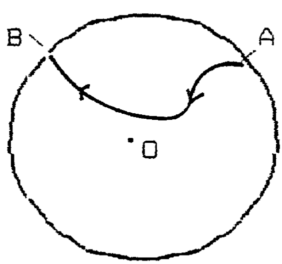
Brachistochrones du champ coulombien

par Pierre BONNET
Lycée André Chatelet, 59500 Douai

Quelle relation peut-il y avoir entre un fabricant de toboggans et Léonhard EULER ?

Vous ne voyez pas ? C'est pourtant simple : le second a résolu théoriquement le problème technique du premier. En effet dans un souci moderne de rentabilité le fabricant doit faire descendre les enfants dans un temps minimum de façon à augmenter les rotations. Il cherche donc un profil à donner à son toboggan tel que le temps mis pour aller du point de départ au point d'arrivée soit minimum. C'est grâce au calcul variationnel que le problème se résout théoriquement. Les profils obtenus sont appelés courbes brachistochrones (*brachisto = le plus bref*).

Les courbes brachistochrones du champ de pesanteur uniforme sont, c'est bien connu, des portions de cycloïdes. Mais imaginons que l'on creuse un tunnel dans la terre, quelle sera la forme du tunnel pour que le temps de transit soit minimum ? Les points de départ et d'arrivée sont à la surface de la terre et on admet que le déplacement se fait sans frottement.



La terre est supposée fixe dans un repère galiléen.

Je me propose de résoudre ce problème en utilisant une analogie avec le principe de Fermat, ce qui évite de développer la lourde artillerie du calcul variationnel.

A priori : La trajectoire est dans le plan passant par A, B et O.
A et B peuvent être permutés donc le trajet doit être symétrique.

Méthode : A l'intérieur de la terre le champ de gravitation est linéaire. Le théorème de l'énergie mécanique fournit la vitesse v en fonction de la distance r (l'unité est le rayon terrestre) :

$$v = V_o \sqrt{1 - r^2} \qquad V_o = \text{constante}$$

Par définition $v = \frac{ds}{dt}$ donc la durée de transit est $t = \int_A^B \frac{ds}{v}$. En posant $n = \frac{1}{v}$ l'analogie avec le principe de Fermat est triviale : on est conduit à rechercher la trajectoire d'un rayon se propageant dans un milieu d'indice $n = \frac{1}{V_o \sqrt{1 - r^2}}$. On sait que la trajectoire recherchée vérifie l'équation de propagation :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, n = \frac{d\,(n\,\vec{\tau}\,)}{ds}$$

qui dans le cas d'un indice à symétrie sphérique n(r) est équivalente à $\vec{r} \wedge (n\,\vec{\tau}\,) = \overrightarrow{cte}$.

Par définition $\vec{\tau} = \frac{d\,\vec{r}}{ds}$

$$\vec{\tau} = \frac{d\,\vec{r}}{ds} \;\Rightarrow\; \vec{r} \wedge \frac{1}{v} \cdot \left[\frac{dr}{ds}\vec{u}_r + r\,\frac{d\theta}{ds}\vec{u}_\theta\right] = \vec{r} \wedge \left(\frac{r}{v}\;\frac{d\theta}{ds}\;\vec{u}_\theta\right) = \overrightarrow{cte}$$

En prenant le module on obtient la condition : $\frac{r^2}{v}\frac{d\theta}{ds} = \text{Cte}.$

L'abscisse curviligne s'exprime par :

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2\,d\theta^2} = \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot d\theta.$$

On trouve alors l'équation différentielle :

$$\boxed{\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{K\,r^2}{\sqrt{1 - r^2}}} \qquad \text{où K est une constante inconnue.}$$

On peut remarquer qu'en A (ou en B) r = 1 donc r' $\rightarrow \infty$: la tangente en A est donc dirigée vers le centre O.

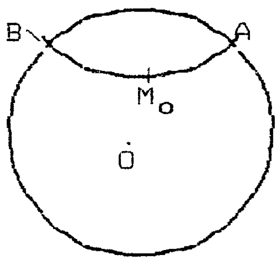
La solution de cette équation différentielle est : *(cf. démonstration plus loin)* :

$$\theta = \pm \left[\frac{\text{Arctan}(\lambda u)}{\lambda} - \text{Arctan}(u) \right] + \theta_A$$

où $u(r) = \sqrt{\dfrac{1 - r^2}{\lambda^2 r^2 - 1}}$ (λ est une constante telle que $\lambda^2 = K^2 + 1$).

Valeur de la constante λ

La courbe étant symétrique par rapport à la bissectrice OM_o de l'angle AOB nous considérons la partie AM_o et on complète par symétrie.



On peut vérifier que $r' = \pm\, r \sqrt{\dfrac{\lambda^2 r^2 - 1}{1 - r^2}}$.

En M_o la symétrie et la continuité de la courbe impose d'avoir r' = 0. Or r' est nul pour $r = r_o = \dfrac{1}{\lambda}$ et en M_o l'angle θ vaut $\dfrac{\theta_A + \theta_B}{2}$.

Dans ces conditions :

$$\frac{\theta_A + \theta_B}{2} = \pm \left[\frac{1}{\lambda} \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} \right] + \theta_A \text{ or } \lambda > 1$$

On opte donc pour le signe – et on prend :

$\lambda = \dfrac{\pi}{\pi - (\theta_A - \theta_B)}$ si $0 < \theta_A < \theta_B$. Pour deux points diamétralement opposés on a $\lambda = \infty$, soit $\theta = \theta_A$, ce qui est «raisonnable».

Résolution de l'équation différentielle

$$\sqrt{r^2 + r'^2} = \frac{K\, r^2}{\sqrt{1 - r^2}} \;\Rightarrow\; r'^2 = \frac{K^2\, r^4}{1 - r^2} - r^2 = \frac{\lambda^2\, r^4 - r^2}{1 - r^2}$$

D'où on tire $r' = \pm\, r \sqrt{\dfrac{\lambda^2\, r^2 - 1}{1 - r^2}}$.

On multiplie chaque membre par 2r $2rr' = \pm 2r^2 \sqrt{\dfrac{\lambda^2\, r^2 - 1}{1 - r^2}}$

soit $$d(r^2) = \pm\, \frac{2r^2}{u}\, d\theta \text{ avec } u = \sqrt{\frac{1 - r_2}{\lambda^2\, r^2 - 1}}.$$

Il est alors possible d'éliminer r^2 au profit de u :

$$u^2 = \frac{1 - r^2}{\lambda^2\, r^2 - 1} \;\Leftrightarrow\; r^2 = \frac{1 + u^2}{1 + \lambda^2\, u^2} \;\Rightarrow\; d(r^2) = \frac{2u\,(1 - \lambda^2)\, du}{(1 + \lambda^2\, u^2)^2}\,.$$

Dans ces conditions on aura :

$$d\theta = \pm\, \frac{u^2\,(1 - \lambda^2)\, du}{(1 + u^2)\,(1 + \lambda^2\, u^2)} = \pm\, u^2 \cdot \left[\frac{1}{1 + u^2} - \frac{\lambda^2}{1 + \lambda^2\, u^2}\right] du.$$

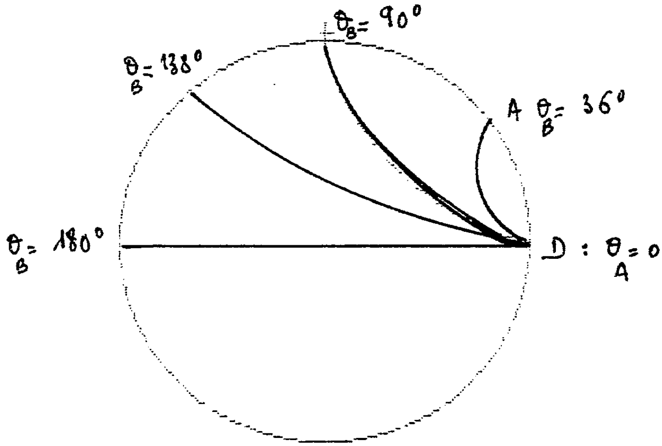
Sachant que $\dfrac{u^2 du}{1 + u^2} = d\left[u - \arctan\,(u)\right]$ on trouve donc :

$$d\theta = \pm\, d\left[u - \arctan\,(u) - \frac{1}{\lambda}\,(\lambda u - \arctan\,(\lambda u))\right].$$

Et compte tenu des conditions initiales on a :

$$\theta = \pm\left[\frac{\mathrm{Arctan}\,(\lambda u)}{\lambda} - \mathrm{Arctan}\,(u)\right] + \theta_A\,.$$

Je livre quelques exemples de brachistochrones tracées à partir d'un programme Pascal que je tiens à la disposition des amateurs.



Référence intéressante sur la brachistochrone et Euler : Le numéro de décembre 1989 de la revue «QUADRATURE ».