T.P. : les convertisseurs A/N et N/A à réseaux R/2R

par Gérard AUSSEL et Michel LAGOUGE
École Alsacienne,75006 Paris

Objet : Cet article est constitué d'une feuille de T.P. donnée aux élèves d'une **Option Informatique et Sciences Physiques** en classe de Seconde. Dans notre établissement, cette option était expérimentale durant l'année scolaire 91-92, et elle devient officielle cette année.

Le T.P. ci-dessous, d'une mise en œuvre très simple, vise à présenter le principe de la conversion analogique-numérique. Avant ce T.P., les élèves ont étudié, dans d'autres séances expérimentales, en entrée ou sortie, des signaux «en tout ou rien» (test sur interrupteur ouvert ou fermé ou commande d'une lampe) et les portes logiques.

La feuille de T.P. donnée aux élèves :

Les convertisseurs A/N et N/A à réseaux R/2R

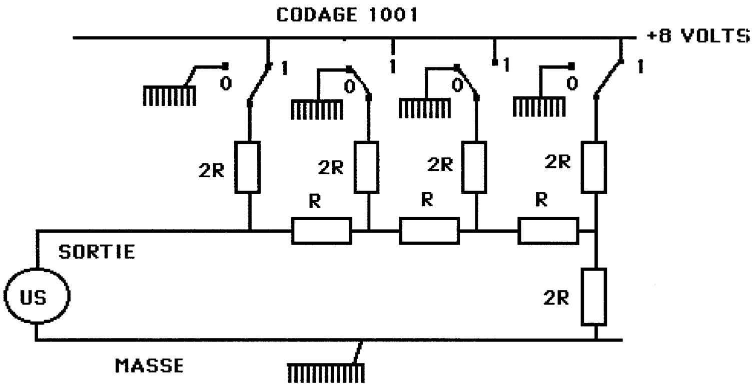
BUT DE LA MANIPULATION

Les T.P. précédents ont consisté à étudier en entrée ou sortie des signaux «en tout ou rien» : ils n'avaient que deux valeurs possibles - l'interrupteur était ouvert ou fermé, la lampe était éteinte ou allumée -. On dit que les signaux étaient binaires !

On va étudier maintenant une tension qui varie continûment dans un certain intervalle ; il faut associer une valeur en binaire à cette tension pour que l'ordinateur puisse la manipuler : c'est le rôle du convertisseur.

Ce T.P. a pour objectif de comprendre la transformation qui fait passer d'une tension $\mathbf{U_{AB}}$ à un nombre codé sur n bits. Cette étude est limitée au type de convertisseurs R/2*R car le mode de fonctionnement est accessible à un élève de seconde. Actuellement le convertisseur se réduit à une puce qui concentre toutes les fonctions nécessaires sur une surface inférieure au mm^2.

PREMIÈRE MANIPULATION : principe d'un convertisseur 4 bits soit le montage suivant :



a - Réaliser le montage correspondant au schéma ci-dessus

Pour cela vous réaliserez le montage sur deux plaques en remplaçant les quatres interrupteurs par quatre petits fils qui seront, à partir du résistor 2R, soit reliés à la masse (interrupteur ouvert) soit reliés à la ligne de 8 V (interrupteur fermé). La tension de 8 V sera délivrée par une alimentation stabilisée dont vous réglerez le potentiomètre de telle façon à avoir exactement la tension voulue (vérifier avec un voltmètre).

A chaque interrupteur est associée une valeur logique :

– interrupteur ouvert <=> a = 0 état bas,

– interrupteur fermé <=> a = 1 état haut.

Comme il y a 4 interrupteurs, l'état de l'ensemble des interrupteurs est associé à un nombre binaire de 4 bits (a_3, a_2, a_1, a_0) ; le bit de poids faible a_0 correspond à l'interrupteur de droite, le bit de poids fort a_3 correspond à l'interrupteur de gauche.

b - Étude des différentes tensions que l'on peut obtenir

En positionnant correctement les fils servant d'interrupteur selon les valeurs des bits dans le tableau ci-dessous, mesurer la tension U_s et compléter le tableau ci-dessous :

nb binaire	a_3	a_2	a_1	a_0	U_s
0000	0	0	0	0	
0001	0	0	0	1	
0010	0	0	1	0	
0011	0	0	1	1	
0100	0	1	0	0	
0101	0	1	0	1	
0110	0	1	1	0	
0111	0	1	1	1	
1000	1	0	0	0	
1001	1	0	0	1	
1010	1	0	1	0	
1011	1	0	1	1	
1100	1	1	0	0	
1101	1	1	0	1	
1110	1	1	1	0	
1111	1	1	1	1	

1) Avec quatre bits, combien peut-on coder de valeur de tension ?

2) Quelle est la valeur maximale atteinte ?

Exercice : démontrer par le calcul qu'avec deux bits, la valeur de U_S ne peut être que 0 V, 2 V, 4 V ou 6 V.

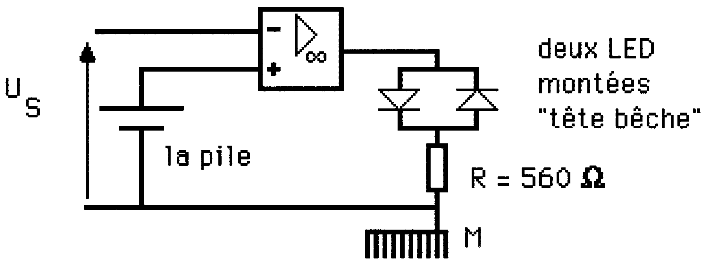
Pour les collègues : en pratique, le montage est réalisé sur des plaques de montage électronique classiques en prenant comme valeur 1 ou 10 kΩ pour R ; il est recommandé de travailler sur deux plaques de telle façon que le montage soit le plus proche possible du schéma. On trouve bien sûr des valeurs de U_S qui varient de 0 à 7,5 V par saut de 0,5 V (d'où le choix de $U_e = 8$ V et $\Delta U_S = \frac{U_e}{2^n} = 0{,}5$ V avec $n = 4$).

L'exercice est une bonne application des associations de résistors - correction en annexe ! - On pourrait y ajouter l'exercice suivant (niveau Maths Sup : application du théorème de superposition !) : montrer que pour n bits la valeur maximale de U_S est :

$$U_{max} = U_e \left(1 - \frac{1}{2^n}\right).$$

DEUXIÈME MANIPULATION : mesure d'une tension quelconque

On se propose de mesurer la tension d'une pile domestique avec le montage ci-dessus. A l'aide d'un amplicateur opérationnel, réalisez le montage comparateur suivant :



U_S étant la tension de sortie du montage convertisseur. A partir de la position des interrupteurs correspondant au nombre 0000, modifiez progressivement l'état des interrupteurs correspondant au nombre binaire croissant : 0000 - > 0001 - > 0010 - > 0011 etc...

1) Que se passe-t-il pour les LED en sortie du montage AO au cours de cette manipulation ?

2) Pouvez-vous expliquer ce qui se passe dans ce montage ?

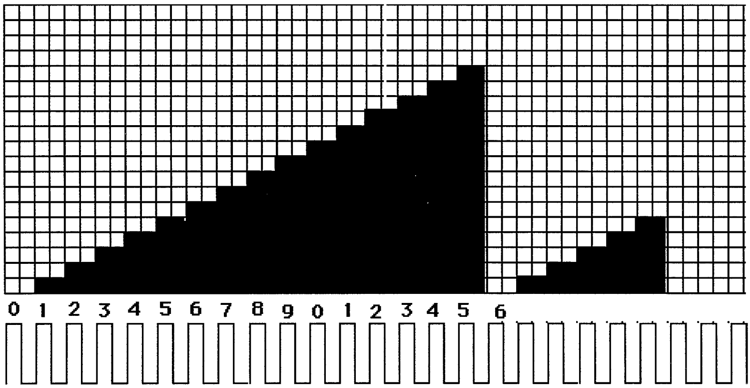
3) Avec quelle précision absolue ΔU, cette tension est elle nécessairement mesurée ?

PRINCIPE DU CONVERTISSEUR

A vrai dire, ce que vous venez de faire «à la main», un convertisseur le fait automatiquement !

Pour coder une tension $\mathbf{U_{AB}}$, le convertisseur la compare à sa propre tension de sortie $\mathbf{U_S}$ obtenue dans un montage similaire à la manipulation 1.

Cette tension $\mathbf{U_S}$ augmente au rythme des impulsions de l'horloge ce qui produit un signal en forme d'escalier dont les marches valent $\Delta U = \dfrac{U_e}{2^n}$.



cadence de l'horloge on incrémente de 1 bit à chaque impulsion

Exemple : dans la manipulation 1 :

$$U_e = 8 \text{ V} \qquad \text{n-bits} = 4 \Rightarrow \Delta U = 0{,}5 \text{ V.}$$

En général, sur la plupart des convertisseurs, $U_e = 5$ ou 10 V et n-bits = 8.

Par exemple, pour Orphy GTS, $U_e = 5$ V, 2 V, 1 V, et 100 mV et n-bits = 8.

<u>A retenir</u> :

La valeur maximale que l'on puisse atteindre est $U_m = U_e\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ la précision ABSOLUE est $\Delta U = \frac{U_e}{2^n}$ et cette précision absolue est constante pour tout U : $0 < U < U_m$, donc la précision relative est d'autant plus grande que U est proche de U_m. A vrai dire, on retrouve le même problème qu'avec un appareil de mesure électrique traditionnel : si la déviation de l'aiguille de l'appareil de mesure ou la valeur affichée est trop petite relativement au calibre, il faut changer de calibre pour obtenir une déviation maximale de l'aiguille ou un affichage maximal à l'écran d'un appareil numérique !

Par exemple : manipulation 1 :

$$U_m = 8 \text{ x} \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = 7{,}5 \text{ V et } \Delta U = \frac{8}{2^4} = 0{,}5 \text{ V}$$

MODES DE FONCTIONNEMENT DU CONVERTISSEUR

a - Mode analogique numérique

On cherche le codage en bits correspondant à une tension donnée. C'est ce qui a été fait dans la manipulation ci-dessus.

b - Mode numérique analogique

On cherche à produire une tension correspondant à un nombre binaire. C'est l'opération inverse de la précédente !

On remarquera que la conversion, quel que soit le sens, consiste à générer des impulsions régulées par l'horloge partant de la tension = 0 V jusqu'à la tension U désirée ou étudiée par sauts de ΔU. Ceci prend bien sûr un certain temps !

On pourrait penser que pour diminuer $\Delta U = \frac{U_e}{2^n}$, il suffit d'augmenter le nombre de bits ; en contre partie, le temps de conversion serait plus long ! Il faut donc trouver un compromis !

Par exemple, pour Orphy GTS, le temps de conversion est de l'ordre de 50 µs, ce qui permet donc au maximum de faire 20 000 mesures à la seconde... quand même !!!

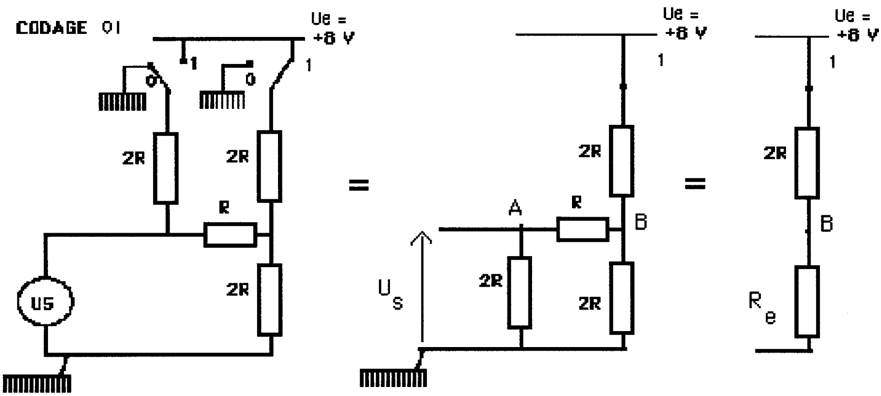
Annexe 1

Correction de l'exercice niveau Seconde :

Démontrer par le calcul qu'avec deux bits et $U_e = 8$ V, la valeur de U_s ne peut être que : 0 V, 2 V, 4 V ou 6 V.

• Pour le montage correspondant au codage 00, il est évident que $U_s = 0$ V.

• Pour le montage correspondant au codage 01.



avec :

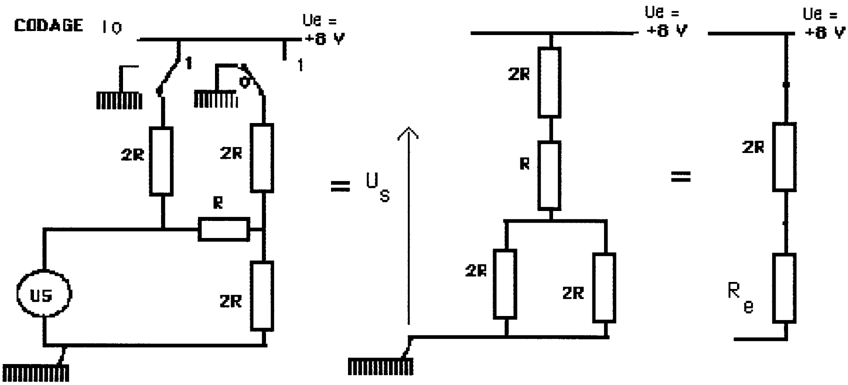
$$R_{eq} = \frac{6}{5} R$$

$$U_s = U_{AM} = 2 \cdot R \frac{U_{BM}}{3 \cdot R}$$

$$U_{BM} = R_{eq} \frac{U_e}{R_{eq} + 2 \cdot R}$$

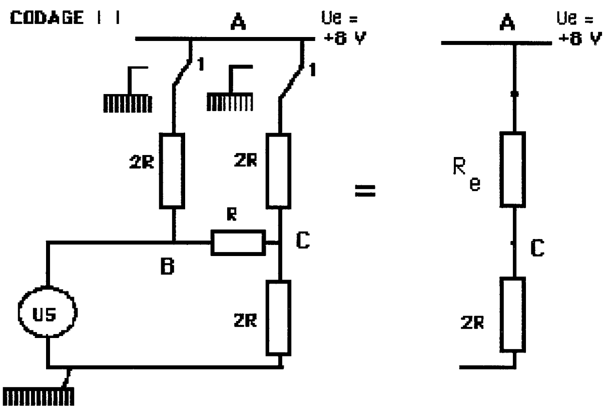
$$\Rightarrow U_s = \frac{U_e}{4} = 2 \text{ V}$$

• Pour le montage correspondant au codage 10,



avec : $R_{eq} = R + \text{les } 2 \text{ x } (2R) \text{ en } // = 2\ R$ d'ou $U_s = \frac{U_e}{2} = 4\ V$

• Pour le montage correspondant au codage 11,



avec : $R_{eq} = \frac{6}{5} R$ donc $U_s = U_{BM} = U_{BC} + U_{CM} = R \frac{U_{AC}}{3 \,.\, R} + U_{CM}$

or : $U_{AC} = \,.\, R_{eq} \frac{U_e}{R_{eq} + 2 \,.\, R}$ et $U_{CM} = 2\ R \frac{R_e}{R_{eq} + 2 \,.\, R}$

$$U_s = \frac{U_e}{R_{eq} + 2 \,.\, R} \left(\frac{R_{eq}}{3} + 2R \right)$$

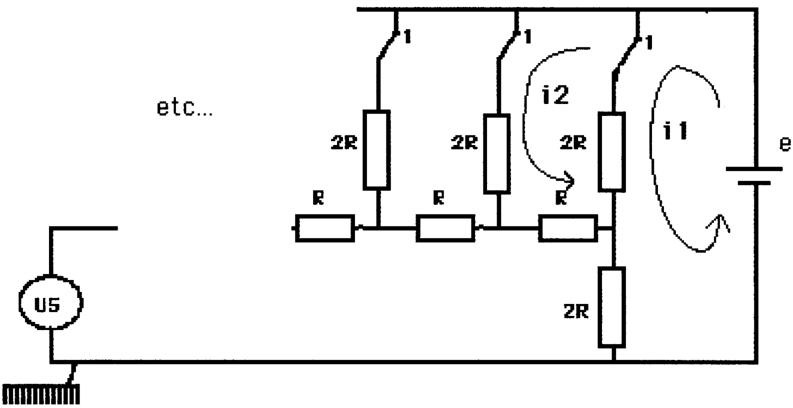
$$U_s = \frac{3 \,.\, U_e}{4} = 6\ V$$

Annexe 2

Correction de l'exercice Maths Sup :

Montrer que pour le codage 11... 1 avec n bits : $U_s = U_e\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.

Application du théorème de superposition et petit calcul matriciel !



On définit des courants de maille (ou courants de Maxwell) i_1, i_2, etc..., les courants réels étant la superposition de ces courants et on écrit les équations de maille ⇒

maille 1 : $4\,R\,i_1 - 2\,R\,i_2 = e$

maille 2 : $-2\,R\,i_1 + 5\,R\,i_2 - 2\,R\,i_3 = 0$

maille 3 : $-2\,R\,i_2 + 5\,R\,i_3 - 2\,R\,i_4 = 0$

...

maille k : $-2\,R\,i_{k-1} + 5\,R\,i_k - 2\,R\,i_{k+1} = 0$

dernière maille : $-2\,R\,i_{n-1} + 5\,R\,i_n = 0$

et $U_S = R\left(2i_1 + i_2 + i_3 \ldots + i_n\right)$

On peut bien sûr résoudre le système matriciel :

$$T \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ \cdots\cdots \\ i_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e/R \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad T = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 0 & \cdots\cdots & 4 \\ -2 & 5 & -2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -2 & 5 & -2 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & -2 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

La matrice T a des propriétés intéressantes (det T $= 2^{2n}$, etc...) mais il est inutile ici de résoudre le système matriciel car $U_s = R\left(2i_1 + i_2 + i_3 \ldots\ldots + i_n\right)$. Or si on ajoute les équations de maille, on trouve $2i_1 + i_2 + i_3 \ldots\ldots + 3i_n = \dfrac{e}{R}$.

Donc $U_S = e - 2 \cdot Ri_n$ et il suffit donc de chercher uniquement i_n en reprenant les équations de maille :

maille 1 : $4\, i_1 - 2\, i_2 = e/R$

maille 2 : $-2\, i_1 + 5\, i_2 - 2\, i_3 = 0$

On multiplie la deuxième par 2 et on ajoute pour éliminer $i_1 \Rightarrow$

(2) $8\, i_2 - 4\, i_3 = e/R$

maille 3 : $-2\, i_2 + 5\, i_3 - 2\, i_4 = 0$

On multiplie la deuxième par $4 = 2^2$ et on ajoute pour éliminer i_2 ...et on répète l'opération jusqu'à :

(n − 1) $2^n\, i_{n-1} - 2^{n-1}\, i_n = e/R$

maille n : $-2\, i_{n-1} + 5 \quad i_n = 0$

$$\Rightarrow i_n = \frac{e}{2^{n+1} \cdot R}$$

donc : $U_s = e - 2 \cdot Ri_n = e\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$ CQFD !