

# Pendules couplés : étude des fréquences propres par analyse de Fourier

par Charles de IZARRA et Olivier VALLÉE  
Centre Universitaire de Bourges, rue Gaston Berger, B.P. 4043 - 18028  
Bourges Cedex

---

## RÉSUMÉ

On présente une expérience de mécanique simple dans laquelle on étudie trois pendules couplés par des ressorts. La vitesse des pendules au cours du temps est échantillonnée à l'aide d'un oscilloscope numérique interfacé avec un calculateur de bureau. Le traitement numérique des données (calcul de la transformée de Fourier du signal échantillonné) permet de déterminer avec précision les fréquences propres du système mécanique, et de mesurer leur évolution en fonction du couplage.

## 1. INTRODUCTION - MONTAGE ÉTUDIÉ

L'introduction de l'informatique dans les expériences de sciences physiques permet d'effectuer très facilement des traitements complexes sur des données expérimentales échantillonnées. Dans cet article, on exploite le mode «ROLL» ou mode défilement disponible en standard sur de nombreux oscilloscopes numériques et sur des cartes d'acquisition destinées à l'enseignement pour enregistrer le mouvement de trois pendules couplés par des ressorts. Le traitement des données consiste essentiellement en un calcul de transformée de Fourier afin de déterminer les fréquences propres du système mécanique.

Le montage proposé est représenté sur la figure 1. Il est constitué de trois pendules identiques de masses  $M$  et de moments d'inertie  $I$  par rapport aux points de suspension  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ . Le centre de masse d'un pendule est appelé  $G$ , et  $L = O_iG$ . Les 3 pendules sont couplés au moyen de 2 ressorts identiques de constante de rappel  $k$  et de masses négligeables face à la masse des pendules. Les ressorts sont fixés à une distance  $d$  du point de suspension des pendules. Les deux ressorts extrêmes servent à obtenir un couplage nul lorsque les trois pendules

sont verticaux. Dans la plupart des ouvrages de mécanique, on se contente de 2 ressorts, mais pour un montage réel, il est impératif d'ajouter les deux ressorts extrêmes qui, bien évidemment, ont une influence sur les fréquences propres du système.

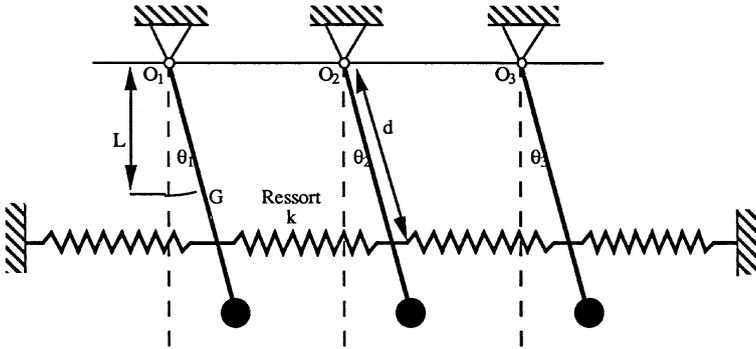


Figure 1 : Montage étudié.

## 2. ÉTUDE THÉORIQUE

Afin de déterminer les équations de mouvement des trois pendules couplés, il est commode d'utiliser le formalisme lagrangien [1]. Les coordonnées généralisées qui permettent de décrire la dynamique du système sont les angles  $\theta_i$ , où l'indice  $i = 1, 2, 3$  (voir figure 1). Dans toute la suite, on négligera les frottements, ce qui est justifié si l'étude ne dure que le temps de quelques périodes. Le système mécanique peut alors être considéré comme conservatif. En utilisant les équations de Lagrange, il est aisé d'établir les trois équations couplées décrivant la dynamique du système dans le cas des petites oscillations :

$$I\ddot{\theta}_1 + (MgL + 2kd^2) \theta_1 - kd^2 \theta_2 = 0$$

$$I\ddot{\theta}_2 - kd^2 \theta_1 + (MgL + 2kd^2) \theta_2 - kd^2 \theta_3 = 0$$

$$I\ddot{\theta}_3 - kd^2 \theta_2 + (MgL + 2kd^2) \theta_3 = 0$$

Pour déterminer les fréquences propres, il est avantageux d'utiliser un formalisme matriciel [2] ; les 3 équations précédentes peuvent être

mises sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \text{I} & 0 & 0 \\ 0 & \text{I} & 0 \\ 0 & 0 & \text{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{MgL} + 2kd^2 & -kd^2 & 0 \\ -kd^2 & \text{MgL} + 2kd^2 & -kd^2 \\ 0 & -kd^2 & \text{MgL} + 2kd^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

ou encore, avec des notations plus concises :

$$\underline{\underline{\text{M}}} \ddot{\underline{\underline{\theta}}} + \underline{\underline{\text{K}}} \underline{\underline{\theta}} = \underline{\underline{0}}$$

où  $\underline{\underline{\text{M}}}$  est la matrice des masses et  $\underline{\underline{\text{K}}}$  la matrice des rigidités.

En introduisant le paramètre  $\mu$ , sans dimension, proportionnel au couplage et défini par :  $\mu = \frac{kd^2}{\text{MgL}}$ , la matrice des rigidités devient :

$$\underline{\underline{\text{K}}} = \text{MgL} \begin{bmatrix} 1 + 2\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 + 2\mu & -\mu \\ 0 & -\mu & 1 + 2\mu \end{bmatrix}$$

En multipliant l'équation (1) par la matrice  $\underline{\underline{\text{M}}}^{-1}$ , on fait apparaître la matrice dynamique  $\underline{\underline{\text{A}}} = \underline{\underline{\text{M}}}^{-1} \underline{\underline{\text{K}}}$  :

$$\underline{\underline{\text{A}}} = \frac{\text{MgL}}{\text{I}} \begin{bmatrix} 1 + 2\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 + 2\mu & -\mu \\ 0 & -\mu & 1 + 2\mu \end{bmatrix}$$

Les pulsations propres (au carré) du système sont les valeurs propres  $\delta$  de la matrice  $\underline{\underline{\text{A}}}$  :

$$\delta_1 = \frac{\text{I}}{\text{MgL}} (1 + 2\mu - \sqrt{2}\mu)$$

$$\delta_2 = \frac{\text{I}}{\text{MgL}} (1 + 2\mu)$$

$$\delta_3 = \frac{\text{I}}{\text{MgL}} (1 + 2\mu + \sqrt{2}\mu)$$

En appelant  $\omega_0 = \sqrt{\frac{I}{MgL}}$  la pulsation propre d'un pendule libre, les 3 pulsations propres du système sont :

$$\omega_1 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\mu - \sqrt{2\mu}}$$

$$\omega_2 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\mu}$$

$$\omega_3 = \omega_0 \sqrt{1 + 2\mu + \sqrt{2\mu}}$$

ou encore, en introduisant les fréquences  $f_i$  données par  $f_i = \frac{\omega_i}{2\pi}$  :

$$f_1 = f_0 \sqrt{1 + 2\mu - \sqrt{2\mu}}$$

$$f_2 = f_0 \sqrt{1 + 2\mu}$$

$$f_3 = f_0 \sqrt{1 + 2\mu + \sqrt{2\mu}}$$

Il est aisé de vérifier que les trois fréquences propres vérifient la relation :

$$2f_2^2 = f_1^2 + f_3^2 \quad (2)$$

Les trois vecteurs propres associés aux valeurs propres déterminées plus haut sont :

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

et permettent d'écrire la solution des équations de mouvement couplées. Les 6 constantes d'intégration nécessaires à la connaissance complète du mouvement ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$ ,  $\varphi_3$ ) peuvent être déterminées à l'aide des conditions initiales (élongation et vitesses des trois pendules à  $t = 0$ ).

$$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + C \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \cos(\omega_3 t + \varphi_3) \quad (3)$$

En choisissant convenablement les conditions initiales, on peut exciter un mode de vibration particulier. Mais en règle générale, le mouvement d'un des pendules est la superposition des trois modes de vibration, ce qui donne un mouvement d'apparence très compliquée (la relation (3) est la somme de trois fonctions sinusoïdales de périodes et d'amplitudes différentes).

### 3. ANALYSE HARMONIQUE

Il est bien connu que toute fonction périodique  $S(x)$  et de période  $T$  peut être développée en série de Fourier [3], sous la forme :

$$S(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2\pi nx/T) + b_n \sin(2\pi nx/T)$$

où  $a_n$  et  $b_n$  représentent les coefficients de Fourier de  $S(x)$ . Le calcul de la Transformée de Fourier de  $S(x)$  échantillonné sous la forme d'une série de points permet de calculer la valeur numérique de  $(a_n^2 + b_n^2)$  qui représente le spectre de  $S(x)$  et qui donne la contribution de la fréquence  $n/T$  dans le signal  $S(x)$ . Étant donné que le signal  $S(x)$  est formé par la somme de 3 fonctions harmoniques de fréquences  $f_1$ ,  $f_2$  et  $f_3$ , il est évident que le spectre de Fourier de  $S(x)$  sera composé de 3 pics.

Le calcul direct de la transformée de Fourier d'un signal échantillonné est excessivement coûteux en temps de calcul : c'est pourquoi il est préférable d'utiliser un algorithme de Transformée de Fourier Rapide (T.F.R. ou F.F.T (Fast Fourier Transform)). De nombreux programmes de calculs de T.F.R. sont disponibles dans la littérature [4], en «freeware» ou en catalogue (METRIX, LEYBOLD, JEULIN...).

## 4. MATÉRIEL UTILISÉ

### 4.1. Les pendules

Les pendules utilisés (de marque Leybold) sont constitués d'une lame métallique d'une cinquantaine de centimètres de long sur trois centimètres de large. Une extrémité de la lame métallique est fixée sur l'axe d'un moteur à courant continu utilisé en générateur de courant (voir figure 2). La bobine du moteur, lorsqu'elle tourne, est le siège d'une force électromotrice induite, donc d'un courant  $i(t)$  qui est directement proportionnel à la vitesse angulaire du pendule. Les deux

bornes de sortie du moteur sont connectées à un oscilloscope qui permet l'enregistrement de  $d\theta/dt$ . Le long de la lame, des trous régulièrement espacés permettent la fixation des ressorts de couplage en différentes positions.

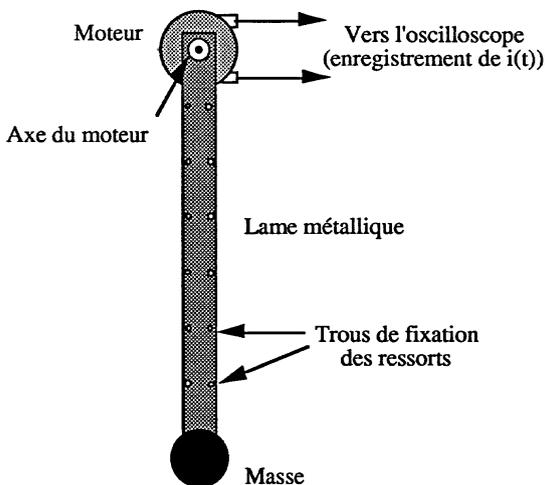


Figure 2 : Pendule utilisé.

#### 4.2. Acquisition des données

Actuellement, la plupart des constructeurs de matériel pédagogique (Leybold, Jeulin...) proposent des systèmes permettant de développer des expériences assistées par ordinateurs (en abrégé ExAO). Ces appareils sont construits autour de cartes d'acquisition enfichables dans le bus d'extension des micro-ordinateurs. Il s'accompagnent de programmes spécifiques permettant de réaliser diverses expériences.

Pour notre part, nous avons préféré éviter ce type de carte d'acquisition, et utiliser des oscilloscopes à mémoire numérique (METRIX OX7520) équipés d'une interface série RS-232. Les raisons de ce choix sont diverses : tout d'abord, l'oscilloscope, qu'il soit analogique ou numérique est un appareil de mesure de base auquel est souvent dédiée une séance d'étude au laboratoire. Autrement dit, les élèves ou les étudiants doivent savoir maîtriser ce type d'appareil. Les fonctions proprement numériques de l'oscilloscope numérique n'en compliquent pas le mode d'emploi, bien au contraire ! Rappelons qu'au niveau du

coût, un oscilloscope numérique est environ 3 fois plus cher qu'un oscilloscope analogique. Comme échantillonneur de données, l'oscilloscope numérique est très largement supérieur à toute carte d'acquisition enfichable, car un échantillonnage à 20 MHz est maintenant très courant. La profondeur mémoire, c'est-à-dire le nombre de canaux mémoire disponibles pour stocker les points échantillonnés est de l'ordre de 2 000 dans les machines bon marché. Un autre aspect important est la résolution «variable» de l'oscilloscope numérique. Si la conversion analogique/numérique est réalisée sur 8 bits, il est toujours possible d'agir sur le gain de l'amplificateur d'entrée de l'oscilloscope et de toujours échantillonner sur 8 bits pleine échelle. Enfin, d'autres spécificités propres aux oscilloscopes numériques les rendent extrêmement performants : tel est le cas du mode défilement (ou MODE ROLL en anglais) qui permet l'étude de phénomènes très lents (oscillateurs mécaniques par exemple) avec une base de temps de plusieurs dizaines de seconde par division. Cette fonction remplace avantageusement un traceur papier  $(x,t)$  ou  $(x,y)$  (voir la figure 3).

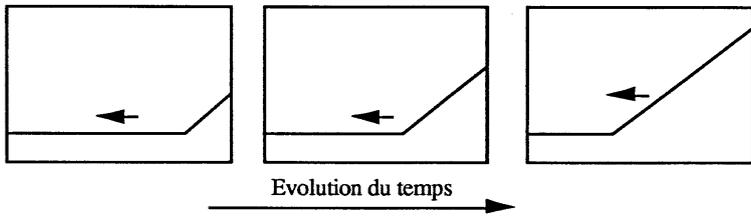


Figure 3 : Graphique illustrant le MODE ROLL.

#### 4.3. Traitement des données

Les données échantillonnées par l'oscilloscope numérique sont transférées par la voie série RS 232 jusque dans la mémoire d'un ordinateur ou elles peuvent être traitées. Bien que la programmation d'une interface série ne présente aucune difficulté, nous avons préféré utiliser un logiciel commercial (logiciel LMETRIX commercialisé par METRIX) qui gère le transfert des données entre l'oscilloscope et l'ordinateur, et qui permet de calculer directement la FFT d'un signal temporel. En plus de la transformée de Fourier, ce logiciel offre la possibilité d'effectuer des traitements mathématiques très variés sur les signaux échantillonnés (intégration, différentiation, filtrage...).

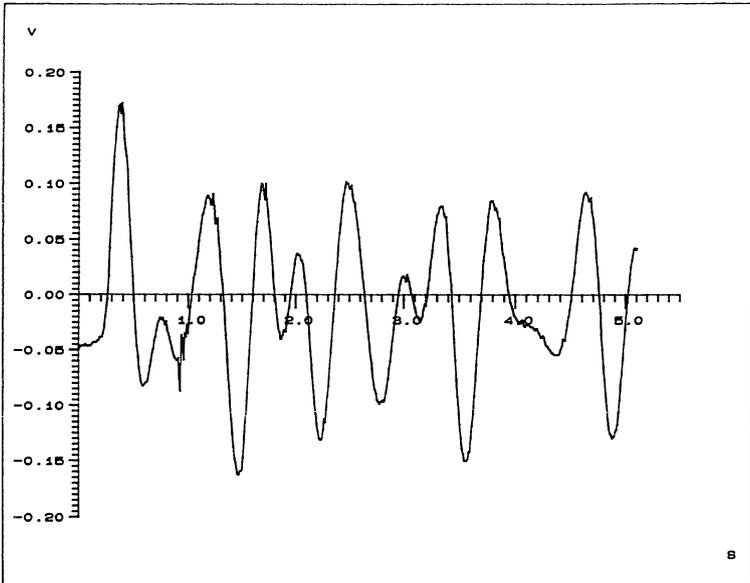
## 5. MESURES ET RÉSULTATS

Les caractéristiques du matériel utilisé sont résumées dans le tableau qui suit, et peuvent faire l'objet de mesures dans une première partie de l'expérience.

Masse d'un pendule	0,183 kg
Distance L (voir figure 1)	0,32 m
Moment d'inertie d'un pendule (I)	0,0224 kg.m <sup>2</sup>
Constante de rappel d'un ressort (k)	25,8 N/m

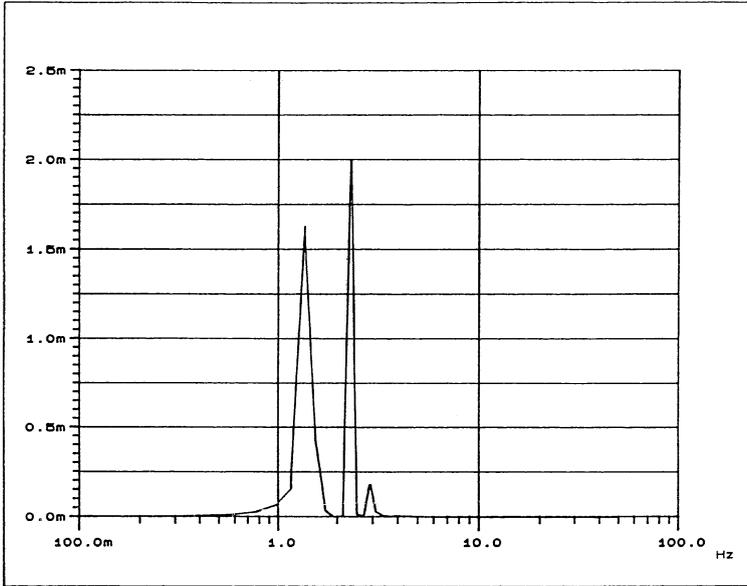
**Tableau 1** : Caractéristiques du matériel utilisé.

Le graphe de la vitesse d'un pendule en fonction du temps est donné sur la figure 4, et est inutilisable de façon brute pour extraire des informations sur les fréquences propres du système. A titre indicatif, le signal donné sur la figure 4 est une copie d'écran de la figure obtenue avec 1 000 points échantillonnés par l'oscilloscope.



**Figure 4** : Graphe de la vitesse angulaire d'un des trois pendule du système étudié.

Le calcul de la transformée de Fourier du signal sur 512 points (figure 5) permet de détecter très simplement 3 pics fréquentiels qui correspondent aux 3 fréquences propres du système.



**Figure 5** : Graphe donnant le spectre du signal de la figure 4, obtenu par calcul de la Transformée de Fourier sur 512 points.

Les opérations d'acquisition du signal et de calcul du spectre ne prenant que très peu de temps (environ une minute), il est possible d'étudier l'évolution des fréquences propres en faisant varier le couplage par l'intermédiaire de la distance  $d$ . Le tableau 2 résume une série de mesures, et montre clairement que la relation (2) est très bien vérifiée. Il est aussi possible de comparer les valeurs des fréquences obtenues avec les valeurs attendues théoriquement : tous les paramètres du système mécanique étudié sont connus et facilement mesurables.

d (cm)	f <sub>1</sub> (Hz)	f <sub>2</sub> (Hz)	f <sub>3</sub> (Hz)	f <sub>1</sub> <sup>2</sup> + f <sub>2</sub> <sup>2</sup> (Hz <sup>2</sup> )	2 f <sub>2</sub> <sup>2</sup> (Hz <sup>2</sup> )
28,5	1,47	2,36	3,03	11,34	11,14
26	1,38	2,2	2,78	9,63	9,68
23,7	1,3	2,02	2,56	8,24	8,16
21,2	1,23	1,84	2,28	6,71	6,77
18,7	1,2	1,7	2,03	5,56	5,78
16,2	1,1	1,55	1,9	4,82	4,80

**Tableau 2 :** Valeurs des fréquences propres mesurées en fonction du couplage (distance d). Les deux dernières colonnes permettent de vérifier l'équation (2).

## CONCLUSION

Cette expérience de mécanique permet de bien comprendre le concept de fréquence propre d'un système à plusieurs degrés de liberté. Ici, on s'est limité à 3 pendules, mais rien n'interdit d'utiliser un plus grand nombre de pendules (4 ou 5 par exemple), car toute l'information spectrale est contenue dans le mouvement d'un seul pendule. Le point délicat de cette manipulation réside dans le logiciel de calcul de transformée de Fourier ; notre choix s'est porté sur un logiciel commercial (2 000 F.) qui est adapté aux oscilloscopes de marque METRIX, qui sont largement répandus dans l'enseignement. Toutefois, cette manipulation est réalisable avec une carte d'acquisition enfichable utilisée dans les travaux pratiques (CASSY de LEYBOLD, ou interface ESAO de JEULIN).

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] L. LANDAU et E. LIFCHITZ, «*Mécanique*», Éditions Mir, 4<sup>ème</sup> édition (1982).
- [2] M. Del PEDRO et P. PALUD, «*Mécanique Vibratoire*», Presses Polytechniques Romandes (1989).
- [3] R. SPIEGEL, «*Analyse de Fourier*», Série Schaum, Mc Graw-Hill (1991).
- [4] C. DEMARS, «*Micro-système*», Septembre-Octobre 1981, pp. 155-158.