LA RELATION DE BOUGUER

DEVIATION D'UN RAYON LUMINEUX A LA TRAVERSEE DE L'ATMOSPHERE

MM. Bernard MARAIS et Pierre VERDIER
Université Paul Sabatier
118, route de Narbonne - 31062 TOULOUSE

I . LA RELATION DE BOUGUER

1°) Cas d'une suite de milieux homogènes

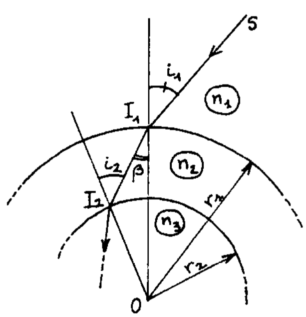

Figure 1

Considérons une suite de milieux homogènes, d'indices absolus n_1 , n_2 , n_3 , ... possédant la symétrie de révolution ou la symétrie sphérique. Soit SI_1 un rayon incident, contenu dans un plan méridien. Lors des diverses réfractions qu'il subit à la traversée des dioptres, il reste, d'après la première loi de Descartes pour la réfraction, dans le même plan méridien, qui est aussi le plan d'incidence.

La deuxième loi de Descartes pour la réfraction donne, au point I_1 :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \quad .$$

Dans le triangle OI_1I_2, nous avons :

$$\frac{r_2}{\sin \beta} = \frac{r_1}{\sin(\pi - i_2)} = \frac{r_1}{\sin i_2} \rightarrow \sin \beta = \frac{r_2}{r_1} \sin i_2 \quad .$$

En égalant les deux valeurs de sin β que nous venons de trouver, on obtient la relation de Bouguer :

$$n_1 \, r_1 \sin i_1 = n_2 \, r_2 \sin i_2 \qquad (1)$$

qu'on peut aussi énoncer en disant que le produit nr sin i est un invariant à la traversée des dioptres.

2°) Cas d'un milieu non homogène

Considérons maintenant un milieu non homogène, mais possédant lui aussi la symétrie de révolution, ou la symétrie sphérique, c'est-à-dire tel que n ne dépende que de r, distance à l'axe ou au centre.

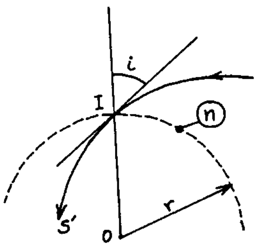

Figure 2

Soit SS' un rayon lumineux contenu dans un plan méridien, dont la trajectoire n'est bien sûr par rectiligne. En découpant le milieu considéré en couches successives infiniment minces, cylindriques ou sphériques (donc perpendiculaires à $\overrightarrow{\text{grad}}\, n$), on déduit de la relation (1) que, dans le cas présent, on a :

$$n\ r \sin i = \text{Cte} \qquad (2)$$

Remarque : La relation de Bouguer (2) peut bien sûr être démontrée directement de manière plus rigoureuse à partir du principe de Fermat.

II . DEVIATION D'UN RAYON LUMINEUX

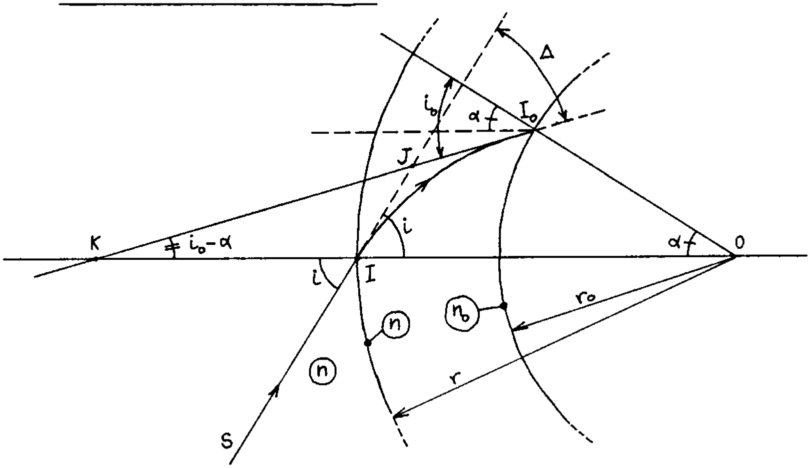

Figure 3

Considérons un rayon lumineux SI provenant d'un milieu homogène d'indice n et pénétrant dans un milieu non homogène à symétrie sphérique de centre O. Supposons que n augmente progressivement jusqu'à une valeur n_0 pour $r = r_0$; alors le rayon lumineux s'incurve vers O et perce la sphère de rayon r_0 en I_0 (voir Figure 3 ; le plan de la feuille est le plan méridien contenant SI).

Entre I et I_0, le rayon lumineux a été dévié d'un angle Δ ; désignons par α l'angle $\widehat{IOI_0}$. Puisque i est un angle extérieur au triangle KIJ, on a :

$$i = \Delta + (i_0 - \alpha)\ .$$

soit :

$$\Delta = i - i_0 + \alpha \quad . \tag{3}$$

Remarque : Si le milieu considéré est homogène, le rayon incident SI continue en ligne droite et on a, bien sûr, $\Delta = 0$, soit :

$$i_0 = i + \alpha$$

ce qui est évident sur la figure 4 ci-contre.

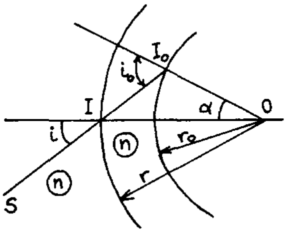

Figure 4

III . DEVIATION D'UN RAYON LUMINEUX APRES TRAVERSEE DE L'ATMOSPHERE TERRESTRE

(Calcul simplifié)

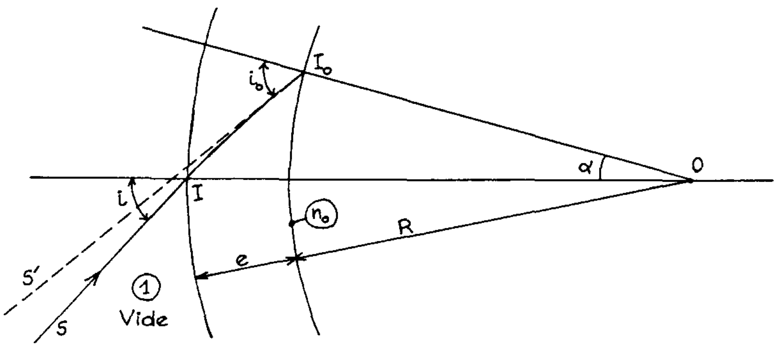

Figure 5

Soient O le centre de la Terre, qu'on assimilera à une sphère de rayon R e l'épaisseur de l'atmosphère et n_0 l'indice de l'air au niveau du sol.

Nous prendrons e = 18 km (voir justification ultérieure) et $n_0 = 1 + \varepsilon_0$ ($\varepsilon_0 \# 3.10^{-4}$).

Appliquons la relation de Bouguer en I et I_o :

$$1 \, . \, (R + e) \, . \sin i = (1 + \varepsilon_0) \, . \, R \, . \sin i_0 \tag{4}$$

Tenant compte du fait que $\frac{e}{R}$ et ε_0 sont infiniment petits devant 1, on obtient, en négligeant les infiniment petits du second ordre :

$$\sin i = (1 + \varepsilon_0 - \frac{e}{R}) \sin i_0 \quad .$$

i et i_0 étant très voisins*, on peut poser :

$$i = i_0 - di \quad ,$$

ce qui entraîne :

$$\sin i = \sin(i_0 - di) \;\#\; \sin i_0 - di \cos i_0 \quad .$$

En portant cette valeur de sin i dans la relation précédente, on obtient :

$$di = i_0 - i = (\frac{e}{R} - \varepsilon_0) \operatorname{tg} i_0 \; . \tag{5}$$

L'angle di étant très faible*, on a dans le pseudo triangle OII_0 :

$$R\alpha \;\#\; e \operatorname{tg} i \;\#\; e \operatorname{tg} i_0 \; ,$$

soit :

$$\alpha \;\#\; \frac{e}{R} \operatorname{tg} i_0 \quad .$$

La relation (3) donne alors pour déviation du rayon lumineux, ou aberration atmosphérique :

$$\Delta = \alpha - di \;\#\; \varepsilon_0 \operatorname{tg} i_0 \; . \tag{6}$$

Remarque : Puisque R # 6400 km, cela entraîne $R\,\varepsilon_0$ # 1,92 km, ce qui est nettement inférieur à l'épaisseur e de l'atmosphère. Donc :

$$di = i_0 - i > 0 \quad .$$

En conséquence, si le rayon SI provient d'une étoile très éloignée, cette dernière paraît, pour un observateur placé en I_0, dans la direction S', donc plus haute au-dessus de l'horizon qu'elle ne l'est en réalité, et cela bien que $S'I_0$ fasse avec la verticale en I_0 un angle $i_0 > i$.

IV . DEUX PSEUDO SOLUTIONS

Dans certains ouvrages, on calcule la déviation Δ en procédant suivant l'une ou l'autre des façons suivantes.

Première pseudo solution

Puisque $R \gg e$, on suppose la Terre plate. Les surfaces d'égal indice sont alors des plans parallèles au sol et on montre facilement que, dans un tel milieu, n sin i = Cte.

---

* Pour $i_0 = 80°$, on a $di = 1{,}42.10^{-2}$ rd # 49' ; alors $R\alpha = e \operatorname{tg} i_0$ avec une erreur inférieure à 1 %.

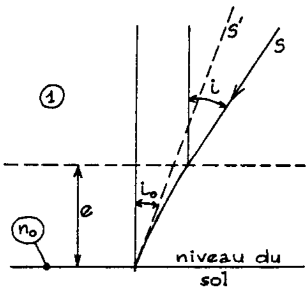

Figure 6

Entre l'entrée dans l'atmosphère et le niveau du sol, on a :

$$1 \,.\, \sin i = n_0 \sin i_0 = (1 + \varepsilon_0) \sin i_0 .$$

On écrit que :

$$\Delta = i - i_0 ,$$

ce qui est vrai dans cette hypothèse, mais on a bien sûr $i_0 < i$, ce qui est contraire à la réalité (voir III, Remarque).

Puisque Δ est très petit, on peut écrire :

$$\sin i = \sin(i_0 + \Delta) \;\#\; \sin i_0 + \Delta \cos i_0 = (1 + \varepsilon_0) \sin i_0 ,$$

d'où :

$$\Delta = \varepsilon_0 \operatorname{tg} i_0 .$$

Deuxième pseudo-solution

On suppose bien la Terre sphérique, mais, puisque $e \ll R$, on néglige $\frac{e}{R}$ dans les calculs.

Entre l'entrée dans l'atmosphère et le niveau du sol, on a (voir Figure 5) :

$$1 \,.\, R \,.\, \sin i = n_0 R \sin i_0 .$$

On trouve la même équation que dans la première pseudo solution : cela est normal, car supposer R infini (Terre plate) ou négliger e devant R revient au même.

On écrit ensuite que :

$$\Delta = i - i_0$$

ce qui ne peut se justifier dans l'hypothèse d'une Terre sphérique, la valeur exacte de Δ étant alors donnée par la relation (3).

On trouve bien sûr aussi :

$$\Delta = \varepsilon_0 \operatorname{tg} i_0 .$$

V . VERS UNE EXPRESSION PLUS PRECISE DE L'ABERRATION ATMOSPHERIQUE Δ

Dans le calcul du ~~Chapitre~~ paragraphe III, nous avons fait une approximation en écrivant :

$$R\alpha \;\#\; e \operatorname{tg} i_0 .$$

Une évaluation plus exacte de Δ nécessite de connaître la position du point I_0, donc, en fait, l'équation de la trajectoire du rayon lumineux.

1°) Equation différentielle de la trajectoire du rayon lumineux

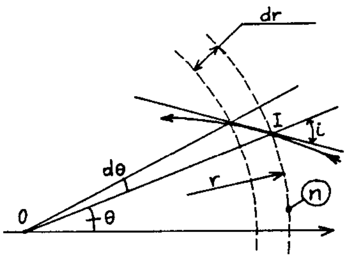

Figure 7

Ce calcul est classique et nous le rappelons brièvement.

Au point I, on a :

$$\operatorname{tg} i \, dr = r \, d\theta \Rightarrow \frac{r \, d\theta}{dr} = \operatorname{tg} i = \frac{\sin i}{\sqrt{1 - \sin^2 i}}$$

D'après la loi de Bouguer :

$$n \, r \sin i = C \Rightarrow \sin i = \frac{C}{n \, r} \ ;$$

en portant cette expression de sin i dans l'équation précédente, on obtient :

$$\frac{dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - C^2}} = \frac{d\theta}{C} \quad . \tag{7}$$

Cette équation n'est intégrable rigoureusement que dans certains cas particuliers, dont les deux plus classiques sont :

- $n = Cte$: on obtient bien sûr pour trajectoire une droite ;
- $nr = Cte \Rightarrow \sin i = Cte$: la trajectoire fait un angle constant avec le rayon vecteur ; c'est une spirale logarithmique.

2°) Intégration approchée de l'équation différentielle dans le cas de l'atmosphère terrestre

Remarque : Dans tous les calculs qui suivent, nous avons systématiquement fait les approximations suivantes quand $x \leqslant 0,1$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x \quad ; \quad (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} \quad .$$

Nous avons aussi négligé les infiniment petits du second ordre : ε^2, ε_0^2 , $\frac{z^2}{R^2}$, $\varepsilon \frac{z}{R}$, etc.

Posons :

$$r = R + z = R(1 + \frac{z}{R}) \Rightarrow dr = dz$$

z est l'altitude, telle que $z \leqslant e$ (e : épaisseur de l'atmosphère), ce qui entraîne $z \ll R$.

$$n = 1 + \varepsilon \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$$

La constante C s'évalue au niveau du sol :

$$C = (1 + \varepsilon_0) \, R \sin i_0$$

En portant ces expressions dans (7), on obtient, dans le cas où $i_0 \leqslant 75°$, valeur limite conciliable avec les approximations énoncées plus haut :

$$\left[1 + \varepsilon_0 \, tg^2 i_0 - \frac{\varepsilon}{\cos^2 i_0} - \left(1 + \frac{1}{\cos^2 i_0}\right) \frac{z}{R}\right] dz = \frac{R(1 - \varepsilon_0)}{tg \, i_0} \, d\theta \quad . \qquad (8)$$

Nous avons adopté pour variation de l'indice en fonction de la pression p à l'altitude z la loi :

$$\frac{n - 1}{p} = Cte \; ,$$

qui a été vérifiée à mieux de 1‰ pour $p \leqslant 75$ cm de mercure.

Si p_0 est la pression au niveau du sol, une bonne représentation de p est donnée par :

$$\frac{p}{p_0} = e^{-z/h} \quad \text{avec} \quad h = 7{,}7 \text{ km} \; .$$

En conséquence, on a :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \, e^{-z/h} \quad .$$

En portant cette expression de ε dans (8) et en intégrant, on obtient

$$(1 + \varepsilon_0 \, tg^2 i_0) \frac{z}{R} + \frac{\varepsilon_0}{\cos^2 i_0} \frac{h}{R} e^{-z/h} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos^2 i_0}\right) \frac{z^2}{R^2} = \frac{1 - \varepsilon_0}{tg \, i_0} (\theta + \gamma) \quad ,$$

où γ est une constante d'intégration, qu'on détermine en imposant par exemple la condition :

$$z = 0 \quad \Rightarrow \quad \theta = 0 \quad .$$

On obtient alors :

$$(1 + \varepsilon_0 \, tg^2 i_0) \frac{z}{R} - \frac{\varepsilon_0}{\cos^2 i_0} \frac{h}{R} (1 - e^{-z/h}) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{\cos^2 i_0}\right) \frac{z^2}{R^2} = \frac{1 - \varepsilon_0}{tg \, i_0} \theta \quad .$$

Nous pouvons maintenant négliger les infiniment petits du second ordre qui résultent de l'intégration ($\varepsilon_0 \frac{z}{R}$; $\varepsilon_0 \frac{h}{R}$; $\frac{z^2}{R^2}$). Il reste finalement :

$$\frac{z}{R} = \frac{1 - \varepsilon_0}{tg \, i_0} \theta \; .$$

Nous en déduisons la valeur de α (voir figures 3 et 5), qui n'est autre que la valeur prise par θ quand $z = e$:

$$\alpha = (1 + \varepsilon_0) \frac{e}{R} \, tg \, i_0 \qquad (9)$$

La valeur de la déviation Δ s'obtient en portant les expressions de α et $i_0 - i$ données respectivement par (9) et (5) dans la relation (3).

On trouve :

$$\Delta = \varepsilon_0 (1 + \frac{e}{R}) \text{ tg } i_0 \quad . \tag{10}$$

Avec le modèle que nous avons choisi ($\frac{p}{p_0} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} = e^{-z/h}$), $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}$ est inférieur à 0,1 à partir d'une altitude de 18 km. Puisque le rayon de la Terre est R = 6400 km, on a :

$$\frac{e}{R} \# 3.10^{-3} \; .$$

En conséquence, la relation approchée (6) ($\Delta = \varepsilon_0$ tg i_0), donne un résultat exact par défaut à 3.10^{-3} près.

Remarque : Il est très difficile de fixer la valeur de e. Nous avons adopté 18 km pour avoir $\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \leqslant 0,1$, et ainsi garder une certaine homogénéité avec les approximations proposées au début de ce calcul. En fait, quelle que soit la valeur raisonnable qu'on puisse prendre pour e, on a toujours heureusement $e \ll R$, et ainsi $\Delta \# \varepsilon_0 \text{tg } i_0$.

Exemple numérique :

Pour $i \# i_0 = 45°$, on trouve $\Delta \# 1'$. Il est à remarquer que cette valeur est voisine du pouvoir séparateur de l'oeil.

En astronomie de position, elle a bien sûr une valeur non négligeable.

R E S U M E

Après avoir rappelé la loi de Bouguer, nous établissons l'expression donnant la déviation d'un rayon lumineux traversant un milieu non homogène à symétrie sphérique. Nous l'appliquons au calcul approché de la déviation d'un rayon lumineux à la traversée de l'atmosphère et mentionnons deux pseudo-solutions qui, bien que donnant le résultat cherché, ne sont pas correctes. Nous terminons en établissant, par intégration de l'équation différentielle de la trajectoire, une expression plus exacte de l'aberration atmosphérique.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

Loi de Bouguer

Pierre BOUGUER (1698 - 1758) : Mathématicien, Physicien, Astronome. Nous n'avons pu retrouver la publication originale de cette formule bien connue des opticiens.

Loi $\frac{n-1}{\rho}$ = Cte (Loi de Gladstone)

On la trouve par exemple dans :

- Optique Physique - Tome I - Propagation, Cohérence, Interférences (p. 148) : J. ROIG (Masson).
- Recueil de problèmes (p. 389) : G. BRUHAT (Masson).

Loi $p = p_0 e^{-z/h}$

Résultat classique de mécanique. On le trouve par exemple dans :

- Mécanique (P. 455) : G. BRUHAT (Masson).
- Mécanique physique (p. 428) : P. FLEURY et J.P. MATHIEU (Eyrolles).

Ouvrages où l'on peut trouver les pseudo-solutions mentionnées

- Optique - Exercices et problèmes résolus (p. 28) : J.P. LECARDONNEL et P. TILLOY (Bréal).
- Images optiques (p. 52, Exercice 1-a) : P. FLEURY et J.P. MATHIEU (Eyrolles).
- Cours de Physique - 4ème partie - Optique, Etude des instruments (p. 158 à 160) : M. BOUASSE (Delagrave).
- Optique géométrique supérieure (p. 281 à 283) : M. BOUASSE (Delagrave).