INSTABILITE DES SYSTEMES AUTOGRAVITANTS

J.Ph. Perez, OMP. Toulouse

Les systèmes autogravitants, c'est-à-dire les systèmes qui sont confinés dans une région de l'espace en raison de l'interaction gravitationnelle, sont connus pour leur instabilité thermodynamique [1, 2].

Nous nous proposons d'établir ce résultat à partir d'une analyse simple du niveau du premier cycle universitaire.

Rappelons d'abord que, dans le cadre restreint de la mécanique, un système d'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ constante, et d'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(q)$, q étant le paramètre dont dépend le système, est en équilibre stable si [3] :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_p = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\, q^2} > 0.$$

Lorsqu'on considère un système thermodynamique isolé, les bilans énergétique et entropique, entre les instants successifs voisins t et $t + \mathrm{d}t$, s'écrivent respectivement [4,5] :

$$\mathrm{d}\mathcal{E} = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathrm{d}S = \delta S^p \geq 0.$$

On en déduit que son évolution est caractérisée par la fonction d'état S dont la variation élémentaire satisfait à l'inégalité $\mathrm{d}S \geq 0$. En introduisant la néguentropie $-S$ [6], qui joue dans ce cas le rôle de potentiel thermodynamique, la condition d'équilibre stable s'écrit, comme en mécanique :

$$\mathrm{d}(-S) = 0 \qquad \text{et} \qquad \left[\frac{\mathrm{d}^2(-S)}{\mathrm{d}q^2}\right]_e > 0.$$

Appliquons ce résultat au système $\mathcal{S}$ isolé formé de deux sous-systèmes $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ séparés par une cloison diatherme mais rigide. On sait que l'équilibre thermique est réalisé lorsque la température est uniforme dans tout le système. Désignant par T_1 et T_2 les températures respectives de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$, on sait qu'à l'équilibre : $T_1 = T_2$.

Calculons la dérivée seconde de la néguentropie $(-S)$ par rapport à la seule variable énergie interne U_1, les volumes V_1 et V_2 étant fixés. Comme $S = S_1 + S_2$ et $U = U_1 + U_2 =$ Cte, on a :

$$\frac{\mathrm{d}^2(-S)}{\mathrm{d}U_1^2} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_1}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}U_1}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_2}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}U_2}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_1}\left(\frac{1}{T_1}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_2}\left(\frac{1}{T_2}\right)$$

puisque $\mathrm{d}U_2 = -\mathrm{d}U_1$ et $1/T = (\partial S/\partial U)_V$. Or :

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_1}\left(\frac{\mathrm{d}S_1}{\mathrm{d}U_1}\right) = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_1}\left(\frac{1}{T_1}\right) = \frac{1}{T_1^2}\left(\frac{\mathrm{d}T_1}{\mathrm{d}U_1}\right) = \frac{1}{C_{v,1}T_1^2}$$

et de même :
$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}U_2}\left(\frac{\mathrm{d}S_2}{\mathrm{d}U_2}\right) = \frac{1}{C_{v,2}T_2^2}.$$
Finalement, puisque $T_1 = T_2$ à l'équilibre :
$$\frac{\mathrm{d}^2(-S)}{\mathrm{d}U_1^2} = \frac{1}{T_1^2}\left(\frac{1}{C_{v,1}} + \frac{1}{C_{v,2}}\right).$$
Ainsi, la stabilité de l'équilibre est liée au signe des capacités thermiques. Dans le cas le plus fréquent, ces capacités thermiques sont positives; il en résulte que la néguentropie $-S$ passe par un minimum au voisinage de l'équilibre.

Ce résultat n'est pas banal car on peut montrer que pour des objets galactiques autogravitants, dans lesquels l'interaction gravitationnelle joue un rôle décisif, la capacité thermique est négative.

En effet, appliquons le théorème du viriel à un ensemble de points matériels en interaction gravitationnelle [3]. On a :
$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = -\frac{\mathcal{V}}{2} \quad \text{avec} \quad \mathcal{V} = \langle \sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle,$$
où $\mathbf{F}_i$ désigne la force qui s'exerce sur le point i. Or, cette somme s'écrit aussi, en groupant les particules par couples :
$$\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i = \sum_{ij} \mathbf{F}_{j\to i} \cdot \mathbf{r}_i + \mathbf{F}_{i\to j} \cdot \mathbf{r}_j = \sum_{ij} \mathbf{F}_{j\to i} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j),$$
d'après l'opposition des actions réciproques. En explicitant la force de gravitation : $\mathbf{F}_{j\to i} = -(K/r_{ij}^3)(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)$, on trouve :
$$\sum_{ij} \mathbf{F}_{j\to i} \cdot (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) = \sum_{ij} -\frac{K}{r_{ij}^3}(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j)^2 = \sum_{ij} -\frac{K}{r_{ij}} \quad \text{d'où} \quad \mathcal{V} = \langle \mathcal{E}_p \rangle.$$
Il en résulte que :
$$\langle \mathcal{E}_c \rangle = -\frac{\langle \mathcal{E}_p \rangle}{2} \qquad \text{et} \qquad U = \langle \mathcal{E}_c \rangle + \langle \mathcal{E}_p \rangle = -\langle \mathcal{E}_c \rangle.$$
On en déduit la capacité thermique à volume constant :
$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = -\left(\frac{\partial \langle \mathcal{E}_c \rangle}{\partial T}\right)_V = -\frac{3}{2}Nk_B \quad \text{puisque} \quad \langle \mathcal{E}_c \rangle = \frac{3}{2}Nk_BT,$$
d'après l'interprétation cinétique de la température.

Références

[1] F. Lizhi et L. Shuxian, *La naissance de l'Univers*, InterÉditions, 1990

[2] J. Binney and S. Tremaine, *Galactic Dynamics*, Princeton series in astrophysics, 1987

[3] J-Ph. Pérez, *Mécanique, points matériels, solides, fluides*, Masson, 1991

[4] I. Prigogine, *Thermodynamique des phénomènes irréversibles*, Dunod, 1968

[5] J-Ph. Pérez et A-M. Romulus, *Thermodynamique, fondements et applications*, Masson, Septembre 1993

[6] L. Brillouin, *La science et la théorie de l'information*, Jacques Gabay, 1988 (1ère édition en 1952).