A propos du cyclotron en classe de terminale

par Alain DUPONT
Lycée Paul Gauguin, Papeete, Tahiti
Rémi CASTÉRAS et Yoram PARIENTE
Élèves en terminale C

Inventé par LAWRENCE en 1934, cet accélérateur est un bon exemple de mise en œuvre de la mécanique Newtonienne dans le cadre électromagnétique. A ce titre son étude simplifiée est présentée en classe de terminale et il fait l'objet d'exercices à l'examen.

LE PRINCIPE

Le cyclotron est constitué de deux boîtes métalliques en forme de «D» situées face à face dans une chambre à vide et placées dans un champ magnétique uniforme (figure 1).

Entre les «D», séparés par une distance très petite devant leur rayon, est maintenue une tension alternative sinusoïdale de période ajustable à la valeur Tc, période cyclotron des particules considérées et de valeur de crête U.

Les particules, injectées dans un «D» au voisinage du centre avec une vitesse très faible, décrivent dans le cyclotron une trajectoire spiralée faite d'une succession de demi-cercles de plus en plus grands jusqu'à sortir de l'appareil (figure 2).

Chaque demi-cercle est décrit en une durée Tc/2 et les particules reçoivent l'énergie $|q|.U$ à chaque traversée de l'espace séparant les «D».
Si le nombre total de traversées avant la sortie est «n», l'énergie finalement communiquée aux particules est $n.|q|.U$.

Rappelons que la particule doit rester non relativiste pour que les mouvements semi-circulaires restent isochrones.

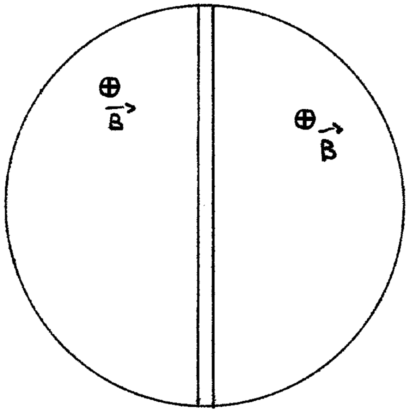

Figure 1

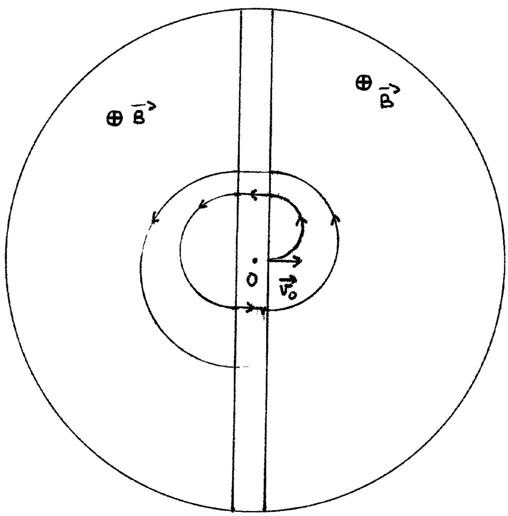

Figure 2 : (particules de charge positive).

UNE QUESTION TYPE

Parmi les questions usuellement posées sur le thème du cyclotron revient souvent la détermination du nombre total de traversées effectuées par des particules injectées au centre ainsi que celle de leur énergie cinétique finale.

Cette détermination cache une difficulté que nous allons exposer et résoudre.

Pour fixer les idées nous considérons des protons de charge q introduits au centre d'un cyclotron de rayon R avec une vitesse vo.

MÉTHODE «CLASSIQUE» (et fausse !)

On exprime le rayon r_n du demi-cercle parcouru après n traversées et on écrit $r_n = R$ pour condition de sortie.

Il est facile d'établir :

$$v_1^2 = vo^2 + 2qU/m$$

$$v_2^2 = v_1^2 + 2qU/m \qquad \text{etc...}$$

si on néglige vo devant v_1, on a alors :

$$v_n^2 = n \cdot v_1^2$$

$$v_n = v_1 \cdot \sqrt{n}$$

or $r_n = m \cdot v_n/qB$ donc $r_n = r_1 \cdot \sqrt{n}$

La condition de sortie : $R = \sqrt{n} \cdot r_1 = (m/qB) \cdot \sqrt{(2qU/m) \cdot n}$

$$n = (B.R)^2 \cdot q/2mU$$

ex) B = 1T ; R = 49.5 cm ; U = 100 kV ; protons

on trouve n = 118 traversées.

Ec = n.U en eV soit Ec = 11,8 MeV.

CRITIQUE

La méthode précédente suppose implicitement que le dernier demi-cercle décrit est centré en O, centre du cyclotron, ce qui n'est pas le cas. Dans un «D» donné les demi-cercles se décalent vers l'extérieur dans un sens ; dans l'autre «D» il en est de même dans l'autre sens, sans qu'il y ait compensation des décalages. La condition de sortie est donc plus compliquée.

DÉCALAGES PRIS EN COMPTE

Introduisons un axe orienté pour repérer les points d'entrée et de sortie des particules dans les «D» (figure 3).

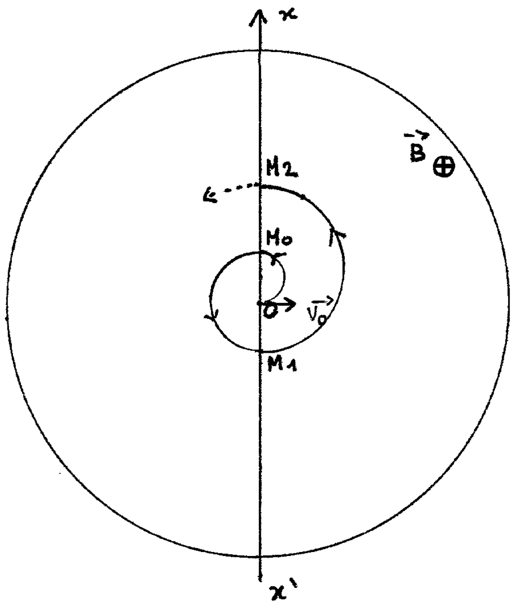

Figure 3

$$\overline{OM_1} = \overline{OMo} + \overline{M_0M_1}$$

$$\overline{OM_2} = \overline{OM_1} + \overline{M_1M_2}$$

soit : $$\overline{OM_2} = 2r_0 - 2r_1 + 2r_2$$ après 2 traversées

donc : $$\overline{OM_n} = 2 \cdot \sum_{i=0}^{i=n} (-1)^i \cdot r_i$$ après n traversées

On peut négliger r_0 devant les autres rayons :

$$\overline{OM_n} = 2 \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \cdot r_i$$

or $$r_i = (m/qB) \cdot v_1 \cdot \sqrt{i} = (m/qB) \cdot \sqrt{(2qU/m) \cdot i}$$

$$\overline{OM_n} = (2/B) \cdot \sqrt{2mU/q} \cdot \sum_{i=1}^{i=n} (-1)^i \cdot \sqrt{i}$$

notons S_n la somme des n premiers termes de la suite de terme général $u_i = (-1)^i \cdot \sqrt{i}$.

La condition de sortie est $R = (2/B) \cdot \sqrt{2mU/q} \cdot |S_n|$.

Avec les données numériques précédentes on doit donc avoir :

$$|S_n| \approx 5{,}43$$

Par tatônnements on cherche n, par exemple avec le programme BASIC donné en annexe.

n = 101	$\vert S_n \vert = 5{,}41$
n = 102	$\vert S_n \vert = 4{,}68$
n = 103	$\vert S_n \vert = 5{,}46$

On en conclut que le proton fera 102 traversées avant de sortir du cyclotron et aura reçu 10,2 MeV.

Avec le traitement simplifié on trouvait 11.8 MeV, ce qui correspond donc à une surestimation de 16 % de l'énergie acquise en sortie.

CONCLUSION

Le calcul de l'énergie de sortie d'un cyclotron nécessitant une résolution par voie numérique, il semblerait prudent de ne pas le demander le jour de l'examen, à moins de guider le candidat vers cette solution.

Annexe

Programme BASIC pour le calcul de $|S_n|$:

```
10 INPUT "N";N
20 Y = Ø
30 FOR I=1 TO N
40 Y=Y+(-1)↑I*SQRI
50 NEXT I
60 IF Y<Ø THEN GOTO 90
70 PRINT Y
80 GOTO 10
90 PRINT -Y
100 GOTO 10
```