

L'ANTISYMETRIE EN PHYSIQUE ELEMENTAIRE

JEAN SIVARDIERE

DRFMC/SPSMS/Groupe Magnétisme et Diffusion
par Interactions Hyperfines
Centre d'Etudes Nucléaires de Grenoble
85 X - 38041 Grenoble Cedex, France

RESUME

Nous définissons les opérations et les groupes d'antisymétrie, puis, nous discutons les propriétés de transformation des grandeurs physiques par antisymétrie. Nous montrons que l'introduction des opérations d'antisymétrie qui conservent un système physique permet d'augmenter le pouvoir prédictif du principe de symétrie de Curie. Nous présentons diverses applications élémentaires de cette procédure en mécanique et en électromagnétisme.

INTRODUCTION

L'analyse de la symétrie d'un système physique est une technique puissante qui permet d'obtenir, sans calcul analytique, de nombreuses propriétés qualitatives du système considéré. Une énumération exhaustive de ces propriétés est basée sur la théorie des représentations irréductibles des groupes ⁽¹⁾. Mais cette théorie est complexe et peut difficilement être présentée à des étudiants débutants. On doit se borner en pratique à l'utilisation du principe de symétrie de Curie, équivalent à la considération de la seule représentation "identité" des groupes. Selon ce principe ⁽²⁾⁽³⁾, la symétrie d'une propriété d'un système (d'une solution d'un problème) est au moins aussi symétrique que le système (le problème) lui-même, si du moins cette propriété (cette solution) est unique en son genre.

Les groupes de symétrie généralement considérés sont formés d'opérations géométriques : translations, rotations, symétries par rapport à des points (centrosymétries) et des plans (miroirs). De telles opérations sont dites spatiales, car elles agissent sur la position des objets dans l'espace. Comme nous allons le voir, il faut également envisager des opérations *non géométriques* afin de décrire toute la réalité physique. Si on veut extraire le maximum d'informations du principe de Curie, il est alors nécessaire de compléter le groupe de symétrie géométrique en introduisant ces opérations non géométriques. Après avoir défini des opérations non géométriques dites d'antisymétrie, nous étudierons les propriétés de transformation et d'invariance des grandeurs scalaires et vectorielles dans ces opérations. Puis nous décrirons des situations physiques élémentaires qui peuvent être utilement analysées en termes d'antisymétrie ⁽⁴⁾.

SYMETRIE ET ANTISYMETRIE

La nécessité d'élargir la notion de symétrie géométrique a été comprise depuis longtemps (1930), les principaux développements sont dus au cristallographe Shubnikov ⁽⁵⁾. Considérons un système dont chaque élément constitutif, macroscopique ou microscopique, peut se trouver soit dans un certain état, soit dans l'état "opposé" : on dit qu'il possède un degré de liberté interne dichotomique. Ce degré de liberté interne peut être *géométrique* (l'élément est droit ou gauche, et le degré de liberté interne est la chiralité, ou situé à droite ou à gauche d'un point ou d'un plan), mais aussi *chromatique* (l'élément est noir ou blanc), *chimique* (c'est un atome de type A ou de type B, et le système est une solution solide binaire), *électrique* (c'est un atome de charge +q ou -q, ou une molécule de moment dipolaire électrique orienté vers le haut ou vers le bas), ou encore *magnétique* (c'est un atome de moment dipolaire magnétique orienté vers le haut ou vers le bas).

On passe d'un élément droit à l'élément gauche correspondant par une inversion ou centrosymétrie ; cette opération binaire est notée $\bar{1}$ (l'identité étant notée 1). Il est également possible de définir une opération binaire appelée *antisymétrie*, qui sera notée 1', qui renverse un degré de liberté interne non géométrique. 1' est par exemple l'opération non géométrique qui permute les couleurs noir et blanc, ou qui change un atome A en un atome B et réciproquement, ou qui renverse le signe de la charge électrique, ou encore qui renverse le signe des vitesses et par suite le sens des moments magnétiques ("renversement du temps").

L'opération d'inversion $\bar{1}$ peut être combinée avec les rotations propres ou directes autour d'axes passant par le centre d'inversion et commute avec elles ; le produit d'une rotation propre ou directe r par $\bar{1}$ est appelé opération impropre ou inverse et notée \bar{r} . De la même manière, l'opération 1' peut être combinée avec les opérations de symétrie ordinaires et commute avec elles ; le produit d'une telle opération α par 1' est appelé opération d'antisymétrie, opération mixte ou colorée, ou antiopération, et notée α' .

Il arrive souvent qu'un système, soumis à une opération de symétrie α , soit conservé au signe près de son degré de liberté interne. Cette information est perdue si on ignore la notion d'antisymétrie ; elle est au contraire prise en compte si on élargit le groupe de symétrie en introduisant l'antiopération α' , qui conserve le système. Considérons par exemple une chaîne atomique alternée ABABA..., ou une chaîne antiferromagnétique : d étant la distance interatomique, la chaîne est invariante dans une translation de longueur $2d$, mais aussi dans une antitranslation de longueur d . Considérons de même un échiquier et l'axe Δ perpendiculaire à son plan en son centre : l'échiquier est invariant dans la rotation binaire 2 autour de Δ , mais aussi dans l'antirotation quaternaire 4' autour de cet axe.

GROUPES D'ANTISYMETRIE

On sait qu'il existe trois types de groupes de symétrie ordinaire ou géométrique : les groupes propres, qui ne contiennent que des opérations propres ; les groupes impropres, qui contiennent autant d'opérations propres que d'opérations impropres mais pas l'inversion $\bar{1}$ elle-même ; enfin les groupes centrosymétriques, qui contiennent autant d'opérations propres que d'opérations impropres, dont l'inversion. On montre aisément que, de la même manière, il existe trois types de groupes d'antisymétrie : les groupes triviaux ou monocolors, qui ne contiennent que des opérations ordinaires ; les groupes mineurs ou bicolors, qui contiennent autant d'opérations que d'antiopérations mais pas l'antisymétrie 1' elle-même ; enfin les groupes majeurs ou gris, qui

contiennent autant d'opérations que d'antiopérations, dont l'antisymétrie (un objet gris est invariant dans 1', de même qu'un objet achiral est invariant par inversion). Ainsi le groupe d'antisymétrie d'un échiquier ordinaire est 4'm'm ; le groupe est 4mm si les cases sont toutes blanches ou toutes noires, et 4mm.l' si elles sont toutes grises. Le tableau 1 résume la comparaison entre symétrie et antisymétrie.

Type de symétrie	Symétrie ordinaire	Antisymétrie
Opérations	propres impropres	opérations antiopérations
Groupes	propres impropres centrosymétriques	triviaux mineurs majeurs
Objets	chiraux achiraux	colorés gris

Tableau 1 : symétrie géométrique et antisymétrie.

Les groupes d'antisymétrie sont encore appelés groupes à deux couleurs, groupes de Shubnikov, ou encore groupes magnétiques (les groupes gris sont alors appelés paramagnétiques). Ils sont aujourd'hui largement utilisés pour décrire les macles cristallines (6) et les surstructures observées dans les cristaux plastiques, les alliages binaires, les cristaux antiferroélectriques et les cristaux magnétiques (7) (8).

Dans la suite de cet article, nous allons nous intéresser uniquement à des systèmes macroscopiques et, sauf dans l'appendice, l'antisymétrie 1' considérée sera l'antisymétrie magnétique ou renversement du temps.

PROPRIETES DE TRANSFORMATION DES GRANDEURS

Tant que la symétrie géométrique ordinaire est seule considérée, on est amené à classer les grandeurs physiques en deux catégories (9) : les grandeurs *polaires*, dont le signe ne dépend pas de la convention d'orientation de l'espace, et les grandeurs *axiales*, dont le signe en dépend. Un changement de convention est équivalent à l'application d'une inversion puisque cette opération transforme un repère droit en un repère gauche. Ainsi un scalaire ordinaire ou polaire s , tel que la masse ou le temps, est invariant dans une inversion et, par convention, on admet qu'il en est de même de la charge électrique ; un pseudo-scalaire ou scalaire axial s^* , tel que la chiralité ou le pouvoir rotatoire d'un milieu optiquement actif, change de signe.

De même un vecteur polaire \vec{V} , tel qu'un vecteur de translation \vec{T} ou, la charge étant un scalaire polaire, un champ électrique \vec{E} , change de signe dans une inversion ; un vecteur axial \vec{V} , tel qu'un vecteur de rotation $\vec{\Omega}$

ou un champ magnétique \vec{B} , est au contraire invariant. Par suite un vecteur polaire invariant dans un miroir est parallèle à ce miroir ; un vecteur axial invariant dans un miroir lui est perpendiculaire.

Quand le renversement du temps $1'$ est introduit, une nouvelle classification des grandeurs physiques doit être envisagée (10)-(12). L'axe des temps peut être orienté de manière arbitraire, soit vers l'avenir selon la convention habituelle, soit vers le passé. Un changement de convention est équivalent à l'application de l'opération $1'$. Une grandeur est dite *paire* dans $1'$, ou "électrique", si elle est invariante dans $1'$; elle est dite *impaire*, ou "magnétique", si elle change de signe.

Considérons par exemple un électron atomique sur son orbite classique. Si on lui applique l'opération $1'$, sa masse m , sa position \vec{r} , son accélération $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ et la force \vec{F} qui agit sur lui sont invariants. Il en est de même de sa charge électrique q et du champ électrique \vec{E} qu'il crée en chaque point de l'espace. Sa vitesse linéaire $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$, sa vitesse angulaire $\vec{\Omega}$, son moment cinétique \vec{L} , son moment magnétique $\vec{\mu} = \frac{q}{2m}\vec{L}$, les masses magnétiques associées m^* et le champ magnétique \vec{B} qu'il crée en chaque point de l'espace changent au contraire de signe.

Finalement on voit que les grandeurs physiques peuvent être classées en quatre catégories (tableaux 2 et 3) :

- les grandeurs polaires paires (scalaires s_p comme une masse volumique ρ , et vecteurs \vec{V}_p comme une force \vec{F} ou un moment dipolaire électrique \vec{d}) ;
- les grandeurs polaires impaires (scalaires s_i comme le temps t ou un débit massique $\frac{dp}{dt}$, et vecteurs \vec{V}_i comme une quantité de mouvement $\vec{p} = m\vec{v}$, une densité de courant $\vec{j} = \rho\vec{v}$ ou un vecteur de Poynting $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{B}$) ;
- les grandeurs axiales paires (scalaires s_p^* comme un angle orienté θ , la chiralité d'un objet ou l'hélicité $h = m\vec{v} \cdot \vec{\sigma}$ d'une particule élémentaire de spin $\vec{\sigma}$, et vecteurs \vec{V}_p comme le moment $\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{F}$ d'une force) ;
- les grandeurs axiales impaires (scalaires s_i^* comme une masse magnétique m^* ou un potentiel scalaire magnétique V^* , et vecteurs \vec{V}_i comme un champ ou un moment magnétique).

Scalaire	polaires invariants dans $\bar{1}$	axiaux changent de signe dans $\bar{1}$
pairs invariants dans $1'$	$s_p : m, q, \rho, V$	$s^*_p : c, h, \theta$
impairs changent de signe dans $1'$	$s_i : t, \frac{dp}{dt}$	$s^*_i : m^*, V^*, \frac{d\theta}{dt}$

Tableau 2 : les quatre types de scalaires.

Vecteur	axiaux invariants dans $\bar{1}$	polaires changent de signe dans $\bar{1}$
pairs invariants dans $1'$	$\vec{V}_p : \vec{\Gamma}, \frac{d\vec{L}}{dt}, \frac{d\vec{\Omega}}{dt}, \frac{d\vec{B}}{dt}$	$\vec{V}_p : \vec{r}, \vec{a}, \vec{F}, \vec{E}, \vec{d}$
impairs changent de signe dans $1'$	$\vec{V}_i : \vec{L}, \vec{\Omega}, \text{rot } \vec{v}, \vec{B}, \vec{\mu}$	$\vec{V}_i : \vec{v}, \vec{p}, \vec{j}, \vec{A}, \frac{d\vec{E}}{dt}, \vec{S}$

Tableau 3 : les quatre types de vecteurs
(\vec{A} désigne ici le potentiel vecteur magnétique).

Considérons maintenant les propriétés de transformation et d'invariance des vecteurs dans un miroir m et un antimiroir m' . Contrairement à un vecteur impair, un vecteur pair se transforme de la même manière dans m et dans m' puisqu'il est invariant dans $1'$. Un vecteur polaire et un vecteur axial invariants dans m ont des directions différentes : le vecteur polaire est parallèle au miroir, le vecteur axial lui est perpendiculaire, le résultat est indépendant du caractère pair ou impair du vecteur. La direction d'un vecteur invariant dans m' dépend à la fois de son caractère polaire/axial et de son caractère pair/impair (fig.1).

HOMOGENEITE DES RELATIONS

La classification précédente des grandeurs physiques fournit une manière simple de vérifier les relations entre des scalaires ou des vecteurs : les deux membres de la relation doivent avoir le même caractère polaire/axial et pair/impair. Ainsi la force de Lorentz $q \vec{v} \times \vec{B}$ est bien un vecteur polaire pair ; dans la relation $\vec{\Omega} = -\frac{q}{2m} \vec{B}$ qui décrit le mouvement cyclotron d'une charge q , les deux membres sont des vecteurs axiaux impairs ; dans la relation de Maxwell $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, les

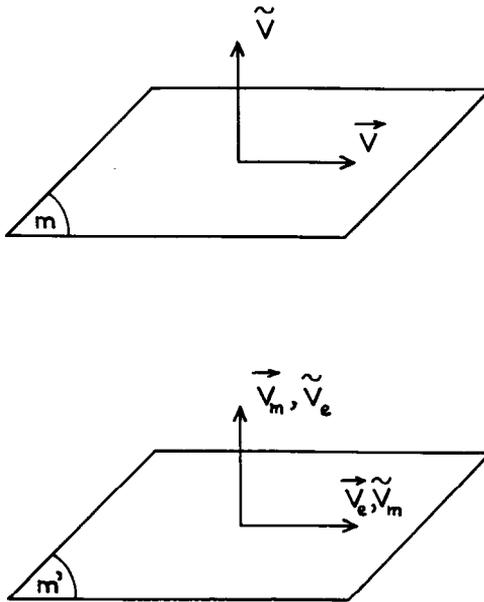


Fig.1 - Orientation des vecteurs invariants dans un miroir m et un antimiroir magnétique m' suivant leur caractère polaire/axial et pair (électrique)/impair (magnétique).

deux membres sont des vecteurs axiaux pairs puisque l'opérateur $\overrightarrow{\text{rot}} = \nabla \times$ est lui-même axial pair. Les relations $\vec{F} = m^* \vec{B}$ et $\vec{B} = -\overline{\text{grad}} \vec{V}^*$ sont elles aussi homogènes puisque m^* et V^* sont des scalaires axiaux impairs.

Le potentiel vecteur magnétique \vec{A} est introduit par la relation $\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$, c'est donc un vecteur polaire impair, comme une densité de courant \vec{j} . Il n'est en fait défini qu'au gradient près d'une fonction scalaire Λ arbitraire, mais dont les propriétés de transformation sont imposées : Λ est un scalaire polaire impair. Les expressions classiques donnant \vec{A} pour un courant I :

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I}{r} d\vec{l}$$

et pour un aimant de moment $\vec{\mu}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{j} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3}$$

sont bien homogènes. La figure 2 donne les directions des vecteurs électromagnétiques invariants dans un miroir ou un antimiroir.

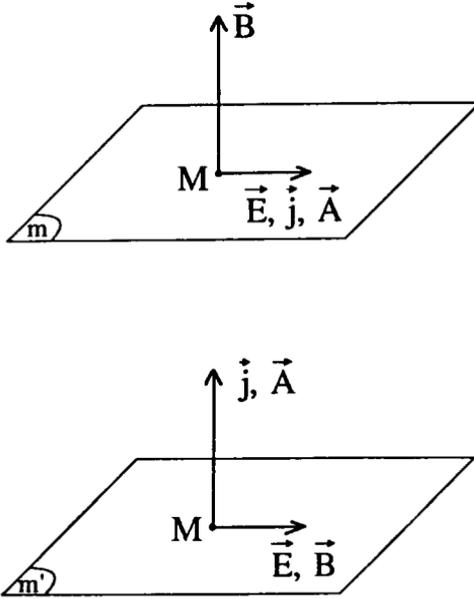


Fig.2 - Orientation des vecteurs électromagnétiques invariants dans un miroir m et un antimiroir magnétique m' .

UTILISATION DE L'ANTISYMETRIE

Nous allons maintenant appliquer les résultats précédents à l'étude de systèmes physiques élémentaires invariants dans des groupes d'antisymétrie, l'opération d'antisymétrie étant le renversement du temps. En règle générale, plus le groupe de symétrie d'un système est riche, plus la symétrie impose de contraintes à ses propriétés. Comme nous allons le vérifier, la considération de la symétrie spatiotemporelle des systèmes permet effectivement d'obtenir davantage d'informations à partir du principe de Curie que la considération de la seule symétrie géométrique.

- L'effet Hall. Considérons l'effet Hall dans un conducteur isotrope. Un champ magnétique \vec{B} est appliqué perpendiculairement à une densité de courant uniforme \vec{j} , un champ électrique \vec{E} est induit (fig.3). Le plan perpendiculaire à \vec{B} et contenant \vec{j} est un miroir m : c'est le seul élément de symétrie ordinaire du système. D'après le principe de Curie, \vec{E} doit être parallèle à m , mais sa direction exacte ne peut être spécifiée. Cependant le plan perpendiculaire à \vec{j} est, en l'absence de dissipation, un antimiroir m' : \vec{E} doit être parallèle à m' , il est donc parallèle à l'intersection de m et m' , qui est un antiaxe $2'$.

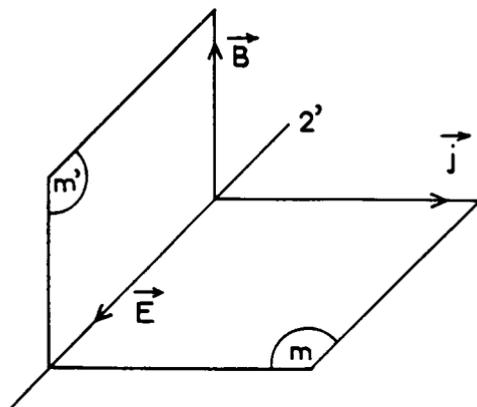


Fig.3 - Symétrie de l'effet Hall : le champ électrique est perpendiculaire au courant et au champ magnétique.

- L'effet Wiedemann. On aimante un fil de fer linéaire dans le sens de sa longueur, soit $\vec{\mu}$ le moment magnétique induit. Si on lance un courant électrique \vec{j} dans le fil, le fil prend une forme hélicoïdale (13)(14). L'effet est prévisible : si le fil restait plan, son plan devrait être à la fois un miroir laissant \vec{j} invariant, et un antimiroir laissant $\vec{\mu}$ invariant.

- La direction d'un champ magnétique. Trouver la direction du champ magnétique \vec{B} créé en un point M quelconque de l'espace par un courant linéaire infini (fig.4a), un solénoïde cylindrique infini, un solénoïde toroidal ou encore une nappe plane infinie et uniforme de courant est immédiat : dans chaque cas, on peut trouver un miroir m contenant M , le champ \vec{B} est perpendiculaire à m .

Soit maintenant un courant circulaire d'axe Δ (fig.4b), son groupe de symétrie géométrique est ∞/m où ∞ désigne l'axe de rotation Δ d'ordre infini et m le miroir contenant le courant (un miroir méridien, c'est-à-dire contenant l'axe Δ , conserve le conducteur, mais renverse le sens du

courant). Si M est sur Δ , le champ est parallèle à Δ ; si M est dans m , le champ est perpendiculaire à m ; mais si M occupe une position quelconque, on ne peut rien dire de la direction du champ car aucun élément de symétrie ne contient M .

Considérons cependant le groupe de symétrie spatiotemporelle du courant, qui est ∞/mm' , où m' désigne l'ensemble de tous les antimirrors méridiens. D'après le principe de Curie et les résultats de la figure 2, le champ en M est contenu dans l'antimiroir m' qui passe par M . Si l'invariance dans m' est ignorée, le résultat précédent ne peut être obtenu qu'en supposant que le champ possède une composante perpendiculaire au plan méridien, et en l'éliminant par application du théorème d'Ampère.

- La direction d'un potentiel vecteur magnétique. Cherchons le potentiel vecteur magnétique \vec{A} créé en M par un courant linéaire infini d'axe Δ (fig.4a). Le plan contenant Δ et M est un miroir m , et \vec{A} est parallèle à m : sa direction exacte ne peut être précisée à partir de la seule symétrie géométrique. Cependant le plan perpendiculaire à Δ et passant par M est un antimiroir m' , \vec{A} est perpendiculaire à ce plan, donc parallèle à Δ .

Considérons maintenant un courant circulaire d'axe Δ (fig.4b). Le plan contenant Δ et M est un antimiroir m' , \vec{A} est perpendiculaire à ce plan. La même remarque s'applique au potentiel vecteur créé par un toroïde, une nappe plane et infinie de courant ou un moment magnétique : \vec{B} est perpendiculaire à un miroir (et \vec{A} parallèle à ce miroir), \vec{A} est perpendiculaire à un antimiroir (et \vec{B} parallèle à cet antimiroir).

- La direction d'un champ électromoteur. Soit un solénoïde infini d'axe Δ parcouru par un courant stationnaire : le potentiel vecteur \vec{A} en M est perpendiculaire à l'antimiroir m' contenant Δ et M . Si le courant varie avec le temps, il en est de même du champ magnétique, et un champ électromoteur \vec{E}_i est induit en chaque point M de l'espace intérieur ou

extérieur au solénoïde. Puisque $\vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, \vec{E}_i est perpendiculaire à m' :

étant polaire pair, ce vecteur devrait être parallèle à m' , mais m' n'est pas un élément de symétrie du courant variable. Si l'invariance dans m' à un instant donné est ignorée, le résultat précédent ne peut être obtenu qu'en supposant que le champ électromoteur en M possède une composante radiale, et en l'éliminant par application du théorème de Gauss (la composante suivant Δ est nulle puisque le plan perpendiculaire à Δ et contenant M est un miroir).

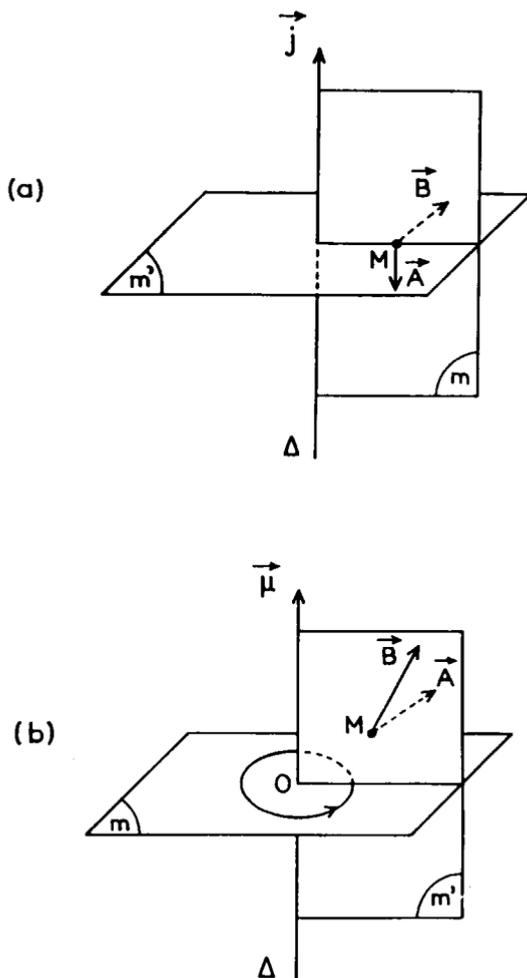


Fig.4 - Champ magnétique \vec{B} et potentiel vecteur magnétique \vec{A} produits par un courant rectiligne (a) et par un courant circulaire (b) : \vec{B} est parallèle et \vec{A} perpendiculaire à l'antimiroir magnétique m' .

- La Terre en rotation. Soit un modèle idéal de la Terre (15) : l'axe de rotation propre et l'axe magnétique sont parallèles à la direction d'aplatissement ou axe polaire Δ . Un plan méridien contenant Δ est un antimiroir m' si on suppose que le vecteur vitesse angulaire $\vec{\Omega}$ de la Terre est indépendant du temps. Le champ magnétique en un point M

est donc contenu dans le plan méridien m' de M . Un plomb P suspendu en M est lui aussi contenu dans m' puisque le vecteur \overrightarrow{MP} est polaire : ce résultat est en accord avec le caractère polaire des accélérations gravitationnelle et centrifuge, vecteurs polaires pairs qui n'ont pas de composante perpendiculaire à m' . Considérons un gyroscope de Foucault à l'équilibre en M . Son vecteur vitesse angulaire $\vec{\omega}$ doit être invariant dans les opérations conservant la Terre et M : il est donc contenu dans le plan méridien m' de M .

Supposons maintenant que le vecteur $\vec{\Omega}$ dépende du temps : m' n'est plus un élément de symétrie, puisque l'accélération angulaire $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t}$ est axiale paire et contenue dans m' , et le fil à plomb n'est plus nécessairement contenu dans m' . Effectivement la force d'inertie d'Euler $\frac{\partial \vec{\Omega}}{\partial t} \times \overrightarrow{OM}$ (O est le centre de la Terre) est perpendiculaire à m' .

- Le vecteur de Laplace. Considérons l'orbite elliptique de la Terre autour du Soleil, orientée dans le sens du mouvement (fig.5). Le plan de l'orbite est un miroir m , le grand axe de l'orbite est un antiaxe $2'$ et le plan perpendiculaire à m et contenant le grand axe est un antimiroir m' : le groupe de symétrie du système est donc $2'mm'$.

Le mouvement de la Terre, de masse m , de position \vec{r} et de vitesse \vec{v} , est caractérisé par deux vecteurs invariants ⁽¹⁶⁾ : le moment cinétique $\vec{L} = m \vec{r} \times \vec{v}$ et le vecteur de Laplace $\vec{A} = \vec{v} \times \vec{L} - \alpha \frac{\vec{r}}{r}$. α est le coefficient du

potentiel de Képler $U = -\frac{\alpha}{r}$. \vec{L} est axial, et donc perpendiculaire à m , en accord avec sa définition analytique. \vec{A} est polaire pair, contenu dans m et m' : il est donc parallèle au grand axe de l'orbite, et effectivement on peut montrer que $\vec{A} = \alpha e \vec{u}$ où e est l'excentricité de l'orbite elliptique et \vec{u} un vecteur unitaire dirigé du Soleil vers le périhélie de l'orbite. Le vecteur de Hamilton $\vec{H} = \vec{L} \times \vec{A}$, lui aussi invariant, est polaire impair : il est perpendiculaire à m' , donc parallèle au petit axe de l'orbite.

Considérons également un mouvement harmonique elliptique : le centre attractif est le centre de l'ellipse. Le plan de l'orbite est un miroir m , chaque plan perpendiculaire à m et contenant un axe de l'ellipse est un antimiroir : le groupe de symétrie du système est donc $mm'm'$. Le mouvement est caractérisé, outre le moment cinétique perpendiculaire à m , par deux vecteurs de Laplace \vec{A} et \vec{B} perpendiculaires entre eux ⁽¹²⁾ : chacun d'eux est parallèle à m et à un antimiroir, donc à un axe de l'orbite.

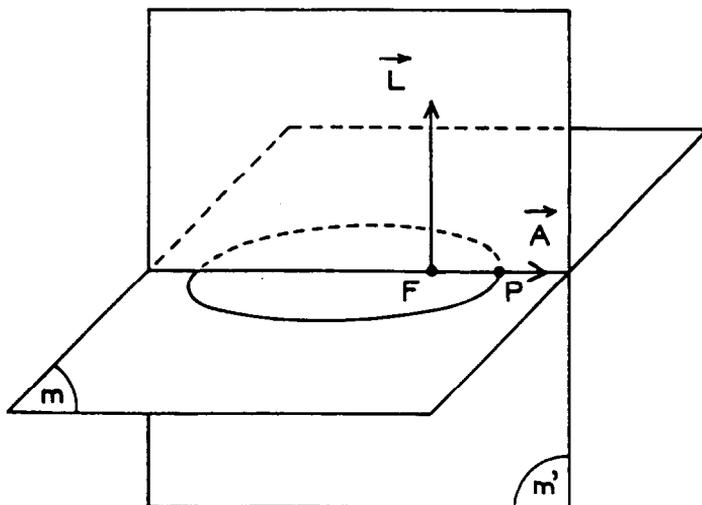


Fig.5- Mouvement orbital de la Terre : F est le soleil, situé au foyer de l'orbite elliptique, P est le périhélie de l'orbite, \vec{L} le moment cinétique de la Terre et \vec{A} le vecteur de Laplace.

- Le rotationnel d'un champ de vitesses. Un vecteur vitesse étant polaire impair, son rotationnel est axial impair. Considérons un champ de vitesses de symétrie de révolution ∞/m' autour d'un axe Δ , un tourbillon par exemple : les lignes de champ sont des cercles coaxiaux. En chaque point, $\text{rot } \vec{v}$ est parallèle à l'antimiroir m' contenant M et Δ . Si le champ est bidimensionnel, sa symétrie est ∞/mm' : le plan perpendiculaire à Δ et passant par M étant un miroir, $\text{rot } \vec{v}$ est parallèle à Δ .

- Lignes de champ des doublets. Il est bien connu que les doublets électrique, magnétique et hydrodynamique (source-puits) ont des lignes de champ de même topographie : l'antisymétrie permet de justifier ce résultat. Le doublet magnétique est caractérisé par un vecteur axial $\vec{\mu}$ impair et son groupe de symétrie est ∞/mm' , les lignes de champ magnétique sont donc dans les plans m' contenant $\vec{\mu}$ et traversent orthogonalement le miroir m . Le doublet hydrodynamique formé d'une source et d'un puits isotropes est caractérisé par un vecteur polaire impair \vec{s} et son groupe de symétrie est $\infty/m'm$, les lignes de vitesse sont donc dans les plans m contenant \vec{s} et traversent orthogonalement le miroir m' . Le cas du doublet électrique est examiné en appendice.

On peut, par des considérations analogues, vérifier que le champ des vitesses d'un doublet formé de deux tourbillons de sens opposés a

même topographie que celui d'un doublet formé d'une ligne de sources et d'une ligne de puits, les vecteurs caractérisant les deux doublets étant perpendiculaires ⁽¹⁷⁾ : les deux doublets ont en effet la même symétrie.

CONCLUSION

La notion d'antisymétrie peut être présentée sans difficulté majeure à des étudiants débutants. Elle fournit une description plus complète des propriétés d'invariance des systèmes macroscopiques, et constitue une introduction à l'étude des surstructures cristallines, en particulier des surstructures magnétiques. Elle permet une utilisation plus riche du principe de Curie pour la détermination de la direction des vecteurs en mécanique et en électromagnétisme : dans certains cas, on peut ainsi préciser entièrement la direction du champ magnétique et du potentiel vecteur, ce qui facilite leur calcul à l'aide des théorèmes d'Ampère et de Stokes.

APPENDICE : L'ANTISYMETRIE ELECTRIQUE

Nous envisageons dans cet appendice l'opération d'antisymétrie électrique qui renverse le signe des charges électriques, ou conjugaison de charge : elle sera notée I pour éviter toute confusion avec l'opération d'antisymétrie magnétique ou renversement du temps $1'$.

Le signe d'une charge électrique est arbitraire, ce n'est pas une propriété intrinsèque de la particule qui la porte : dans la convention habituelle, la charge de l'électron est négative ; le signe des charges de toutes les autres particules est alors fixé sans ambiguïté. Une classification nouvelle des grandeurs physiques s'introduit quand on envisage la convention qui fixe le signe des charges électriques et l'opération I . Deux classes de grandeurs apparaissent :

- les grandeurs électriquement paires, c'est-à-dire invariantes dans le changement de convention ou, ce qui revient au même, dans I ;
- les grandeurs électriquement impaires, qui changent de signe dans I .

Les grandeurs mécaniques sont paires, la charge électrique et les autres grandeurs électriques, électrocinétiques et magnétiques sont impaires (10)-(12). En définitive, nous pouvons classer les grandeurs physiques en quatre catégories suivant leur comportement quand on renverse simultanément les deux conventions qui fixent l'orientation de l'espace et le signe des charges électriques (on obtient même 8 catégories si on tient compte également du comportement dans le renversement du temps) : les grandeurs polaires électriquement paires (m , \vec{r}) ; les grandeurs polaires électriquement impaires (q , V , \vec{E}) ; les grandeurs axiales électriquement paires (chiralité, $\vec{\Omega}$) ; les grandeurs axiales électriquement impaires (m^* , \vec{B}).

Une loi ne peut relier entre elles que des grandeurs ayant le même caractère polaire/axial et pair/impair dans l'opération 1". Cette remarque fournit une méthode de vérification des formules, sachant qu'une grandeur produit d'un nombre pair (impair) de grandeurs impaires est paire (impaire). Ainsi la formule $\vec{\Omega} = -\frac{q}{m} \vec{B}$, qui donne la pulsation d'un mouvement cyclotron, est plausible puisqu'elle est homogène (elle relie deux vecteurs axiaux électriquement pairs). Les grandeurs paires et impaires ont les mêmes propriétés de transformation dans les opérations de symétrie ordinaires. Leurs propriétés de transformation diffèrent au contraire dans les opérations de symétrie mixtes. La figure 6 illustre les différences de comportement d'un vecteur position et d'un champ électrique dans l'opération antimiroir électrique m'' . On en déduit qu'un champ électrique invariant est parallèle à un miroir et perpendiculaire à un antimiroir électrique.

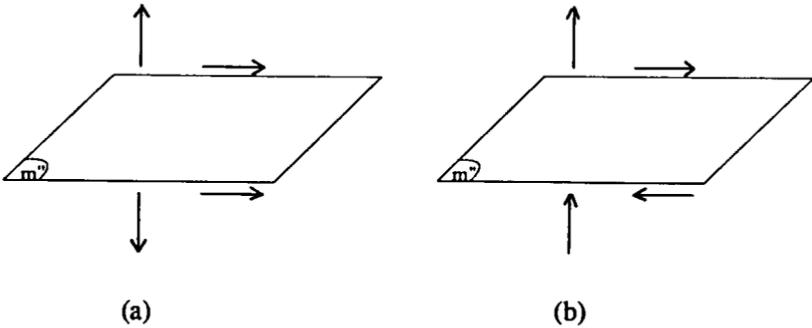


Fig.6 - Transformation d'un vecteur dans un antimiroir électrique m'' :
(a) vecteur position ; (b) champ électrique.

Considérons une répartition de charges possédant un miroir m . Le potentiel de Coulomb $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}$ prend deux valeurs égales en deux points symétriques par rapport à m , et les surfaces équipotentielles sont deux à deux symétriques. Si la répartition possède un antimiroir m'' , V prend deux valeurs opposées en deux points symétriques par rapport à m'' . V est nul sur m'' : m'' est une équipotentielle et, en chacun de ses points, le champ lui est perpendiculaire, en accord avec la figure 6b. Considérons alors un doublet électrique caractérisé par un vecteur polaire impair \vec{d} : son groupe de symétrie est $\infty/m''m$, les lignes de champ sont donc dans les plans m contenant \vec{d} et traversent orthogonalement le plan médian du doublet qui est un antimiroir m'' (fig.7). Le tableau 4 résume la comparaison entre les trois types de doublets.

Type de doublet	magnétique	source-puits	électrique
antisymétrie	1'	1'	1''
groupe	∞/mm'	$\infty/m'm$	$\infty/m''m$
source du champ	$\vec{\mu}$	\vec{s}	\vec{d}
vecteur champ	\vec{B}	\vec{v}	\vec{E}
caractère des vecteurs	axiaux impairs	polaires impairs	polaires impairs

Tableau 4 : comparaison entre les trois types de doublets.

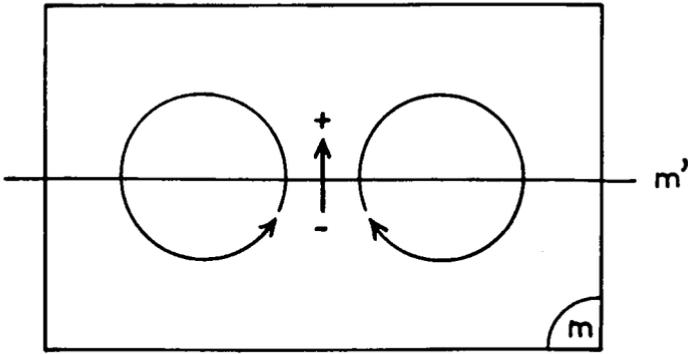


Fig.7 - Symétrie des lignes de champ d'un doublet électrique \vec{d} : un plan contenant \vec{d} est un miroir m , le plan médian du doublet est un antimiroir électrique m'' .

REFERENCES

- (1) Voir par exemple M. HULIN et O. BETBEDER, Théorie des groupes appliquée à la Physique, Editions de Physique, Paris (1992).
- (2) R. SHAW, Am. J. Phys. 33, 300 (1965).
- (3) J. SIVARDIERE, Bull. Union Phys. 689, 1579 (1986).
- (4) Le contenu de cet article a été présenté sommairement au Congrès de la Société Française de Physique, Caen (septembre 1991).
- (5) A. V. SHUBNIKOV et V. A. KOPTSIK, Symmetry in science and art, Plenum Press, New-York (1974).
- (6) H. CURIEN et Y. LE CORRE, Bull. Soc. Franç. Miner. Crist. 81, 126 (1958).
- (7) Y. LE CORRE, Bull. Soc. Franç. Miner. Crist. 81, 120 (1958) et J. Phys. Rad. 19, 750 (1958).
- (8) A. P. CRACKNELL, Contemp. Phys. 8, 459 (1967).
- (9) J. SIVARDIERE, Bull. Union Phys. 709, 1239 (1988).
- (10) J. ROSEN, Am. J. Phys. 41, 586 (1973).
- (11) J. D. JACKSON, Classical electrodynamics, 2^o edition, p. 248, John Wiley, New-York (1975).
- (12) J. W. NORBURY, Eur. J. Phys. 11, 99 (1990).
- (13) S. CHIKAZUMI, Physics of Magnetism, John Wiley, New-York (1964).
- (14) J. NICOLLE, La symétrie, Collection Que Sais-Je n°743, Presses Universitaires de France, Paris (1965).
- (15) J. SIVARDIERE, Eur. J. Phys. 5, 46 (1984).
- (16) J. SIVARDIERE, Bull. Union Phys. 751, 165 (1993).
- (17) Voir G. T. BATCHELOR, An introduction to fluid dynamics, Cambridge University Press, Cambridge (1967).