

CONSIDERATIONS SUR L'INDUCTION ELECTROMAGNETIQUE

P. JEAN, retraité
LUYNES

RESUME

L'auteur se propose de montrer comment les phénomènes d'induction électromagnétique sont directement liés aux lois de la relativité restreinte et que les champs électromoteurs de LORENTZ et de NEUMANN s'introduisent naturellement et ne sont pas étrangers l'un à l'autre.

Il donne ensuite une méthode analytique permettant de calculer les forces électromotrices d'induction sans qu'il soit nécessaire de faire un petit dessin pour mener le calcul à son terme. Les calculs sont certes un peu plus longs que ceux qui sont faits habituellement mais sont peut-être plus satisfaisants, plus "rigoureux".

A - Les champs électromoteurs .

L'enseignement des phénomènes électromagnétiques et particulièrement celui du cas des corps en mouvement, ne peut être mené à bien sans une réflexion à partir des lois de la relativité restreinte. Ce fût d'ailleurs la démarche d'EINSTEIN qui introduisit les lois de la relativité dans un mémoire intitulé "Electrodynamik der Bewegungskörper".

Les équations de MAXWELL, elles-mêmes mères, ou filles, de la relativité, permettent d'introduire les notions :

de champ électromagnétique, tenseur antisymétrique d'ordre deux dans l'espace-temps qui peut se décrire, dans la base de Lorentz relative à un référentiel donné $\mathcal{R}$ par le couple indissociable composante électrique $\vec{E}$, composante magnétique $\vec{B}$ et

de quadri-potential de l'espace-temps qui peut lui aussi se décrire dans cette même base par le couple également indissociable potentiel-vecteur $\vec{A}$ et potentiel scalaire V .

Le calcul des champs à l'aide des potentiels se fait par les relations bien connues :

$$\vec{E} = - \text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \vec{B} = \text{rot } \vec{A}$$

qui présenteraient une forme plus symétrique si on utilisait un formalisme quadri-dimensionnel adapté (1)

Le problème à résoudre est maintenant celui qui consiste à écrire les composantes $\vec{E}'$, $\vec{B}'$, $\vec{A}'$ et V' des champs et des potentiels lorsqu'on utilise un référentiel $\mathcal{R}'$ qui se déplace d'un mouvement de translation uniforme (on se restreint à ce cas) de vitesse U par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Bien entendu cela ne peut se faire qu'en utilisant la transformation de Lorentz.

La transformation spéciale de Lorentz s'écrit (en prenant $c = 1$) :

$$x' = \gamma (x - U t) ; y' = y ; z' = z ; t' = \gamma (t - U x)$$

ou

$$x = \gamma (x' + U t') ; y = y' ; z = z' ; t = \gamma (t' + U x')$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - U^2}}$$

x , y , z et t étant les coordonnées spatio-temporelles d'un événement dans le référentiel $\mathcal{R}$, x' , y' , z' et t' les coordonnées spatio-temporelles de ce même événement dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La transformation est spéciale en ce sens qu'elle laisse invariantes les coordonnées y et z : le vecteur-vitesse $\vec{U}$ ayant dans le référentiel $\mathcal{R}$ les composantes $U, 0, 0$.

Alors toute grandeur vectorielle dont les composantes (coordonnées) dans le référentiel $\mathcal{R}$ sont A_x, A_y, A_z et V , a comme composantes (coordonnées) dans le référentiel $\mathcal{R}'$: A'_x, A'_y, A'_z et V' telles que :

$$A'_{x'} = \gamma (A_x - U V) , \quad A'_{y'} = A_y , \quad A'_{z'} = A_z , \quad V' = \gamma (V - U A_x)$$

(et les relations inverses corrélativement).

Le principe de relativité restreinte, énoncé par Galilée au début du XVII^{ème} siècle impose aux lois physiques (Galilée ne pensait alors qu'à la mécanique et non à l'électromagnétisme bien entendu), de s'écrire de la même façon pour deux observateurs "galiléens". Alors si on utilise le référentiel $\mathcal{R}'$ on doit calculer les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$ par :

$$\vec{E}' = - \vec{\text{grad}}' V' - \frac{\partial \vec{A}'}{\partial t'} ; \quad \vec{B}' = \vec{\text{rot}}' \vec{A}'$$

Les notations $\vec{\text{grad}}'$ et $\vec{\text{rot}}'$ indiquant que dans ces opérateurs différentiels les dérivées sont prises par rapport aux coordonnées x' , y' et z' . On aura ainsi :

$$E'_{x'} = - \frac{\partial V'}{\partial x'} - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t'} ; E'_{y'} = - \frac{\partial V'}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t'} ; E'_{z'} = \dots$$

où x' , y' et t' sont donnés en fonction de x , y et t par la transformation de Lorentz. Les règles usuelles de dérivation de fonctions de fonctions donnent, en se limitant aux termes non nuls :

$$E'_{x'} = - \frac{\partial V'}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} - \frac{\partial V'}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x'} - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} - \frac{\partial A'_{x'}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

$$E'_{y'} = - \frac{\partial V'}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial y'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t'} - \frac{\partial A'_{y'}}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial t'}$$

avec, déduits des transformations de Lorentz :

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \gamma \quad \frac{\partial x}{\partial t'} = \gamma U \quad \frac{\partial t}{\partial x'} = \gamma U \quad \frac{\partial t}{\partial t'} = \gamma \quad \frac{\partial y}{\partial y'} = 1$$

Si maintenant on écrit que :

$$V' = \gamma (V - U A_x) ; A'_x = \gamma (A_x - U V) ; A'_y = A_y$$

on obtient :

$$E'_{x'} = -\gamma^2 (1 - U^2) \frac{\partial V}{\partial x} - \gamma^2 (1 - U^2) \frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}$$

d'où :

$$E'_{x'} = E_x$$

et :

$$\begin{aligned} E'_{y'} &= -\gamma \frac{\partial V}{\partial y} - \gamma \frac{\partial A_y}{\partial t} + \gamma U \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) \\ &= \gamma E_y + \gamma [\vec{U} \wedge \vec{\nabla} \wedge \vec{A}]_y \end{aligned}$$

$$\text{soit : } E'_{y'} = \gamma E_y + \gamma (\vec{U} \wedge \vec{B})_y$$

et "mutatis mutandis"

$$E'_z = \gamma E_z + \gamma (\vec{U} \wedge \vec{B})_z$$

Après des calculs analogues, à partir de $\vec{B}' = \vec{\text{rot}}' \vec{A}'$ on écrit

$$\begin{aligned} B'_{x'} &= B_x \\ B'_{y'} &= \gamma B_y - \gamma (\vec{U} \wedge \vec{E})_y \\ B'_{z'} &= \gamma B_z - \gamma (\vec{U} \wedge \vec{E})_z \end{aligned}$$

On vient donc d'établir les formules de transformation des composantes électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ du champ électromagnétique, formules qu'on aurait pu retrouver directement en appliquant les règles de transformation des composantes d'un tenseur antisymétrique d'ordre deux (1) .

En fait ces formules sont, en général, présentées sous la forme suivante : tout d'abord on s'intéresse, dans la plupart des cas, à ces transformations lorsque U est très petit par rapport à la vitesse de la lumière : $U \ll 1$ et $\gamma \sim 1$. Alors :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{U} \wedge \vec{B} \quad \text{et} \quad \vec{B}' = \vec{B} - \vec{U} \wedge \vec{E}$$

On porte ensuite principalement son attention sur la relation permettant de calculer $\vec{E}'$ qu'on écrira :

$$\vec{E}' = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{U} \wedge \vec{B}$$

On notera de plus que ces relations ne sont valables que dans le cas où le référentiel $\mathcal{R}'$ est en mouvement de translation uniforme par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. On admettra qu'elles sont applicables dans le cas général où ce mouvement est quelconque la vitesse $\vec{U}$ étant alors la vitesse du point M , fixe dans $\mathcal{R}'$ où on calcule les champs $\vec{E}'$ et $\vec{B}'$, par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ (vitesse instantanée bien sûr) .

Le champ électrique ainsi déterminé apparaît comme la somme d'un premier champ "statique" $\vec{E}' = - \text{grad } V$ qui est en fait le champ électrique mesuré par un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}$ dans le cas où le potentiel vecteur $\vec{A}$ ne dépend pas du temps, et d'un second champ qu'on désigne par "champ électromoteur d'induction":

$$\vec{E}' = - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{U} \wedge \vec{B}$$

Le premier de ces termes constitue le champ de NEUMAN, le second le champ de LORENTZ. Traditionnellement (et cela faisait même l'objet de deux leçons distinctes à l'agrégation) on étudiait d'une part les phénomènes qui se produisent lorsqu'un circuit fixe est soumis à l'action d'un champ magnétique variable (cas de NEUMAN), d'autre part les phénomènes qui se produisent lorsqu'un circuit se déplace dans un champ magnétique constant (cas de LORENTZ). Puis on affirmait tranquillement que dans le cas général il fallait ajouter les deux termes. On vient de souligner que c'est le cas général qu'on peut le mieux expliquer. Dans les applications, bien sûr, les deux cas sont le plus souvent disjoints (transformateurs, alternateurs).

Quant à la relation :

$$\vec{B}' = \vec{B} - \vec{U} \wedge \vec{E}$$

on l'interprète de la façon suivante : supposons que dans le référentiel $\mathcal{R}$ il n'y ait pas de charges en mouvement, le champ électromagnétique s'y réduit à sa seule composante électrique $\vec{E}$ ($\vec{B} = \vec{0}$) ; alors la composante magnétique $\vec{B}'$ qui apparaît lorsqu'on étudie les phénomènes dans le référentiel $\mathcal{R}'$ est due au mouvement de $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$: le magnétisme est déductible de l'électrostatique et de la relativité.

B - Les forces électromotrices .

On vient de parler de "circuit qui", alors que les formules écrites sont des formules locales permettant de calculer seulement les champs en un point. Il faut maintenant dégager la notion de force-électromotrice. On se bornera à envisager seulement le cas où le référentiel $\mathcal{R}'$ se déplace lentement par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Ainsi quand on aura à intégrer le vecteur $\vec{E}'$ le long d'un contour C' fixe dans $\mathcal{R}'$ on pourra confondre les éléments de longueur ds et ds' respectivement mesurés dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$ (les phénomènes de contraction des longueurs n'interviennent pas et le temps est "universel").

Pour le champ de NEUMAN aucune difficulté n'apparaît, la force-électromotrice d'induction qui se manifeste le long d'un contour fermé (qui idéalise un circuit fermé supposé être filiforme) est définie par la circulation du vecteur champ électrique le long de ce contour. Les deux référentiels $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont ici confondus et on écrira :

$$e' = \oint_{C'} \vec{E}' \cdot d\vec{M}' = - \oint_{C'} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \cdot d\vec{M}' = - \frac{1}{dt} \oint_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{M}'$$

le circuit C' étant fixe .

Le théorème de Stokes donne :

$$\oint_{C'} \vec{A} \cdot d\vec{M}' = \int_{S'} \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}' = \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = \Phi$$

d'où :

$$e' = - \frac{d\Phi}{dt}$$

Φ étant le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers une surface S' quelconque limitée par le contour C' et orientée en harmonie avec celui-ci (règle du bonhomme d'AMPERE) .

Pour le champ de LORENTZ les démonstrations usuelles (2) font intervenir la circulation :

$$e' = \oint_{C'} (\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}' = \oint_{C'} \vec{B} \cdot (d\vec{l}' \wedge \frac{d\vec{M}}{dt})$$

et après avoir fait intervenir un vecteur $d\vec{S}'$ orthogonal à la surface "balayée" par l'élément de longueur $d\vec{l}'$ du contour, on en arrive à la relation :

$$e' = - \frac{d\Phi_c}{dt}$$

où $d\Phi_c$ est le "flux coupé" par le contour dans son mouvement dans le champ $\vec{B}$. Le terme est bucolique, le tout est accompagné d'une figure sur laquelle "on voit" que l'on a fait le bon choix pour le signe . On en déduit ensuite, pour un champ $\vec{B}$ ne variant pas en fonction du temps et en raison du caractère conservatif du flux de $\vec{B}$ ($\text{div } \vec{B} = 0$) qu'on peut écrire :

$$e' = - \frac{d\Phi}{dt}$$

où Φ est maintenant le flux du vecteur $\vec{B}$ à travers une surface limitée par le contour C' et orientée en harmonie avec lui, flux qui varie à cause du déplacement du circuit .

Bien sûr en recommençant la démonstration dans différents cas de figure on se rend compte qu'on a toujours raison, mais il n'en subsiste pas moins un léger trouble : ne peut-on donc pas démontrer ce théorème à un aveugle à qui le petit dessin ne servirait pas à grand chose ? Pour cela il faudra encore utiliser le théorème de STOCKES puisqu'on veut passer d'une circulation à un flux . Les calculs sont certes un peu longs mais il n'est pas inutile de les avoir faits une fois dans sa vie .

Soit donc $\vec{E}'$ le champ électromoteur d'induction qui se manifeste dans le référentiel $\mathcal{R}'$. La force électromotrice calculée le long d'un contour C' immobile dans $\mathcal{R}'$ s'exprime par :

$$e' = \oint_{C'} (\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{l}'$$

ou en appliquant le théorème de STOCKES :

$$e' = \int_{S'} \text{rot } (\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}'$$

où la surface S' est limitée par le contour C' et orientée en harmonie avec lui. Cette surface est immobile dans le référentiel $\mathcal{R}'$. $\vec{U}$ est le vecteur vitesse d'un de ses points M dans le référentiel $\mathcal{R}$. Pour calculer cette intégrale on utilisera un repère orthonormé direct $R(Oxyz)$ du référentiel $\mathcal{R}$ dans lequel le vecteur $\vec{U} \wedge \vec{B}$ s'écrit :

$$\vec{U} \wedge \vec{B} = (v B_z - w B_y) \vec{U}_x + (w B_x - u B_z) \vec{U}_y + \dots$$

où u, v, w , sont les composantes du vecteur $\vec{U}$ dans ce repère. Alors la composante sur l'axe Ox de $\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B})]_x &= \frac{\partial}{\partial y} (\vec{U} \wedge \vec{B})_z - \frac{\partial}{\partial z} (\vec{U} \wedge \vec{B})_y \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (u B_z - v B_x) - \frac{\partial}{\partial z} (w B_x - u B_z) \end{aligned}$$

On doit maintenant introduire le fait que le circuit C' et la surface S' étant immobiles dans le référentiel $\mathcal{R}'$ peuvent être considérés comme des solides et que les composantes (u, v, w) de la vitesse $\vec{v}$ d'un point quelconque M de cette surface peuvent s'exprimer par :

$$\vec{v}(M) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}$$

où O est un point fixe dans $\mathcal{R}'$ et arbitrairement choisi comme origine, et $\vec{\omega}$, de composantes (p, q, r) , le vecteur rotation du référentiel $\mathcal{R}'$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. Soit

$$u = u_0 + qz - ry$$

$$v = v_0 + rx - pz$$

$$w = w_0 + py - qx$$

alors :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -r \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \frac{\partial u}{\partial z} = q$$

si bien que :

$$\begin{aligned} [\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B})]_x &= -r B_y + q B_z + u \frac{\partial B_z}{\partial y} - v \frac{\partial B_x}{\partial y} - w \frac{\partial B_x}{\partial z} + u \frac{\partial B_z}{\partial z} \\ &= (\vec{\omega} \wedge \vec{B})_x + u \frac{\partial B_x}{\partial x} + u \frac{\partial B_y}{\partial y} + u \frac{\partial B_z}{\partial z} - u \frac{\partial B_x}{\partial x} - v \frac{\partial B_x}{\partial y} - w \frac{\partial B_x}{\partial z} \\ &= (\vec{\omega} \wedge \vec{B})_x + u \text{div} \vec{B} - \left[\frac{\partial B_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial B_z}{\partial z} \frac{dz}{dt} \right] \end{aligned}$$

Le terme $\text{div} \vec{B}$ est nul ; x, y, z , étant les coordonnées du point M dans le repère R , le terme entre parenthèse correspond à la variation en fonction du temps de la composante B_x lorsqu'on suit le point M dans son déplacement, variation due au fait que le point M va au cours de son déplacement occuper différentes positions où le champ $\vec{B}$, donc sa composante B_x , a des valeurs variées (à moins que -cas exceptionnel- le champ $\vec{B}$ soit uniforme dans le référentiel $\mathcal{R}$).

On écrira alors :

$$[\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B})]_x = (\vec{\omega} \wedge \vec{B})_x - \frac{1}{\lambda t} \vec{B}_x$$

Cette relation peut se transposer pour les autres composantes du vecteur $\vec{B}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ et on écrira en définitive :

$$\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B}) = \vec{\omega} \wedge \vec{B} - \left(\frac{1}{\lambda t} \vec{B}\right)_{\mathcal{R}}$$

On a bien précisé que la dérivée $(d\vec{B}/dt)$ doit être considérée dans le référentiel $\mathcal{R}$, où pourtant $\vec{B}$ ne dépend pas du temps, mais en lui donnant la signification exposée plus haut : variation du vecteur $\vec{B}$ mesuré en un point M qui se déplace.

On doit maintenant relier cette variation $(d\vec{B}/dt)_{\mathcal{R}}$ à la variation $(d\vec{B}/dt)_{\mathcal{R}'}$ mesurée par un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$, $\vec{B}$ étant toujours déterminé en un point M , fixe dans $\mathcal{R}'$, appartenant à la surface S' . Il est bien connu que ces deux dérivées seraient les mêmes si les deux référentiels étaient en translation l'un par rapport à l'autre, mais que dans le cas général on doit écrire :

$$\left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \left(\frac{d\vec{B}}{dt}\right)_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega} \wedge \vec{B}$$

pour n'importe quel vecteur $\vec{A}$. On aura donc ici :

$$\text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B}) = \vec{\omega} \wedge \vec{B} - \left(\frac{1}{\lambda t} \vec{B}\right)_{\mathcal{R}} = - \left(\frac{1}{\lambda t} \vec{B}\right)_{\mathcal{R}'}$$

(Le vecteur $\vec{B}$ étant déterminé en un point fixe de $\mathcal{R}'$ on pourrait tout aussi bien écrire

$$\left(\frac{1}{\lambda t} \vec{B}\right)_{\mathcal{R}'} = \left(\frac{1}{\lambda t} \vec{B}\right)_{\mathcal{R}'}$$

Si on revient maintenant à la force électromotrice d'induction, on écrira

$$e' = \int_{S'} \text{rot}(\vec{U} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{S}' = - \int_{S'} \frac{1}{\lambda t} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = - \frac{1}{\lambda t} \int_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S}' = - \frac{1}{\lambda t} \Phi$$

La surface S' étant fixe dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

On retrouve bien le résultat habituellement démontré d'une autre façon, plus géométrique, moins analytique. On remarquera enfin, dans la démonstration ici proposée, le fait que le contour le long duquel on calcule la force électromotrice doit manifestement être indéformable. Si tel n'était pas le cas, il faudrait considérer le contour comme formé d'éléments indéformables reliés les uns aux autres et articulés "sans rigidité" et le résultat final serait le même en négligeant éventuellement le champ magnétique créé par les courants circulant dans ces éléments ce qui revient à négliger les variations de l'auto-inductance du circuit considéré.

Appendice : Calcul de la force électromotrice dans le cadre de la relativité .

Plaçons nous dans le cadre de la relativité restreinte , et cherchons à calculer, dans le référentiel $\mathcal{R}'$ la circulation du vecteur $\vec{E}'$, le long d'un contour C' , c'est à dire la force électromotrice e' par :

$$e' = \oint_{C'} \vec{E}' \cdot d\vec{M}'$$

Nous nous plaçons dans le cas où le champ électromoteur est seulement le champ de LORENTZ, c'est à dire le cas où, dans le référentiel $\mathcal{R}$ le champ $\vec{E}$ est nul .

L'inversion des formules de LORENTZ permet de calculer les composantes du vecteur $\vec{E}$ par :

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x / \\ E_y &= \gamma E'_y + \gamma (-\vec{U} \wedge \vec{B}')_y / \\ E_z &= \gamma E'_z + \gamma (-\vec{U} \wedge \vec{B}')_z / \end{aligned}$$

où $-\vec{U}$ est le vecteur vitesse caractérisant le mouvement du référentiel $\mathcal{R}$ par rapport au référentiel $\mathcal{R}'$, vecteur dont les composantes dans le référentiel $\mathcal{R}'$ sont $(-U, 0, 0)$. Ce champ $\vec{E}$ étant nul, on en déduit :

$$\begin{aligned} E'_y &= (U \wedge B')_y / \\ E'_z &= (U \wedge B')_z / \end{aligned}$$

Et la circulation de ce vecteur $\vec{E}'$ le long du contour C' s'écrit :

$$e' = \oint_{C'} (\vec{U} \wedge \vec{B}') \cdot d\vec{M}' = \int_S \text{rot}'(\vec{U} \wedge \vec{B}') \cdot d\vec{S}'$$

en appliquant le théorème de STOCKES .

Les composantes sur les axes $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ du vecteur $(\vec{U} \wedge \vec{B}')$ sont :

$$\begin{aligned} (\vec{U} \wedge \vec{B}')_{x'} &= 0 \\ (\vec{U} \wedge \vec{B}')_{y'} &= -U B'_{z'} \\ (\vec{U} \wedge \vec{B}')_{z'} &= U B'_{y'} \end{aligned}$$

Les composantes de $\vec{\text{rot}}'(U \wedge \vec{B}')$ sont donc :

$$\vec{\text{rot}}'(U \wedge \vec{B}') = (U \frac{\partial B'_y}{\partial y'} - U \frac{\partial B'_x}{\partial y'}; -U \frac{\partial B'_z}{\partial x'}; -U \frac{\partial B'_y}{\partial x'})$$

et en utilisant la relation de FARADAY : $\vec{\text{div}}' \vec{B}' = 0$:

$$\vec{\text{rot}}'(U \wedge \vec{B}') = (-U \frac{\partial B'_x}{\partial x'}; -U \frac{\partial B'_y}{\partial x'}; -U \frac{\partial B'_z}{\partial x'})$$

La force électromotrice s'écrit alors :

$$e' = -U \int_{S'} \frac{\partial B'_x}{\partial x'} dS'$$

Pour interpréter cette relation on cherche comment varie le champ $\vec{B}'$ en un point M fixe dans $\mathcal{R}'$ lorsque le temps t' varie. Le déplacement dx mesuré dans le référentiel $\mathcal{R}$ du point M pendant le temps dt' mesuré dans $\mathcal{R}'$ se calcule par :

$$dx = \gamma (dx' + U dt') = \gamma U dt'$$

puisque M est fixe dans $\mathcal{R}'$. ($dx' = 0$).

D'autre part le terme $\frac{\partial B'_x}{\partial x'}$ correspond à la variation spatiale de $\vec{B}'$ dans $\mathcal{R}'$, à t' constant bien sûr. Ce qu'on peut transformer en fonction des variations de $\vec{B}'$ avec x avec :

$$dx = \gamma (dx' + U dt') = \gamma dx'$$

Alors :

$$\frac{\partial B'_x}{\partial x'} = \frac{\partial B'_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial x'} = \frac{\partial B'_x}{\partial x} \gamma$$

Si bien que :

$$e' = -\frac{1}{\gamma} \frac{dx}{dt'} \int_{S'} \frac{\partial B'_x}{\partial x} \gamma dS'$$

et après un petit "tripatouillage" mathématique sans élégance mais pas forcément faux, il vient :

$$e' = -\frac{1}{dt'} \int_{S'} \vec{B}' dS'$$

Un observateur lié au référentiel $\mathcal{R}'$ mesure donc une force électromotrice dont l'expression est bien donnée par la loi de LENZ.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) : P . JEAN : Les Principes de l'électrodynamique classique (B.U.P. 551 Janvier 1973 p. 426).
- (2) : BERKELEY , Electricité et magnétisme 1973 p. 232
- LANDAU Electrodynamique des milieux continus 1969 p. 272
- GIE : Electromagnétisme 2 1985 p. 96
- BERTIN FAROUX RENAULT : Electromagnétisme 2 1979 p. 124 et 103
- BOUTIGNY : Electricité 2 1986 p. 233