

Incertitudes expérimentales

Étude de cas : logiciel Chute

par Daniel BEAUFILS

Institut National de Recherche Pédagogique, 92120 Montrouge

Juan-Carlos IMBROGNO

Centre National de l'Enseignement de l'Informatique, Buenos-Aires,
Argentine

SITUATION-PROBLÈME ET OBJECTIFS DU PRÉSENT ARTICLE

Le logiciel Chute et la chaîne de capteurs photo-électriques qu'il utilise⁽¹⁾, permet de mesurer, pour des hauteurs comprises entre 0 et 1,20 m, les dates et les vitesses de passage d'une bille d'acier en chute verticale. L'étude classique consiste à représenter le graphe $v(t)$ pour en déduire la valeur de l'accélération par identification avec le modèle $v = gt + v_0$ ⁽²⁾. La régression linéaire peut être utilisée mais son exploitation repose sur des hypothèses strictes : incertitude négligeable sur la grandeur portée en abscisse et incertitude constante sur la grandeur portée en ordonnée⁽³⁾.

Il convient donc d'estimer les incertitudes sur les mesures des dates et des vitesses. Celles-ci dépendent à la fois de la qualité du système de mesure (répétabilité) et de la reproductibilité du phénomène. Les fluctuations sont donc à la fois internes et externes à la chaîne de mesure, et la détermination des incertitudes doit alors être faite en effectuant des relevés systématiques de mesures fournies par le *dispositif considéré dans son ensemble* (phénomène + chaîne de mesure)⁽⁴⁾.

L'objectif de cet article est de fournir des informations sur les incertitudes affectant les mesures des dates et vitesses, et leurs conséquences sur les déterminations des paramètres g et v_0 . Mais l'objectif est aussi de présenter une étude détaillée sur un exemple concret qui mette en évidence les différents niveaux d'analyse (que l'on est amené à considérer même sur un cas apparemment simple) et qui montre l'utilisation correspondante des méthodes statistiques⁽⁵⁾.

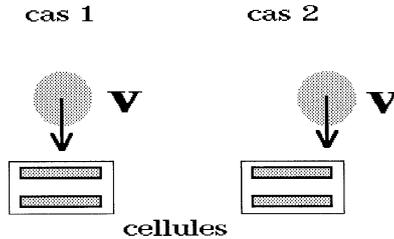
LE TEMPS ET LA VITESSE : LA QUESTION DE L'INDÉPENDANCE DES INCERTITUDES

Rappelons d'abord rapidement le mode de détermination des dates et des vitesses⁽⁶⁾. Une procédure assembleur permet de repérer les dates d'occultation des différentes cellules. Celle-ci utilise l'incréméntation du «timer» qui s'effectue (sur les ordinateurs compatibles IBM-PC) tous les 0.838096 μ s. Soit θ_0 la date d'occultation de la cellule C0 (capteur simple, placé à une dizaine de centimètres de l'électro-aimant) ; soient θ_{i1} et θ_{i2} les dates d'occultation des deux cellules d'un même capteur C_i (capteur double) séparées par la distance d (0.996 cm) ; la date et la vitesse de passage de la bille sont calculées comme suit :

$$t_i = \frac{1}{2} (\theta_{i1} + \theta_{i2}) - \theta_0$$

$$v_i = d / (\theta_{i2} - \theta_{i1})$$

Les incertitudes sur les θ_i résultent de fluctuations «internes» liées à la procédure assembleur, au temps de réponse des cellules, etc., mais également de fluctuations «externes» liées à la reproductibilité de la chute (décalage de la bille lors de son passage devant les cellules d'un



même capteur, voir figure ci-dessous).

Ce qu'il faut remarquer, c'est que ce type de fluctuation «externe» introduit, au niveau d'un capteur C_i , une modification très voisine des valeurs θ_{i1} et θ_{i2} , de sorte que seule la somme (donc la valeur t_i) en est essentiellement affectée ; tout se passe comme s'il y avait une fluctuation sur le repérage de l'origine des temps, donc sur θ_0 . Les deux variables t et v peuvent donc être considérées comme indépendantes en ce qui concerne leurs incertitudes.

Indiquons ici un critère qui pourra être utilisé pour vérifier cette hypothèse. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si les variables sont dépendantes, les écarts-types sont reliés par une relation qui découle de la propagation des incertitudes σ_θ :

$$\text{si :} \quad t = \frac{1}{2} (\theta_1 + \theta_2),$$

$$\text{alors :} \quad \sigma_t^2 = \frac{1}{2} \sigma_\theta^2,$$

$$\sigma_v^2 = 2 \left[d / (\theta_2 - \theta_1)^2 \right]^2 \sigma_\theta^2$$

$$\text{donc :} \quad \sigma_v \approx (2 v^2 / d) \sigma_t$$

PROTOCOLE EXPÉRIMENTAL ET RÉSULTATS DES MESURES

Dans une première phase nous avons effectué une comparaison des comportements des quatre capteurs. Pour cela, nous avons, pour une hauteur donnée, effectué 10 mesures des dates et vitesses, avec chacun des capteurs. La procédure a été répétée pour cinq hauteurs différentes (0.1, 0.3, 0.6, 0.9 et 1.2 m).

Dans une seconde étape, nous avons réalisé, dans de bonnes conditions, 5 séries de 10 chutes, l'ensemble étant effectué sans changer la position des capteurs. La verticalité a été réglée à l'aide du fil à plomb que l'on peut maintenir avec l'électroaimant. Le risque de perturbation des cellules a été minimisé en évitant la proximité d'une fenêtre ou d'une lampe⁽⁷⁾.

Les différentes mesures ont permis de calculer les valeurs moyennes, les écarts-types et les intervalles de confiance, de la façon suivante⁽⁸⁾⁻⁽⁹⁾ : si G_i désigne les mesures d'une grandeur G (t ou v), N le nombre de mesures (égal à 10), et τ le coefficient de Student à 95 % (2.26) :

– les estimations de la moyenne et de l'écart-type sont :

$$G = \Sigma G_i / N$$

$$s_g = \left[\Sigma (G_i - G)^2 / (N - 1) \right]^{1/2}$$

– l'intervalle de confiance pour une mesure est : $[G \pm \tau \cdot s_g]$.

Le tableau ci-après reproduit les valeurs des estimations des écarts-types obtenus sur t et v ⁽¹⁰⁾, avec chacun des capteurs (pour

$h = 0.6 \text{ m}$). Il permet d'une part de vérifier l'équivalence du comportement des capteurs, et d'autre part, de juger de l'hypothèse d'indépendance des incertitudes. En effet, l'ordre de grandeur trouvé pour σ_t (s) est bien nettement supérieur à celui calculé à l'aide de l'expression $\sigma_v = (2 v^2/d) \sigma_t$, (pour une vitesse de l'ordre de 4 m.s^{-1} , et $\sigma_v = 6 \text{ mm.s}^{-1}$ par exemple, le calcul donne une valeur de l'ordre de $1.8 \mu\text{s}$).

	1	2	3	4
s_t (μs)	28	16	25	34
s_v (mm.s^{-1})	6	6	8	6

Les deux tableaux suivants contiennent respectivement les résultats des calculs des écarts-types sur t et v effectués sur les 5 séries de 10 chutes, et les moyennes de ces estimations en fonction de la hauteur et de la valeur moyenne des vitesses.

h (m)	s_t (μs)	s_v (mm.s^{-1})
0.300	8.8	2.2
	7.0	2.8
	8.5	3.2
	4.2	2.4
	4.7	3.4
0.600	9.7	6.0
	7.9	4.1
	8.2	2.5
	6.3	4.1
	9.7	3.3
0.900	12.0	7.7
	10.7	7.1
	8.4	9.9
	5.2	5.2
	11.4	7.7
1.200	14.9	10.2
	13.7	10.4
	11.0	7.7
	9.9	6.9
	17.7	8.8

h (m)	v (m.s^{-1})	s_t (μs)	s_v (mm.s^{-1})
0.300	2.821	7	3
0.600	3.708	9	4
0.900	4.417	10	8
1.200	5.096	14	9

ANALYSE

L'augmentation des incertitudes avec la dénivellation

La légère augmentation de l'incertitude sur le temps que l'on peut considérer⁽¹¹⁾ peut être interprétée par le passage plus ou moins bien centré sur les cellules. L'augmentation de l'incertitude sur la vitesse peut être interprétée par l'existence d'une incertitude minimale sur les valeurs des dates θ mémorisées. L'estimation de σ_θ par comparaison avec la représentation $\sigma_v (v^2) = (\sqrt{2} v^2/d) \sigma_\theta$, donne $\sigma_\theta \approx 2.5 \mu\text{s}$.

La question de la précision sur d

La vitesse étant calculée par $d/(\theta_2 - \theta_1)$, l'imprécision de la valeur de d introduit une incertitude sur la valeur de la vitesse. Les valeurs ci-dessous (δv_1) sont calculées par la relation $\delta v/v = \delta d/d$, avec δd de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ (incertitude sur le dernier chiffre donné par le constructeur).

Cette incertitude est de nature entièrement différente de celles évoquées jusqu'à présent : pour un capteur donné, elle n'a aucune influence sur les fluctuations observées (elle n'introduit qu'un biais) ; mais il faut en tenir compte pour une mesure effectuée avec un capteur quelconque. La comparaison est donc à faire avec l'incertitude due aux fluctuations, calculée *pour une mesure*, soit : $\delta v = \tau \cdot s_v$ (notées δv_2 dans le tableau). On constate alors que ce sont ces dernières qui sont les plus fortes :

h	0.3	0.6	0.9	1.2
δv_1 (mm.s ⁻¹)	3	4	5	5
δv_2 (mm.s ⁻¹)	6	9	17	20

Comparaison des incertitudes sur t et v

Des calculs précédents on peut déjà déduire le rang du «dernier chiffre», celui sur lequel porte l'incertitude. Ainsi l'incertitude sur la vitesse rend non-significatif le chiffre des $1/1000^{\text{ème}}$ de m.s⁻¹, et celle sur le temps rend non significatif le chiffre des $1/1000000^{\text{ème}}$ de seconde.

Mais pour comparer les incertitudes sur deux grandeurs différentes, (en particulier si l'on envisage un calcul de régression), il faut comparer

$100 \cdot \sigma_t^2$ et σ_v^2 . En effet, dans le cas plus général où deux grandeurs y et x (supposées reliées par une relation $y = f(x)$) sont affectées d'incertitudes il faut considérer l'écart quadratique suivant [6](12) :

$$E = \Sigma \left[(y_i - f(x_i)) / \delta_i \right]^2$$

où :
$$\delta_i^2 = (df/dx)_i^2 \cdot \sigma_{x_i}^2 + \sigma_{y_i}^2$$

Dans notre cas, la fonction f qui relie les deux variables t et v est de la forme $v = at + b$, avec $a \approx g \approx 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. Il faut donc bien comparer $100 \cdot \sigma_t^2$ et σ_v^2 . Des valeurs précédentes on peut déduire le tableau suivant qui montre que l'incertitude sur le temps est négligeable devant celle sur la vitesse :

h (m)	0.3	0.6	0.9	1.2
$g^2 s_t^2 (10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$	0.005	0.008	0.010	0.020
$s_v^2 (10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-2})$	9	16	64	81

La question de la régression linéaire sur $v(t)$

Nous avons vu ci-dessus que si l'incertitude sur la grandeur portée en abscisse pouvait être négligée devant celle portée en ordonnée, cette dernière n'était pas considérée comme constante. L'utilisation de la régression linéaire classique ne fournit alors par la *meilleure* estimation possible des paramètres g et v_0 . Il convient alors d'utiliser les formules plus générales qui tiennent compte de l'incertitude $\delta_i = \delta v_i = k \cdot v_i^2$ [8] :

$$g = \left[\Sigma (1/\delta_i^2) \Sigma (t_i v_i / \delta_i^2) - \Sigma (t_i / \delta_i^2) \Sigma (v_i / \delta_i^2) \right] / D$$

$$v_0 = \left[\Sigma (t_i^2 / \delta_i^2) \Sigma (v_i / \delta_i^2) - \Sigma (t_i / \delta_i^2) \Sigma (t_i v_i / \delta_i^2) \right] / D$$

avec :
$$D = \Sigma (1/\delta_i^2) \Sigma (x_i^2 / \delta_i^2) - \left(\Sigma (x_i / \delta_i^2) \right)^2$$

Nous avons réalisé un court programme (voir listing en Annexe 2) qui calcule les valeurs de g et v_0 en utilisant successivement les deux méthodes (classique puis pondérée). Effectués sur une série de mesures (donnée en Annexe 1), les deux calculs affichent :

$$g = 9.7368... \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_0 = 1.43295.. \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

et :
$$g = 9.7368... \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$v_0 = 1.43126.. \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Il est alors légitime de comparer cette différence minime à l'estimation de l'incertitude que l'on peut calculer sur la détermination des paramètres g et v_0 par régression classique. En choisissant une incertitude moyenne sur v et en appliquant la propagation des incertitudes [8] :

$$\sigma_g^2 = \sigma^2 N/D$$

$$\sigma_{v_0}^2 = \sigma^2 \sum x_i^2/D$$

avec :

$$D = N \cdot \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

en prenant⁽¹³⁾ : $\delta \approx \tau \cdot s_v \approx 2.26 * 6 \cdot 10^{-3} \approx 13 \cdot 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

on déduit :

$$D \approx 1.4 \text{ s}^2$$

$$\delta g \approx \pm 0.04 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\delta v_0 \approx \pm 0.01 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

CONCLUSION

Différents points demanderaient encore à être précisés : le caractère négligeable du biais sur la mesure du temps introduit par le décalage par rapport à la verticale (les dates sont toujours par excès), la prise en compte de la résistance de l'air (pour interpréter la valeur inférieure à 9.81 trouvée⁽¹⁴⁾), l'étude de l'incertitude sur les écarts-types eux-mêmes... Mais les informations ci-dessus donnent déjà des éléments de réponse à de nombreuses questions : le nombre maximal de chiffres significatifs à conserver sur les mesures, l'incertitude minimale sur la valeur de l'accélération, le critère de décision permettant de dire qu'une manipulation a été bien réalisée ou qu'un point peut être considéré comme «aberrant», ...

Ajoutons ici que l'intérêt des logiciels dédiés peut résider dans l'intégration de ces informations dans les calculs et les représentations graphiques. Il est alors possible, du moins en principe, de fournir des tableaux de valeurs numériques affichées avec le bon nombre de chiffres significatifs, d'obtenir les représentations graphiques des points de mesure complétés avec les barres d'incertitudes, et enfin, de fournir des outils de modélisation et d'estimation paramétrique adaptés qui intègrent les informations sur les incertitudes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.-C. TRIGEASSOU, D. BEAUFILS, J. WINTHER, 1990, «Analyse de données, méthodes numériques et sciences physiques», in Acquisition et analyse de données, U.d.P., pp. 59-128.
- [2] D. BEAUFILS, J.-C. LE TOUZE, 1990, «Les logiciels Chute et Plan, de l'acquisition de données à la modélisation mathématique», bulletin de l'EPI, n° 57, pp. 137-154.
- [3] J.-M. MILLET, 1989, «Acquisition et exploitation de données (Regressi)», in Actes des 9^{èmes} journées «Ordinateur pédagogique au laboratoire et à l'atelier», Paris : CNAM, partie physique, pp. 48-60.
- [4] Brochure «Une nouvelle approche de la mécanique», Versailles : CARFI, n° 42, 120 p.
- [5] J.-C. LEGRAND, 1978, *L'exploitation de données expérimentales*, B.U.P. n° 596, pp. 1305-1314.
- [6] J. OREAR, 1982, «Least square when both variables have uncertainties», Am. J. Phys., vol 50, n° 10, pp. 912-916.
- [7] Y. CORTIAL, 1990, «A propos de la méthode des moindres carrés», B.U.P. n° 725, pp. 769-791.
- [8] D. BEAUFILS, R. JOURNEAUX, 1990, «Physique et informatique, une approche programmatique», Versailles : CARFI, 84 pages.
- [9] R. JOURNEAUX, A. DUREY, 1984, «Incertitudes et statistiques, simulation par ordinateur», in Actes des premières journées «Informatique et Pédagogie des Sciences Physiques», Poitiers : U.d.P., pp. 210-214.
- [10] R. JOURNEAUX, «La régression linéaire et ses conditions d'application», B.U.P., à paraître.

NOTES

- (1) Le logiciel utilise l'interface ESAO3 (Jeulin) et la chaîne de capteurs Chronociné (Jeulin).
- (2) On s'affranchit ainsi des incertitudes concernant le positionnement des capteurs, fortement dépendantes de la qualité des manipulations.

- (3) A ceci il faut ajouter l'absence d'erreur systématique et l'indépendance des mesures, cette dernière condition étant nécessaire pour le calcul de la variance et de la covariance.
- (4) Les calculs sont effectués dans le logiciel en double précision et n'introduisent pas d'incertitudes notables.
- (5) De nombreuses références sont données dans la brochure U.d.P.-INRP consacrée à l'acquisition et l'analyse de données [1].
- (6) Voir dans la documentation du logiciel, ou dans l'article paru dans le bulletin de l'EPI [2].
- (7) Un éclairage extérieur arrivant directement sur les capteurs peut en effet perturber gravement les mesures.
- (8) Les moyennes et écarts-types ont été calculés à l'aide du logiciel Regressi [3] ; les données issues du logiciel Chute ont été pour cela converties grâce à un petit logiciel Basic [4].
- (9) Les choix d'une limitation à 10 mesures pour l'estimation de l'écart-type, d'un test à 95 % (contrôle de produit), etc., font référence à l'article de J.-C. LEGRAND [5].
- (10) Les valeurs ont été arrondies à l'entier supérieur.
- (11) Les valeurs des estimations des écarts-types données ci-dessus sont elles-mêmes affectées d'une incertitude dont on peut estimer l'écart-type : les intervalles de confiance que l'on déduit sont importants, raison pour laquelle nous utilisons l'expression «on peut considérer».
- (12) On pourra également se référer à l'article de Y. CORTIAL [7].
- (13) Il conviendrait, s'il s'agissait d'une régression «rigoureuse», de recalculer l'estimation de l'écart-type sur $N = 12$ mesures et d'utiliser le coefficient de Student à $N - 2 = 10$ [9, 10].
- (14) Notons que pour une telle étude il est plus sûr d'effectuer les mesures avec un seul et même capteur : l'imprécision éventuelle sur d introduit alors un biais systématique qui est sans influence sur la pente.

Annexe 1

Mesures réalisées avec un même capteur :

h (m)	t (ms)	v (m.s ⁻¹)
0.100	58.12	1.99
0.200	102.84	2.45
0.300	141.18	2.83
0.400	175.09	3.12
0.500	205.49	3.40
0.600	233.00	3.67
0.700	258.97	3.93
0.800	283.43	4.24
0.900	307.03	4.41
1.000	328.82	4.78
1.100	350.32	4.82
1.200	370.16	4.96

Annexe 2

```

defdbl a-z

dim t(100)      'dates
dim z(100)      'ordonnées
dim v(100)      'vitesses

cls

print "Calculs comparés de régressions sur fichiers .CHU"
print " Daniel Beaufils - INRP - 23 septembre 1991"
print

chargechut:
  print : input "nom du fichier : ",nom$
  nf$=nom$+".CHU"      'extension
  ,
  print "chargement ..."
  open "I",#1,nf$
  ,
  input#1,nmes$      'nb de mesures
  input#1,masse$     'masse utilisée
  input#1,z0$       'ordonnée initiale
  fcom$=""
  for i=1 to 3
    line input#1,a$ : fcom$=fcom$+a$+rc$ 'commentaire
  next i
  ,
  nmes=val(nmes$)
  for i=1 to nmes
    input#1,t(i),z(i),v(i)      'mesures
  next i
  close 1
  print

regnormale:

sx=0 : sx2=0 : sy=0 : sxy=0

for i=1 to nmes
  sx=sx+t(i) : sx2=sx2+t(i)*t(i) 'calculs des différentes
  sy=sy+v(i) : sxy=sxy+t(i)*v(i) 'sommés et sommes
next i
'quadratiques

d=nmes*sx2-sx*sx      'dénominateur
a=(nmes*sxy-sx*sy)/d  'pente
b=(sy*sx2-sx*sxy)/d  'ordonnée à l'origine

print "regression normale :"
print "v = gt + vo"
print "g = ";a; "m/s²"
print "vo= ";b; " m/s"
print

```

regponderee:

```

sx=0 : sx2=0 : sy=0 : sxy=0
ds2=0
k=1      'coefficient qui se simplifie

for i=1 to nmes
  di2=1/(k*v(i)*v(i))^2
  sd2=sd2+di2
  sx=sx+t(i)*di2 : sx2=sx2+t(i)*t(i)*di2
  sy=sy+v(i)*di2 : sxy=sxy+t(i)*v(i)*di2
next i

d=sd2*sx2-sx*sx
a=(sd2*sxy-sx*sy)/d
b=(sy*sx2-sx*sxy)/d

print "regression pondérée : sigma_v = kv^2"
print "v = gt + vo"
print "g = ";a; "m/s^2"
print "vo= ";b;" m/s"
print

print"terminé."

```