

# Approximation sinusoïdale par convertisseur à diodes

par J. CANDAU  
Professeur agrégé en Génie Électrique  
Lycée d'Altitude de Briançon

---

## RÉSUMÉ

Le convertisseur à diodes utilisé en synthèse de fonctions linéaires par morceaux : méthodes pratiques de calcul, dimensionnement des composants, aspects expérimentaux.

## 1. INTRODUCTION

L'approximation d'une caractéristique de transfert de forme a priori quelconque par une fonction linéaire par morceaux est une méthode largement employée en électronique analogique : elle intervient notamment dans la modélisation des composants non-linéaires [1], dans la linéarisation des caractéristiques de capteurs [2] ainsi que dans la synthèse de dipôles non-linéaires [3]. Elle met en œuvre des schémas structurels relativement simples, dit «*convertisseurs à diodes*», convenant à des fonctions approximées qui sont monotones et de courbure telle qu'un nombre limité de segments suffit.

Ce type d'approximation est également mis à profit dans les générateurs de fonctions «basses fréquences» : les sorties sinusoïdales sont généralement obtenues par une déformation judicieuse de la fonction triangulaire de base à travers un convertisseur à diode [3], [4].

L'étude qui suit se propose donc d'étudier le cas particulier de l'approximation sinusoïdale pour :

- a) rappeler le principe de fonctionnement des convertisseurs à diodes,
- b) donner deux méthodes pratiques d'obtention des paramètres géométriques définissant l'approximation (positions et pentes des segments),
- c) mettre en place une méthode rationnelle de dimensionnement des composants,
- d) préciser les structures électroniques couramment utilisées,

e) proposer une approche expérimentale grâce à un schéma structurel simplifié.

## 2. ANALYSE DE FONCTIONNEMENT

### 2.1. Principe

Le schéma du principe du convertisseur à diodes est donné à la figure 1. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- les diodes sont parfaites (sans seuil et de résistance dynamique nulle),
- l'impédance de source en  $V_e$  est nulle.

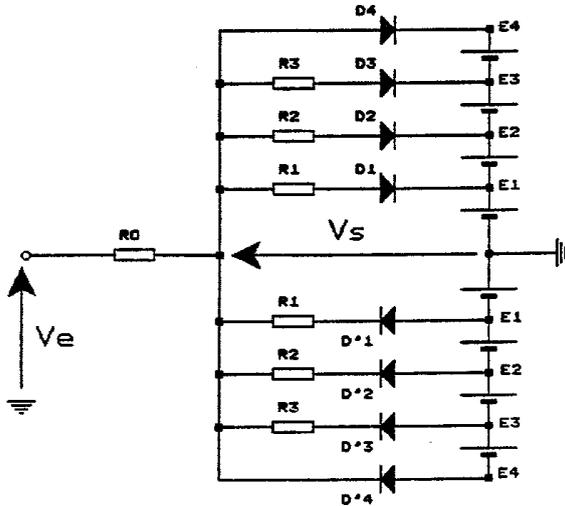


Figure 1

La symétrie du schéma est évidente. L'étude se limitera donc au cas des tensions d'entrée positives.

Pour  $V_e$  faible ( $V_e < E_1$ ), les diodes sont toutes bloquées et  $V_s = V_e$ . Lorsque  $V_e$  atteint puis dépasse  $E_1$ , la diode  $D_1$  entre en conduction provoquant par le biais de  $R_1$  et  $R_0$  une rupture de pente. Cette dernière passe donc de  $K_0$  ( $K_0 = 1$ ) à  $K_1$  qu'on peut mettre sous la forme :

$$E_1 < V_s < E_2 \rightarrow K_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_0}$$

Lorsque  $V_e$  augmente encore, les diodes  $D_2$  et  $D_3$  entrent successivement en conduction. Les résistances  $R_2$  puis  $R_3$  atténuent donc de plus en plus le signal d'entrée  $V_e$ . Lorsque  $D_4$  conduit la tension est carrément écrêtée :  $V_s$  est constante et égale à  $E_4$ . La caractéristique de transfert  $V_s(V_e)$  a donc bien l'allure donnée à la figure 2 et l'on peut facilement calculer pour chacun des segments les coefficients d'atténuation suivants :

$$0 < V_s < E_1 \rightarrow K_0 = 1$$

$$E_1 < V_s < E_2 \rightarrow K_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_0}$$

$$E_2 < V_s < E_3 \rightarrow K_2 = \frac{R_1 \parallel R_2}{R_1 \parallel R_2 + R_0}$$

$$E_3 < V_s < E_4 \rightarrow K_3 = \frac{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3}{R_1 \parallel R_2 \parallel R_3 + R_0}$$

$$E_4 \leq V_s \rightarrow K_4 = 0$$

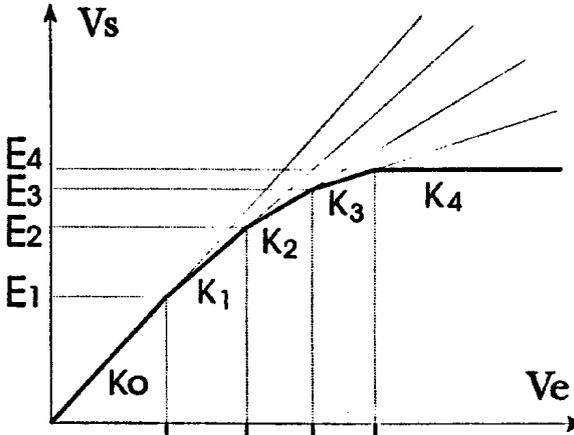


Figure 2

La remarque initiale concernant la symétrie du schéma nous permet de compléter la partie négative de la caractéristique  $V_s(V_e)$  (cf. figure 3). En appliquant en  $V_e$  une fonction triangulaire, la non-linéarité de la caractéristique créera effectivement en  $V_s$  l'illusion d'une fonction sinusoïdale du temps.

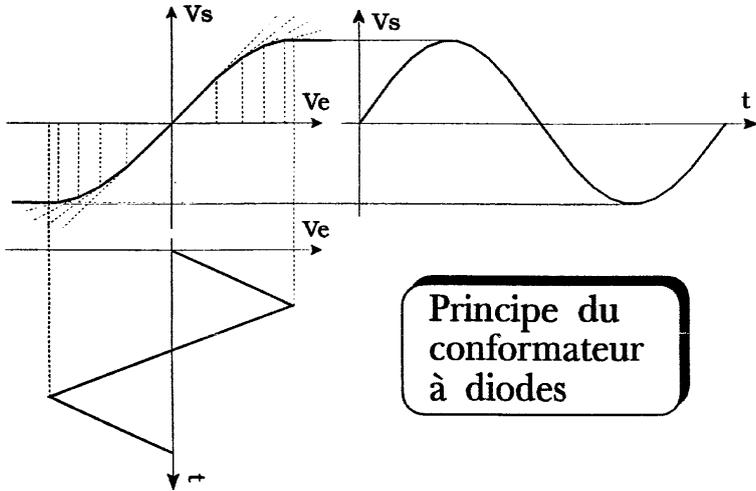


Figure 3

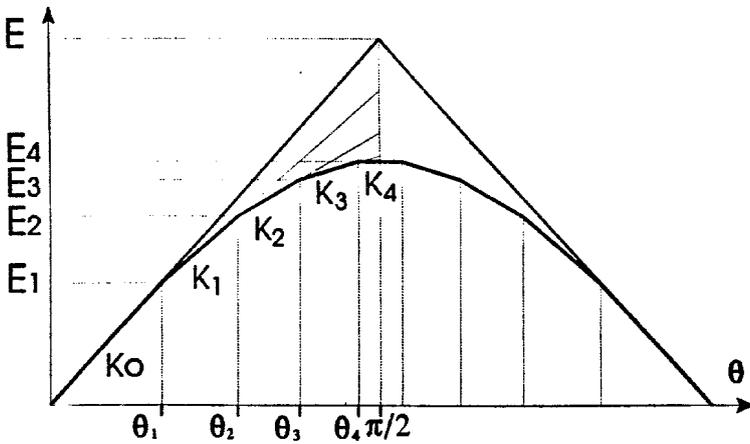


Figure 4

## 2.2 Notations

La fréquence des signaux ne jouant aucun rôle, nous graduerons les axes en angles en posant classiquement  $\theta = \omega t$  et  $\omega = 2\pi f$ .

Les paramètres définissant la fonction d'approximation seront (cf. figure 4) :

- l'excursion en tension de la tension triangulaire d'entrée notée  $E$ ,
- les points de rupture des pentes notés  $(\theta_1, E_1)$ ,  $(\theta_2, E_2)$ ,  $(\theta_3, E_3)$ ,  $(\theta_4, E_4)$ .

Nous nous ramènerons à des nombres sans dimension en posant :

$$e_i = \frac{E_i}{E}$$

Nous avons déjà défini les pentes  $K_0$  à  $K_4$ , tous ces paramètres étant liés par des relations de la forme suivante :

$$K_i = \frac{\pi \cdot (e_{i+1} - e_i)}{2 \cdot (\theta_{i+1} - \theta_i)} ; 1 \leq i \leq 3$$

### 3. OBTENTION DES COEFFICIENTS

Nous proposons ici deux méthodes pratiques d'obtention des coefficients définissant la fonction d'approximation linéaire par morceaux. Ces méthodes peuvent s'appliquer sans difficulté à d'autres fonctions.

Elles sont toutes les deux fondées sur un principe d'égalité de répartition de l'erreur d'approximation entre les différents segments mais il faut noter que ni l'une ni l'autre ne procède à une optimisation des coefficients.

#### 3.1. Par la dérivée

La dérivée d'une fonction linéaire par morceaux est évidemment une fonction en escalier. On peut admettre *a priori* qu'approximer une fonction sinusoïdale par des segments revient à approximer sa dérivée (fonction cosinus) par une fonction en escalier (cf. figure 5). Les différents paliers peuvent être choisis de façon à satisfaire les deux critères suivants :

- sur chaque intervalle, erreur algébrique nulle (valeur moyenne),
- contribution égale de chacun des paliers à l'erreur quadratique totale sur une période complète.

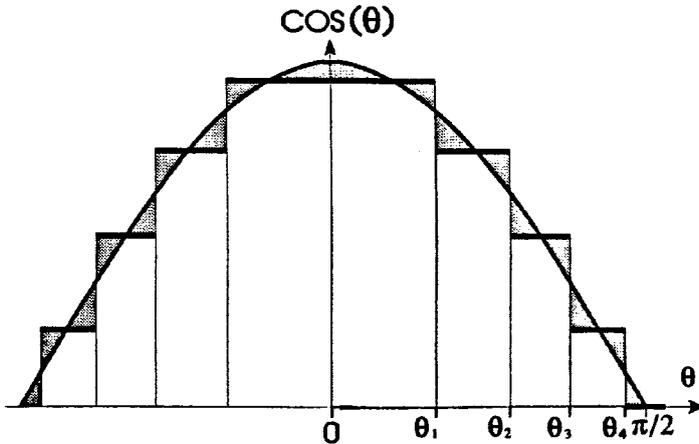


Figure 5

La mise en œuvre d'un algorithme adéquat sur ordinateur permet facilement de trouver le jeu de coefficients satisfaisant ces conditions. Les résultats sont regroupés dans le tableau n° 1, première ligne.

Le taux de distorsion harmonique est évalué de la façon suivante :

$$\text{TDH} = \frac{\text{valeur efficace de la tension résiduelle}}{\text{valeur efficace du fondamental}}$$

la tension résiduelle correspond aux harmoniques de rang strictement supérieur à 1, c'est-à-dire au signal moins le fondamental : il chiffre donc le degré de «pureté» du signal vis-à-vis de son fondamental.

### 3.2. Par la fonction elle-même

On décide cette fois-ci de choisir *a priori* les points de rupture de pente sur la fonction elle-même. Les segments sont donc dans ce cas des cordes placées sur la fonction sinus. Les écarts entre cordes et arcs permettent d'évaluer l'erreur d'approximation segment par segment. On définit à nouveau un critère d'égale contribution de chacun des segments à l'erreur totale pour trouver par des méthodes numériques simples les coefficients regroupés dans le tableau n° 1. La ligne n° 2 correspond à une erreur quadratique alors que la ligne n° 3 correspond à une erreur définie par la valeur absolue de la surface entre cordes et arcs.

La ligne n° 4 donne une solution obtenue pour un conformateur à trois branches au lieu de quatre.

	$K_1$	$K_2$	$K_3$	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$e_1$	$e_2$	$e_3$	$e_4$	TDH (%)
1)	0,794	0,532	0,255	30	51	68	84	0,333	0,516	0,618	0,663	0,392
2)	0,828	0,581	0,298	26	47	65	82	0,291	0,480	0,596	0,652	0,309
3)	0,846	0,600	0,310	24	45	64	81	0,262	0,461	0,586	0,647	0,304
4)	0,769	0,408		29	55	78		0,321	0,544	0,651		0,511

Tableau n° 1

RQ : les angles sont exprimés en degrés.

#### 4. DIMENSIONNEMENT

La fonction d'approximation étant définie par un jeu de coefficients, il reste à dimensionner les différents composants du schéma structurel.

Les tensions de commutation  $E_1$  à  $E_4$  sont le plus souvent obtenues grâce à un pont diviseur à cinq résistances  $R_{10}$  à  $R_{14}$  sur lequel est appliquée une tension référence notée  $V_R$  (cf. Figure 6). Le fonctionnement est conforme à celui décrit si les mises en conduction des diodes ne provoquent pas de variations significatives des tensions de commutation établies par le pont diviseur.

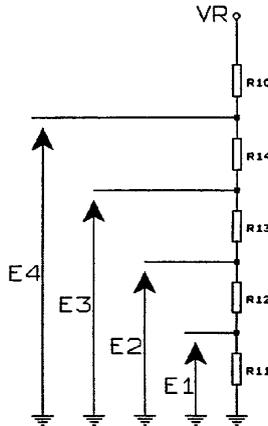


Figure 6

#### 4.1. Tensions de commutation

Le calcul du pont diviseur ne présente aucune difficulté et l'on obtient facilement en posant :

$$e_R = \frac{V_R}{E}, \text{ les résultats suivants :}$$

$\frac{R_{12}}{R_{11}} = \frac{e_2 - e_1}{e_1}$	$\frac{R_{13}}{R_{11}} = \frac{e_3 - e_2}{e_1}$
$\frac{R_{14}}{R_{11}} = \frac{e_4 - e_3}{e_1}$	$\frac{R_{10}}{R_{11}} = \frac{e_R - e_4}{e_1}$

#### 4.2. Pentas

Les relations obtenues en 2.1. définissant les pentes  $K_1$  à  $K_3$  permettent d'obtenir sans difficulté les relations suivantes :

$$\frac{R_0}{R_1} = \frac{1}{K_1} - 1 \quad \frac{R_0}{R_2} = \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_1} \quad \frac{R_0}{R_3} = \frac{1}{K_3} - \frac{1}{K_2}$$

#### 4.3. Exemple

Prenons à titre d'exemple la ligne n° 1 du tableau n° 1 (approximation par la dérivée).

L'amplitude du signal triangulaire est de 10 V ( $E = 10$  V). La tension référence appliquée sur le pont diviseur est  $V_R = 15$  V, soit  $e_R = 1,5$ .

Les résistances sont choisies dans la série  $E_{96}$  (1 %).

Après applications numériques des formules ci-dessus et normalisation des résultats dans la série retenue, on obtient les valeurs suivantes qui constituent le dimensionnement fonctionnel du conformateur :

$$\frac{R_{12}}{R_{11}} = 0,549 \quad \frac{R_{13}}{R_{11}} = 0,309 \quad \frac{R_{14}}{R_{11}} = 0,137 \quad \frac{R_{10}}{R_{11}} = 2,49$$

$$\frac{R_1}{R_0} = 3,83 \quad \frac{R_2}{R_0} = 1,62 \quad \frac{R_3}{R_0} = 0,487$$

## 5. SCHÉMAS STRUCTURELS

### 5.1. Diodes parfaites

Les schémas structurels des conformateurs ne vont en fait que peu différer du schéma de principe de la figure 1. Le problème consiste essentiellement à remplacer les diodes par des structures réalisant la double fonction :

- diodes sans seuil ni résistance dynamique (condition n° 1),
- stabilité des tensions de commutation établies par le pont diviseur (condition n° 2).

La figure 7 présente deux solutions possibles. Il s'agit à chaque fois de montages suiveurs de tension, unidirectionnels en courant et sans décalage.

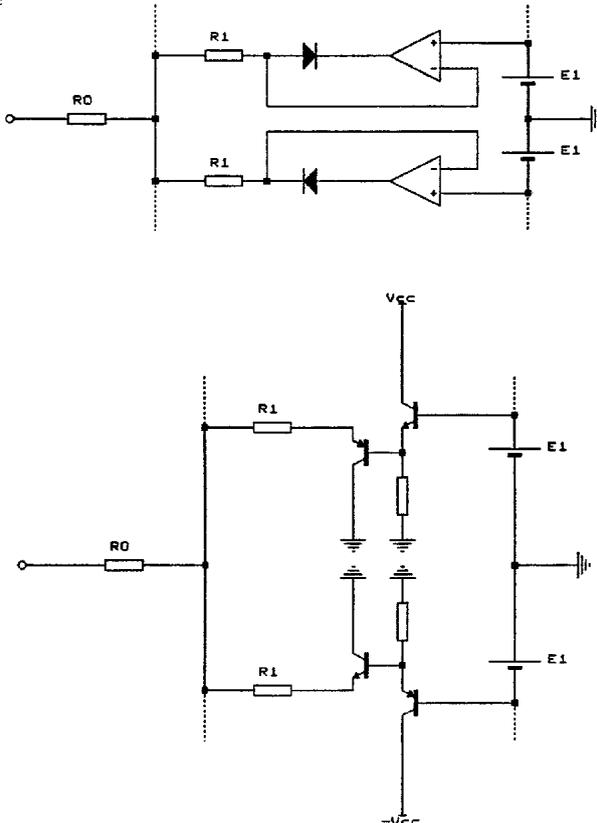


Figure 7



Le dimensionnement a volontairement été mené avec des composants choisis dans la série E<sub>12</sub> (5 %). Un segment est supprimé de part et d'autre et les coefficients sont ceux de la ligne n° 4 du tableau n° 1 (E = 10 V et V<sub>R</sub> = 15 V).

Les tensions de seuils des diodes ont été grossièrement compensées en décalant globalement les tensions E<sub>i</sub> de la valeur d'un seuil de diode. Enfin, les résistances des ponts diviseurs ont été choisies de valeurs suffisamment faibles devant celles des atténuateurs de pente (condition n° 2).

Les résistances de grandes valeurs ohmiques associées à des capacités parasites non maîtrisées ne permettent un fonctionnement correct qu'à des fréquences faibles (quelques centaines de Hz).

De plus, il convient d'utiliser une sonde oscilloscopique à grande impédance d'entrée pour observer V<sub>s</sub>, l'entrée 1 MΩ de l'oscilloscope étant trop pénalisante pour un tel montage.

## 6. CONCLUSION

L'étude du fonctionnement de convertisseur à diodes et le dimensionnement des composants associés ne présente aucune difficulté théorique. Elle devrait donc permettre d'illustrer très concrètement les tout premiers chapitres des cours d'électronique (diodes, ponts diviseurs...).

La vérification expérimentale, toujours attrayante, rappelle à bon escient que les perturbations induites par un appareil de mesure comme l'oscilloscope sont loin d'être toujours négligeables, ce qu'on oublie parfois...

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] *Électronique appliquée à la transmission de l'information*, Tome 1 par J. HERVÉ, page 18 & suivantes, Éditions Masson.
- [2] *Systèmes de mesure* par P.-A. PARATTE et P. ROBERT, pages 134-136, Éditions Dunod.
- [3] *Électronique des signaux analogiques* par J. AUVRAY, pages 248, 298-299, Éditions Dunod Université.
- [4] *Électronique non-linéaire* par Ch. MASSELOT et M. GIRARD, pages 52 & suivantes, Éditions Masson.
- [5] *Data Acquisition Handbook*, Intersil.