alors à l'exploration systématique de C en fonction de (K_0,Y_0).

– dans un premier temps un maillage grossier en (K_0,Y_0) permet de repérer approximativement les lieux de moindre distorsion (graphe n° 4),

– dans un deuxième temps un maillage plus fin montre que l'optimum ne se présente pas comme un pic, mais plutôt comme une crête (graphe n° 5) le long de laquelle le taux de distorsion ne varie quasiment pas et vaut sensiblement 0,2 %.



Graphe n° 4



Graphe n° 5

Conclusion : pour $K_0 \in [2{,}2 ; 2{,}9]$ le critère de moindre distorsion suit une crête dont la hauteur varie peu et dont l'équation projetée est approximativement $Y_0 = 2{,}65 + 1{,}65 \cdot K_0$.

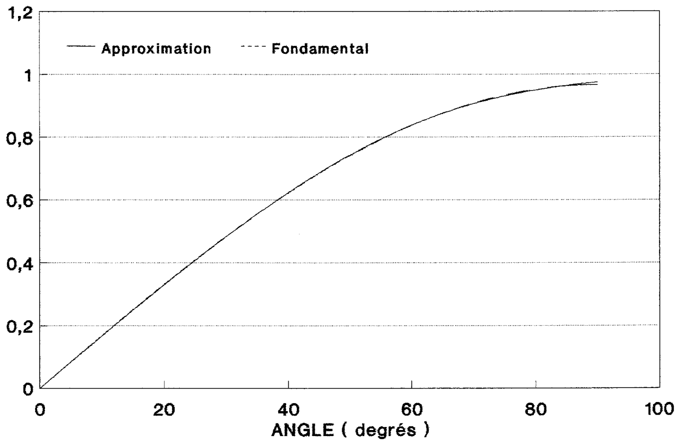
Le point particulier suivant pourra être retenu :

$$K_0 = 2{,}55 \ ; \ Y_0 = 6{,}85 \ ; \ \alpha \approx 0{,}2\,\%$$

Le graphe n° 6 montre la qualité de l'approximation : la courbe d'approximation et le fondamental se confondent pratiquement. Le graphe n° 7 montre la sinusoïde approximée et la fonction résiduelle : malgré la qualité de l'approximation, l'effet de «petite pointe» au sommet de la sinusoïde, souvent rencontrée sur des générateurs de signaux, persiste. Remarquons également que par raison de symétrie seuls existent des harmoniques d'ordres impairs, celui de rang 5 étant facilement repérable sur la fonction résiduelle.

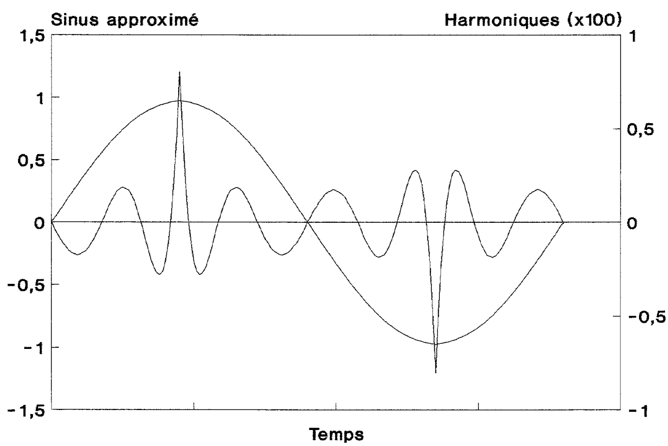
Conséquence : le fait que l'optimum ne se présente pas comme un *pic* (ou un *dôme*) mais en fait comme une *crête d'égale hauteur* est remarquable. Cela nous permettra au niveau du schéma structurel de nous passer d'un double réglage (à la fois sur Y_0 et sur K_0). Il suffira de fixer avec suffisamment de précision un paramètre (pour nous il s'agira de Y_0) et de rechercher le minimum de distorsion en jouant sur l'autre paramètre (K_0) par le biais d'un élément ajustable.

APPROXIMATION SINUSOIDALE.
Paire différentielle.
Ko=2,55; Yo=6,85; Distorsion=0,2%.



Graphe nº 6

APPROXIMATION SINUSOIDALE.
Paire différentielle.
Yo=6,85; Ko=2,55; Distorsion=0,2%.



Graphe nº 7

5. MONTAGE PRATIQUE

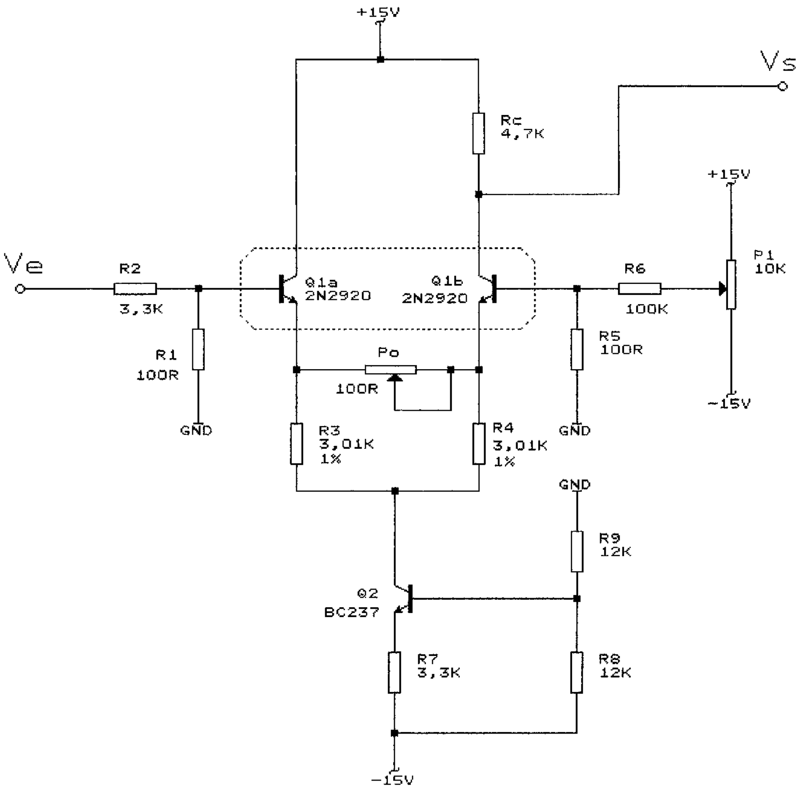


Figure 2

5.1. Schéma structurel

Le schéma structurel de la figure 2 est quelque peu différent du schéma de principe de la figure 1 et appelle les commentaires suivants :

a) Il est important de disposer d'une paire différentielle intégrée comme le 2N2920 qui garantira :

– même température pour les deux transistors,

– courants de saturation I_S quasi-identiques $\Rightarrow$ tension de décalage faible.

b) La tension triangulaire d'entrée $V_{eM} = 6{,}85 \cdot U_t \approx 178\,mV$ n'est pas appliquée directement sur la base Q_{1a}. Il n'est pas facile de manipuler une tension aussi faible. On appliquera donc en V_e une tension triangulaire d'amplitude crête 6 V qui, au travers du pont R_1, R_2 sera ramenée à :

$$V_{eM} = \frac{100}{3\,300 + 100} \times 6 \approx 176{,}5 \text{ mV}$$

c) La sortie n'est pas prélevée en mode différentiel, mais uniquement sur le collecteur de Q_{1b}. Cela est possible du fait de la très grande réjection de mode commun apportée par la source de courant I_0 : l'équation de I_2 est analogue à l'équation (I) à un coefficient 1/2 près et à un décalage près dû à la polarisation. La forme de l'approximation sinusoïdale reste donc la même.

d) Il est prévu sur la base de Q_{1b} un dispositif de compensation de la tension de décalage de la paire différentielle $Q_{1a} - Q_{1b}$. Il est en effet important de pouvoir rétablir la symétrie du schéma que nous avons supposée dans nos calculs, sans quoi les harmoniques d'ordres pairs induits par la dissymétrie abaisseraient la qualité de l'approximation.

e) Le réglage de K_0 par action sur I_0 ne serait pas judicieux car il rendrait variable la polarisation des transistors de la paire différentielle. I_0 est donc une source de courant constant dont la structure est classique et donne $I_0 \approx 2$ mA.

f) Enfin le réseau P_0, R_3, R_4 appelle un commentaire plus détaillé.

Le paramètre Y_0 ayant été fixé, il convient de pouvoir ajuster le paramètre K_0 ($\approx 2{,}55$), soit pour un courant I_0 de 2 mA :

$R_0 = \dfrac{U_t \cdot K_0}{I_0} \approx 33\,\Omega$ pour la structure de la figure 1.

Le réglage simultané de deux ajustables R_0 semblant relever du défi, nous trouvons enfin ici une application utile des théorèmes de Kennely (transformations étoile $\Leftrightarrow$ triangle) (voir figure 3). Avec la condition $R_3 = R_4 = R$ (ici résistances à 1 %) on trouve facilement en appliquant les formules de transformation :

$$R_0 = \frac{P_0}{2 \cdot \left(1 + \frac{P_0}{2 \cdot R}\right)} \approx \frac{P_0}{2} \quad \text{car } 2 \cdot R >>> P_0$$

$$R' = \frac{R}{2 \cdot \left(1 + \frac{P_0}{2 \cdot R}\right)} \approx \frac{R}{2}$$

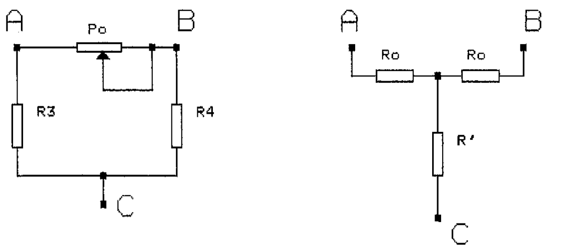


Figure 3

Cette structure se comporte donc comme si on ajustait simultanément deux résistances R_0 identiques. Au réglage $P_0 = 2 \cdot R_0 \approx 66\,\Omega$.

Les valeurs de R_3 et R_4 (R) ne sont pas critiques. Il suffit de vérifier les points suivants :

a) $R >>> R_0$,

b) $R_3 = R_4$ résistances identiques (à 1 % par exemple) pour conserver la symétrie du schéma de principe initial,

c) Chute de tension dans R' ($\approx R \cdot I_0/2$ = cste) compatible avec le fonctionnement de la source de courant I_0 (non-saturation de Q_2).

5.2. **Résultats**

En l'absence de distorsiomètre nous avons procédé de la façon suivante :

a) Câblage de la structure de la figure 2,

b) Réglage de V_e : fréquence de travail ≈ 500 Hz, amplitude crête à 6 V : avec un voltmètre classique (non RMS) en positon AC :

$$V = \frac{\pi}{2 \cdot \sqrt{2}} \cdot \frac{V_{e\,Maxi}}{2} \approx 3{,}332\ \text{Volts}$$

c) Visualisation de V_s ainsi que des effets des réglages de P_0 et de P_1,

d) Câblage du filtre à variables d'états de la figure 4 :

– la sortie passe-bande E_1 nous permet de visualiser et de mesurer l'amplitude de fondamental grâce à un voltmètre conventionnel en position AC.

– la sortie «réjecteur de bande» Ed nous permet de visualiser et de mesurer (voltmètre RMS) la tension résiduelle (voir graphe n° 7) amplifiée d'un facteur approximativement égal à $120/10{,}5 \approx 11{,}4$.

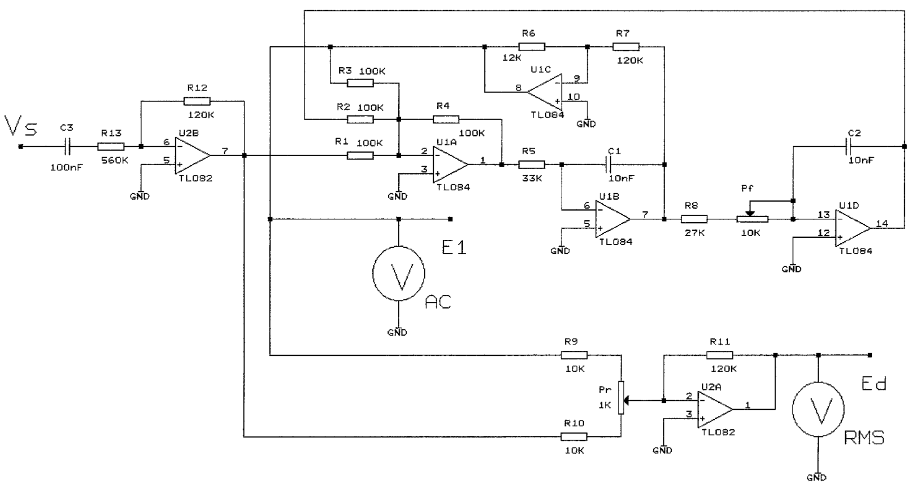


Figure 4

Après avoir affiné les réglages du filtre (fréquence centrale par P_f et réjection par P_r), puis optimisé l'approximation sinusoïdale en minimisant la tension résiduelle par le jeu de P_0 et P_1, nous avons mesuré un fondamental de 0,653 V et une tension résiduelle efficace de 2 mV qui donnent donc une distorsion de 0,3 % environ.

On remarquera lors de la visualisation de la tension résiduelle le point intéressant suivant : les dissymétries de la structure (tension de décalage notamment) engendrent des harmoniques d'ordres pairs en principe absentes pour des raisons évidentes de symétrie. L'action sur P_1 doit donc, en rétablissant la symétrie du montage, faire disparaître ces harmoniques d'ordres pairs facilement reconnaissables.

5.3. Performances

L'optimisation de la structure a essentiellement porté sur la qualité de l'approximation sinusoïdale et la distorsion obtenue expérimentalement est effectivement très faible. Cette qualité est conservée sur une large gamme de fréquences (DC à plusieurs centaines de KHz, voire quelques MHz) et le montage est donc particulièrement adapté, aux applications des générateurs «basses fréquences» qui, par principe, fournissent une tension triangulaire (charge et décharge d'un condensateur à courant constant) sur des gammes de fréquences similaires.

Il faut cependant remarquer que de fortes variations de température dégraderaient par le biais de U_t ($U_t = K \cdot T/q$) les performances du montage en l'absence d'élements de compensation.

Ces performances très honorables alliées à la facilité de mise en œuvre, à la simplicité de réglage, à l'utilisation de composants courants font de ce montage une alternative attrayante au plus classique conformateur à diodes (cf. annexe). Pour des performances similaires (distorsion, plage de fréquences), un conformateur à quatre segments présente de réelles difficultés de mise en œuvre expérimentale : maîtrise des seuils de commutation, multiplicité des valeurs de résistances non normalisables. Des structures intégrées telles que celle du circuit ICL8038 de Intersil permettent de résoudre à la fabrication de tels problèmes et sont donc pleinement justifiées.

6. CONCLUSION

Hormis le fait que bien des utilisateurs de générateurs de signaux connaîtront désormais l'origine de «la petite pointe» au sommet de leur sinusoïde habituelle, l'étude qui précède devrait permettre de réunir en les illustrant de façon concrète divers aspects de la formation de base d'un électronicien :

– études de fonction, écriture de développements limités (maths appliquées),

– amplificateur différentiel à transistors, caractéristiques de transfert, non-linéarité, théorèmes de Kennely, mise en équations des structures, notions de fondamental et d'harmoniques (physique appliquée),

– dimensionnement des composants passifs (atténuateur, source de courant, ...), notion de tension de décalage (technologie),

– étude expérimentale : valeurs efficaces vraies, filtrage, réglage par recherche de minimum, ... (travaux pratiques).

Espérons que le concours de leurs disciplines fondamentales sur un même sujet puissent renforcer l'intérêt et la motivation des futurs électroniciens pour l'électronique analogique, trop souvent délaissée au profit de techniques numériques dont les aspects formateurs ne sont pas toujours évidents.

BIBLIOGRAPHIE

Conformateur à diodes :

– J. AUVRAY : *«Électronique des signaux analogiques»*, Dunod Université.

– *«Data Acquisition Handbook»*, Intersil (ICL 8038).

Approximation par paire différentielle :

– *«Linear Applications»* - Vol II, AN 115 - National Semiconductor

– BK Precision - Function Generator - Model 3010.

Annexe
Principe de l'approximation par conformateur à diodes

Le schéma de principe est celui de la figure 5. La tension d'entrée est un signal triangulaire centré. Le signal de sortie est pris au point commun des résistances. Les mises en conduction successives de diodes permettent d'obtenir entre V_s et V_e une relation linéaire par morceaux : l'atténuation de V_e par le réseau de résistances dépend du niveau même de V_e. On obtient ainsi une courbe en segments de droite définis par les seuils de commutation E_1 à E_4 et les coefficients d'atténuation qui sont successivement :

$$K_0 = 1$$

$$K_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_0}$$

$$K_2 = \frac{(R_1 \parallel R_2)}{(R_1 \parallel R_2) + R_0}$$

$$K_3 = \frac{(R_1 \parallel R_2 \parallel R_3)}{(R_1 \parallel R_2 \parallel R_3) + R_0}$$

$$K_4 = 0$$

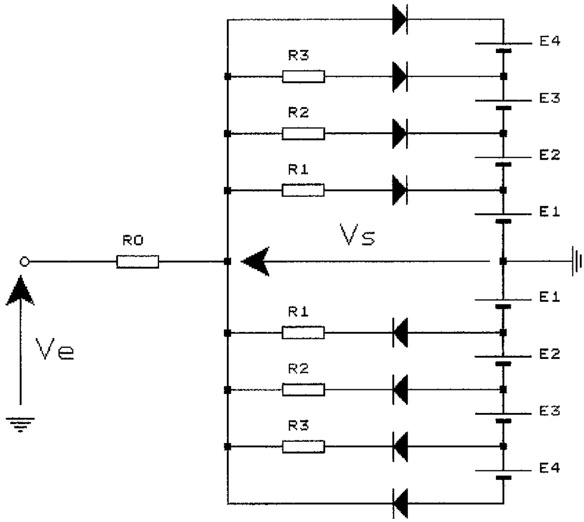


Figure 5

L'optimisation de l'approximation dans le cas du conformateur à diodes porte donc sur les paramètres K_1, K_2, K_3, E_1, E_2, E_3 et E_4.