

Traitement numérique du signal

par J. ESQUIEU
Lycée de Brive

1. TRAITEMENT

Le traitement numérique du signal consiste à agir sur le signal à partir d'**échantillons** prélevés à intervalles de temps régulier : T_e , $2 T_e$, $3 T_e$... Ces nombres sont destinés à être traités par ordinateur ou par tout autre système numérique.

Le schéma de principe d'une chaîne de traitement numérique est donné à la figure 1.

- T_e est la période d'échantillonnage,
- la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$ est la fréquence d'échantillonnage.

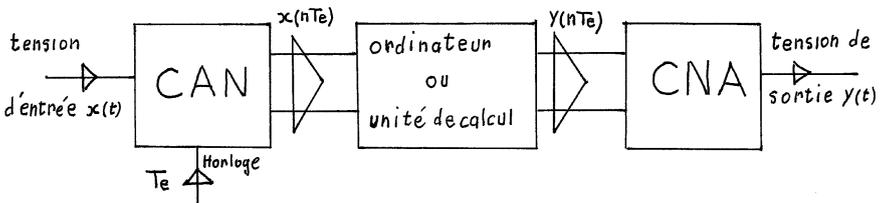


Figure 1

Le convertisseur analogique numérique (C.A.N) est cadencé par une horloge de période T_e . A l'instant nT_e , il fournit à l'ordinateur un **nombre** $x(nT_e)$ qui est une **image** de la valeur que prend la tension d'entrée $x(t)$ à l'instant nT_e .

Au même instant nT_e , l'ordinateur présente en sortie le nombre $y(nT_e)$ que le convertisseur numérique analogique (C.N.A.) transforme en tension de sortie $y(t)$.

Nous supposons **dans un premier temps** que l'ordinateur affiche en sortie le même nombre que celui qui a été prélevé en entrée :

$$y(nT_e) = x(nT_e).$$

Le convertisseur numérique analogique (C.N.A.) bloque le signal $y(nTe)$ jusqu'à l'apparition de l'échantillon suivant et on obtient pour les tensions $x(t)$ et $y(t)$ les courbes de la figure 2.

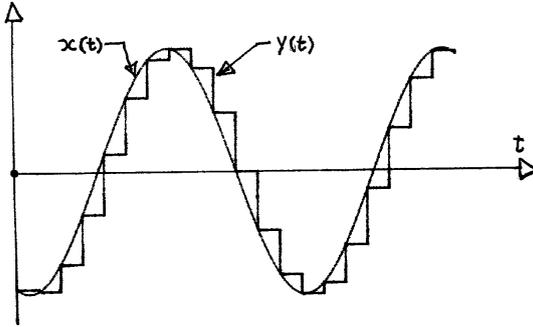


Figure 2

Il est bien évident que si l'ordinateur se contentait de réaliser l'opération $y(nTe) = x(nTe)$, le traitement numérique du signal ne présenterait aucun intérêt, car le passage de $x(t)$ à $y(t)$ se traduit par une dégradation du signal d'autant plus importante que la fréquence d'échantillonnage F_e est faible par rapport à la vitesse de variation du signal $x(t)$.

Il est donc important, avant toute chose, de chiffrer cette dégradation afin de déterminer les conditions qui permettent de la rendre tolérable.

2. MODÉLISATION DE L'ÉCHANTILLONNAGE

a - Afin de représenter la suite des nombres $\{... x(nTe), x(n+1)Te, ...\}$ par une fonction mathématique $x^*(t)$, on convient d'associer à tout nombre $x(nTe)$ une impulsion de Dirac d'intensité $x(nTe)$ centrée sur $t = nTe$ (figure 3).

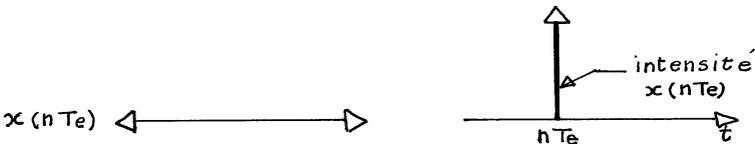


Figure 3

Remarques

1 - Rappelons qu'une impulsion de Dirac présente une amplitude infinie et une durée nulle. Elle est caractérisée par sa surface (intensité). On la représente par une flèche dont la longueur est proportionnelle à l'intensité de l'impulsion.

2 - Le fait d'associer une surface au nombre $x(nTe)$ peut faire apparaître un défaut d'homogénéité. Ce défaut n'est qu'apparent car entre $x(nTe)$ et $y(nTe)$, la chaîne ne traite que des nombres.

L'opération décrite par la figure 3 conduit à associer à la suite des nombres $\{... x(nTe), x(n+1)Te, ...\}$ une suite d'impulsions de Dirac (figure 4) que l'on pose égale à $x^*(t)$ et que l'on appelle fonction échantillonnée de $x(t)$.

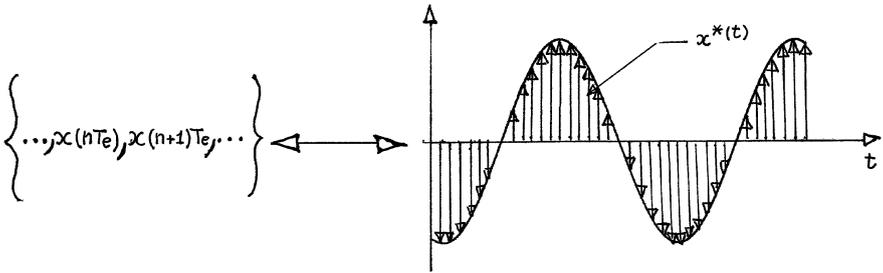


Figure 4

La fonction $x^*(T)$ est une fonction mathématique virtuelle qui n'a pas d'existence réelle et qui ne peut donc pas être observée sur un oscilloscope.

Remarque

La démarche décrite par la figure 4 est analogue à celle que l'on fait en régime harmonique en associant un nombre complexe à toute grandeur sinusoïdale.

b - Afin de retrouver la correspondance entre les signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ (figure 2), nous sommes conduits à définir l'action du bloqueur (C.N.A.) de la manière suivante :

A toute impulsion de Dirac d'intensité $y(nTe)$, le bloqueur fait correspondre un créneau d'amplitude $y(nTe)$ et de durée Te (figure 5).

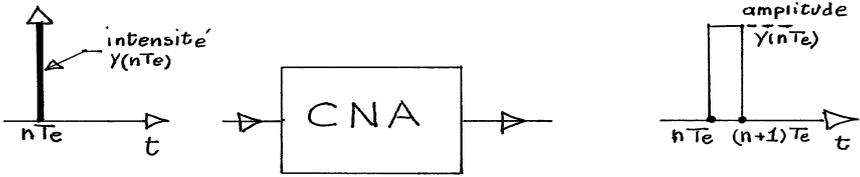


Figure 5

c - Expression mathématique de $x^*(t)$

En appelant $\delta u(t)$, l'impulsion de Dirac d'intensité unité centrée sur $t = 0$, l'impulsion de Dirac d'intensité $x(nT_e)$ centrée sur $t = nT_e$ s'écrit $x(nT_e) \cdot \delta u(t - nT_e)$.

La fonction $x^*(t)$ (figure 4), qui est une somme d'impulsions de Dirac décalées de T_e , s'écrit donc :

$$x^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nT_e) \delta u(t - nT_e)$$

d - Représentation de l'échantillonnage

Toutes les fonctions $\delta u(t - nT_e)$ étant nulles pour $t \neq nT_e$, on peut écrire $x^*(t)$ de la manière suivante :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta u(t - nT_e)$$

La fonction $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta u(t - nT_e)$ est une suite d'impulsions de Dirac d'intensité unité et décalées de T_e . On l'appelle **peigne de Dirac**.

La fonction échantillonnée $x^*(t)$ est donc obtenue (figure 6) en multipliant le signal $x(t)$ par le peigne de Dirac.

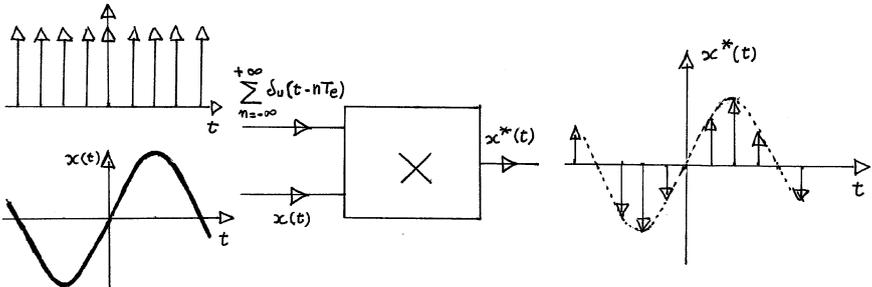


Figure 6

3. SPECTRE D'UNE SINUSOÏDE ÉCHANTILLONNÉE

Afin de chiffrer la dégradation du signal due à l'échantillonnage, considérons tout d'abord un signal $x(t)$ simple : une sinusoïde $x(t) = A \cos 2 \pi f_0 t$ (figure 7) dont le spectre est représenté à la figure 8.

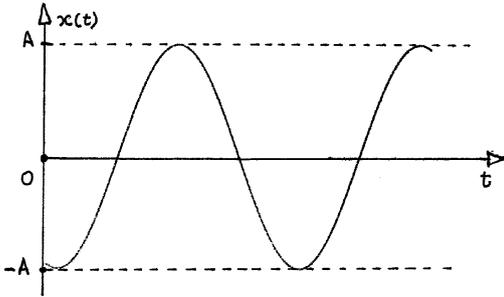


Figure 7

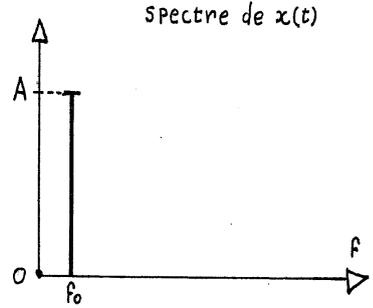


Figure 8

Sachant que le signal échantillonné $x^*(t)$ s'écrit :

$$x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta u(t - nT_e), \text{ calculons d'abord le spectre du peigne de Dirac}$$

$$\text{Dirac } \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta u(t - nT_e).$$

Le peigne de Dirac est obtenu à partir de la fonction périodique $f(t)$ de la figure 9 en faisant tendre τ vers zéro tout en maintenant le produit $A\tau = 1$.

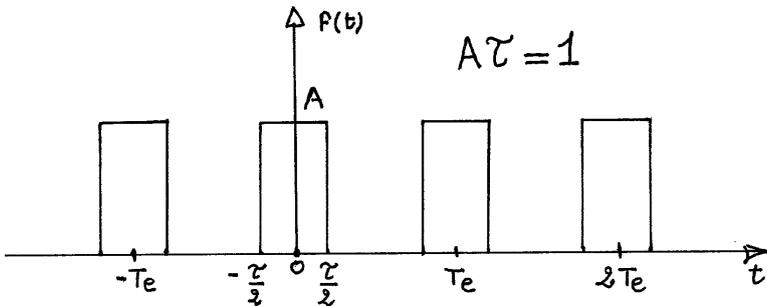


Figure 9

La fonction $f(t)$ étant paire, la décomposition spectrale ne comporte

que des termes en cosinus : $f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos 2 \pi n \frac{t}{T_e}$

$$\begin{aligned} \text{avec : } A_n &= \frac{2}{T_e} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} f(t) \cos 2 \pi n \frac{nt}{T_e} dt = \frac{2}{T_e} A \int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \cos 2 \pi n \frac{nt}{T_e} dt \\ &= \frac{2 A}{T_e} \left[\frac{T_e}{2 \pi n} \sin 2 \pi n \frac{nt}{T_e} \right]_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} \\ &= \frac{2 A}{\pi n} \left[\sin \frac{\pi n \tau}{T_e} \right] = \frac{2 A \tau}{T_e} \cdot \frac{\sin \pi n \frac{\tau}{T_e}}{\pi n \frac{\tau}{T_e}} = \frac{2}{T_e} \frac{\sin \pi n \frac{\tau}{T_e}}{\pi n \frac{\tau}{T_e}} \end{aligned}$$

$$\text{et : } A_0 = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T_e}{2}}^{\frac{T_e}{2}} f(t) dt = \frac{A \tau}{T_e} = \frac{1}{T_e} \quad \text{car : } A \tau = 1$$

Lorsque τ tend vers zéro, A_n tend vers $\frac{2}{T_e}$ et le peigne peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta u(t - nT_e) &= \frac{1}{T_e} + \frac{2}{T_e} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2 \pi n \frac{t}{T_e} \\ &= \frac{1}{T_e} + \frac{2}{T_e} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2 \pi n F_e t \end{aligned}$$

La sinusoïde échantillonnée s'écrit donc :

$$\begin{aligned} x^*(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta u(t - nT_e) &= A \cos 2 \pi f_0 t \left[\frac{1}{T_e} + \frac{2}{T_e} \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2 \pi n F_e t \right] \\ &= \frac{A}{T_e} \left[\cos 2 \pi f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \cos 2 \pi f_0 t \cos 2 \pi n F_e t \right] \end{aligned}$$

$$= \frac{A}{T_e} \left[\cos 2 \pi f_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} \cos 2 \pi (n F_e + f_0) t + \cos 2 \pi (n F_e - f_0) t \right]$$

Toutes les composantes spectrales de $x^*(t)$ ont même amplitude $\frac{A}{T_e}$.

Le spectre de $x^*(t)$ encombre tout le domaine fréquentiel de 0 à $+\infty$ car il apparaît non seulement une composante à la fréquence f_0 mais aussi aux fréquences $F_e - f_0, F_e + f_0, 2 F_e - f_0, 2 F_e + f_0...$ (figure 10).

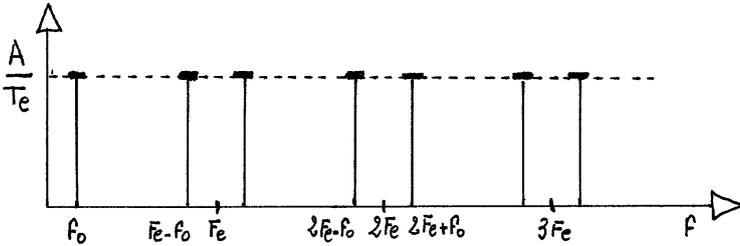


Figure 10

4. RECONSTITUTION DU SIGNAL

L'ordinateur réalisant l'opération $y(nT_e) = x(nT_e)$, il apparaît une fonction échantillonnée $y^*(t) = x^*(t)$. Le convertisseur numérique analogique (C.N.A.) permet de passer de la fonction virtuelle $y^*(t)$ au signal réel $y(t)$ en réalisant l'opération décrite par la figure 5.

La transformée de Laplace de l'impulsion de Dirac d'intensité $y(nT_e)$ est $Y_1(P) = y(nT_e)$. La transformée de Laplace du créneau d'amplitude $y(nT_e)$ et de durée T_e est $Y_2(P) = y(nT_e) \frac{1 - e^{-P T_e}}{P}$. La transmittance de Laplace du C.N.A. est donc :

$$H(P) = \frac{Y_2(P)}{Y_1(P)} = \frac{1 - e^{-P T_e}}{P}$$

Sachant que l'on passe de la transmittance de Laplace à la transmittance complexe par l'opération $P \rightarrow j \omega$, la transmittance complexe du C.N.A., valable en régime harmonique, s'écrit :

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{j \omega} = \frac{1 - e^{-2\pi j f T_e}}{2 \pi j f} = e^{-\pi j f T_e} \frac{e^{\pi j f T_e} - e^{-\pi j f T_e}}{2 \pi j f} \\ &= e^{-\pi j f T_e} \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f} = T_e e^{-\pi j f T_e} \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e} \end{aligned}$$

Le module de la transmittance complexe \underline{H} s'écrit :

$$|\underline{H}| = T_e \left| \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e} \right|$$

Ses variations en fonction de la fréquence sont représentées à la figure 11.

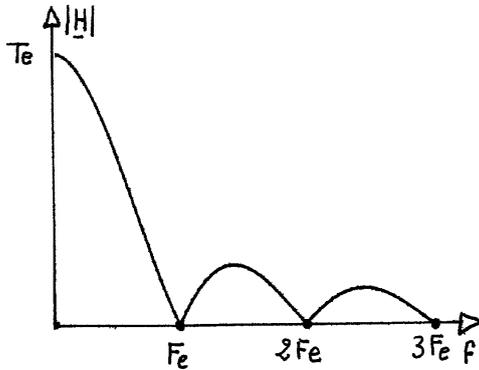


Figure 11

Remarque

Si on passe un peigne de Dirac à travers le C.N.A., on obtient un signal continu d'amplitude unité.

La décomposition spectrale du peigne de Dirac comprend une composante continue d'amplitude $\frac{1}{T_e}$ et une infinité de composantes d'amplitude $\frac{2}{T_e}$ et de fréquences $F_e, 2 F_e, 3 F_e, \dots$

La figure 11 montre que les composantes spectrales du peigne de Dirac sont éliminées par le C.N.A. sauf la composante continue d'amplitude $\frac{1}{T_e}$ qui est multipliée par T_e .

On vérifie ainsi que le signal de sortie du C.N.A. est bien un signal continu d'amplitude unité.

5. RÉCAPITULATION ET CONSÉQUENCES

Les opérations qui permettent de passer du signal sinusoïdal d'entrée $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, au signal de sortie $y(t)$ sont rassemblées à la figure 12.

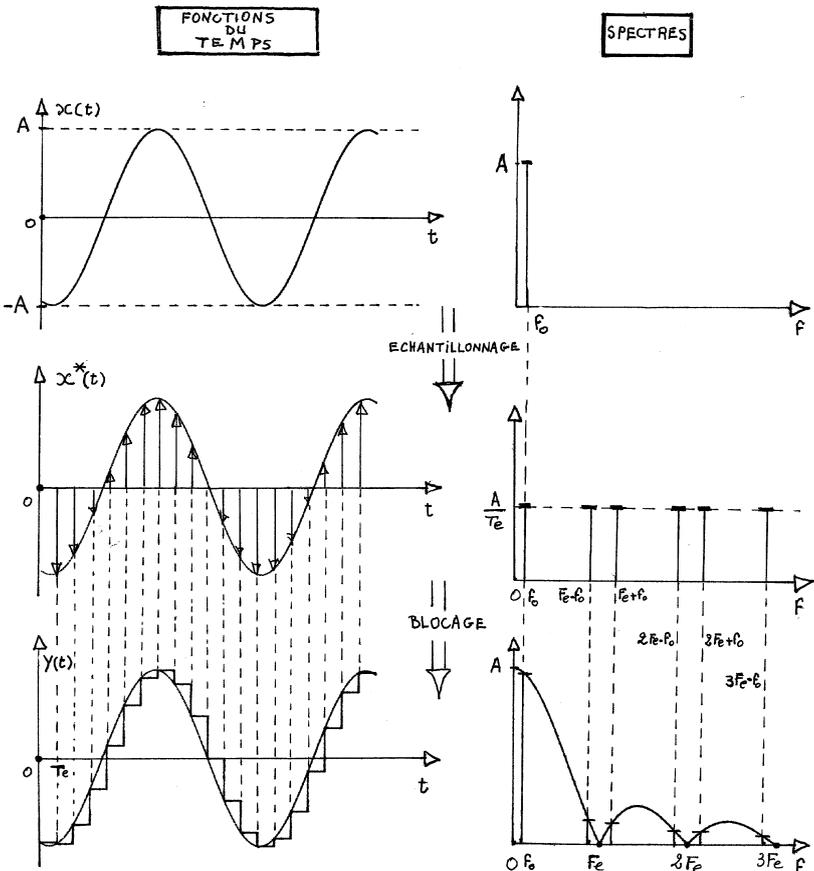


Figure 12

Les composantes spectrales créées par l'échantillonnage (dont les fréquences sont $f_0, Fe - f_0, Fe + f_0, \dots$) sont traitées par le filtre de transmittance $\underline{H} = e^{-\pi j f T_e} \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e}$.

5.1. Amplitudes

Si la condition $f_0 \ll Fe$ est vérifiée, les composantes spectrales de fréquences $Fe - f_0, Fe + f_0, 2 Fe - f_0, \dots$ se rassemblent sur les points pour lesquels la fonction $\left| \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e} \right|$ s'annule. Il ne subsiste donc que la composante de fréquence f_0 et d'amplitude A ce qui se justifie par le fait que les signaux réels $x(t)$ et $y(t)$ sont alors peu différents.

Si la condition $f_0 \ll Fe$ n'est pas vérifiée, il est toujours possible de reconstituer une sinusoïde de fréquence f_0 en calant un filtre passe-bas entre les fréquences f_0 et $Fe - f_0$, mais cette opération n'est possible que si la condition $f_0 < Fe - f_0$ est vérifiée, c'est-à-dire :

$$f_0 < \frac{Fe}{2}$$

Il est ensuite possible de reconstituer une sinusoïde d'amplitude A à l'aide d'un filtre de transmittance $\left| \frac{\pi f T_e}{\sin \pi f T_e} \right|$.

Remarque

Si la condition $f_0 < \frac{Fe}{2}$ n'est pas satisfaite, on reconstitue une sinusoïde de fréquence $Fe - f_0$ alors que la fréquence de la sinusoïde d'entrée est f_0 . Ce défaut est illustré par le diagramme temporel de la figure 13.

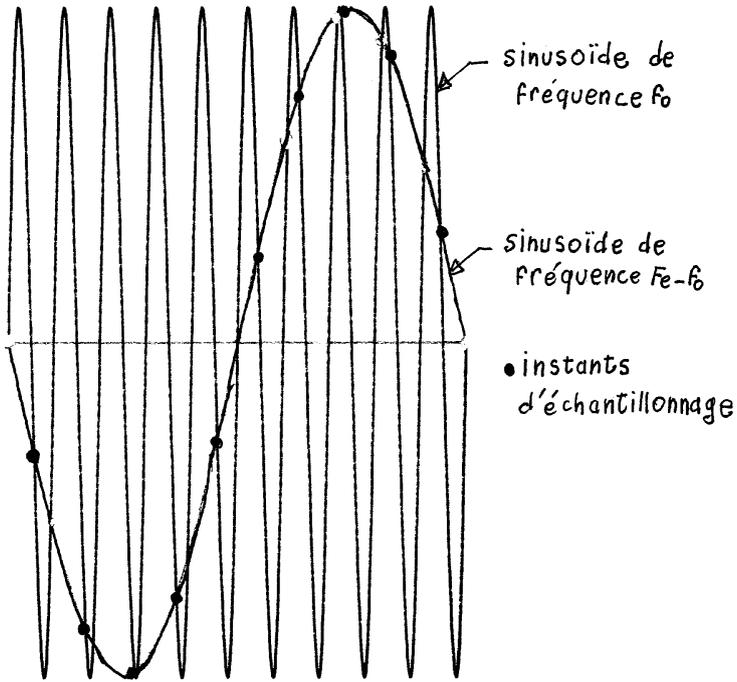


Figure 13

5.2. Phase

Pour les fréquences inférieures à f_e la transmittance complexe $\underline{H} = e^{-\pi j f T_e} \frac{\sin \pi f T_e}{\pi f T_e}$ conduit à un retard de phase égal à $\text{Arg } \underline{H} = -\pi f T_e$.

Si le signal d'entrée $x(t)$ s'écrit $x(t) = A \cos 2\pi f_0 t$, le signal reconstitué après filtrage s'écrit donc :

$$A \cos(2\pi f_0 t - \pi f_0 T_e) = A \cos 2\pi f_0 \left(t - \frac{T_e}{2} \right)$$

Ce qui correspond à un retard temporel de $\frac{T_e}{2}$.

Remarque

L'observation des courbes $x(t)$, $y(t)$ et du signal obtenu après filtrage permet de justifier le retard temporel de $\frac{T_e}{2}$ (figure 14).

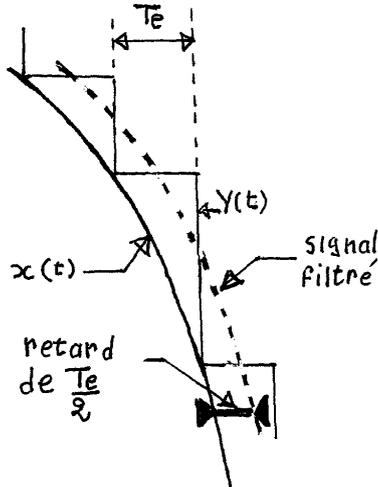


Figure 14

6. THÉORÈME DE SHANNON

Considérons un signal périodique dont le spectre fréquentiel est limité à la fréquence f_M . En répétant le raisonnement précédent pour chaque composante spectrale, nous pouvons conclure que, si la condition $f_M < \frac{F_e}{2}$ est vérifiée, il est possible de reconstituer l'amplitude de toutes les composantes spectrales. Toutes les composantes subissent alors le même retard de $\frac{T_e}{2}$ et le signal de sortie, reconstitué à partir de ses composantes spectrales est lui-même en retard de $\frac{T_e}{2}$ sur le signal d'entrée. Mais cette reconstitution n'est possible que si la condition $f_M < \frac{F_e}{2}$ est vérifiée.

Théorème de SHANNON

La reconstitution d'un signal $x(t)$ à partir d'échantillons prélevés à la fréquence F_e n'est possible que si la fréquence d'échantillonnage F_e est supérieure à 2 fois la fréquence maximale des harmoniques de $x(t)$:

$$F_e > 2 f_M$$

Remarques

1 - La conséquence pratique est l'emploi fréquent d'un filtre passe-bas (dit «d'antirepliement») calé à $F_e / 2$ de sorte que les éventuels harmoniques du signal dont les fréquences seraient supérieures ne puissent être prises en compte par le traitement du signal (cf infra article : analyse spectrale numérique).

2 - Bien évidemment la fréquence d'échantillonnage limite la plage de fréquence utilisable par le système : c'est donc un critère de choix.

7. APPLICATIONS DU TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

Jusqu'à présent nous n'avons étudié que la dégradation du signal due à l'échantillonnage. A l'aide de quelques exemples d'application, nous allons voir les avantages du traitement numérique du signal.

7.1. Filtrage numérique

A partir du dispositif de la figure 1, on réalise un filtre numérique en demandant à l'ordinateur de calculer l'échantillon $y(nTe)$ par l'opération :

$$y(nTe) = \sum_{k=0}^{k_0} a_k x[(n-k)Te] + \sum_{k=1}^{k_0} b_k y[(n-k)Te]$$

A l'instant nTe , l'échantillon $y(nTe)$ est calculé par une combinaison linéaire de k_0 échantillons d'entrée et de sortie précédents.

Les propriétés du filtre dépendent des coefficients a_k et b_k . Si tous les coefficients b_k sont nuls le filtre est dit **non récursif**. Il est **récursif** dans le cas contraire.

La détermination des coefficients a_k et b_k se fait à l'aide de la transformée en Z. Il est cependant possible de faire apparaître l'effet de filtrage par une étude directe.

Considérons par exemple le filtre numérique (utilisé dans le codage D2-MAC/PAQUET) obtenu par la relation de récurrence :

$$y(nTe) = -\frac{1}{16} x(nTe) + \frac{5}{16} x[(n-2)Te] + \frac{1}{2} x[(n-3)Te] \\ + \frac{5}{16} x[(n-4)Te] - \frac{1}{16} x[(n-6)Te]$$

Supposons que le signal d'entrée soit sinusoïdal : $x(t) = A \cos 2\pi f t$. L'échantillon de sortie à l'instant nTe s'écrit :

$$y(nTe) = -\frac{A}{16} [\cos 2\pi f n Te + \cos 2\pi f (n-6) Te] + \frac{5A}{16} [\cos 2\pi f (n-2) Te \\ + \cos 2\pi f (n-4) Te] + \frac{A}{2} \cos 2\pi f (n-3) Te$$

Compte tenu de la relation $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ il vient :

$$y(nTe) = -\frac{2A}{16} \cos 2\pi f (n-3) Te \cdot \cos 2\pi f 3 Te + \frac{10A}{16} \cos 2\pi f (n-3) Te \\ \cdot \cos 2\pi f Te + \frac{A}{2} \cos 2\pi f (n-3) Te \\ = A \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cos 2\pi f Te - \frac{1}{8} \cos 6\pi f Te \right] \cos 2\pi f (nTe - 3Te)$$

$y(nTe)$ apparaît comme l'échantillon qui serait prélevé à l'instant nTe sur le signal sinusoïdal

$$A \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cos 2\pi f Te - \frac{1}{8} \cos 6\pi f Te \right] \cos 2\pi f (t - 3Te) .$$

Après reconstitution par le C.N.A., le signal de sortie s'écrit donc :

$$y(t) = A \left[\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cos 2\pi f Te - \frac{1}{8} \cos 6\pi f Te \right] \cos 2\pi f (t - 3Te)$$

Par rapport au signal d'entrée $x(t) = A \cos 2\pi f t$, le signal de sortie $y(t)$ a subi les modifications suivantes :

- retard temporel de $3Te$,
- multiplication de l'amplitude par le facteur :

$$H = \frac{1}{2} + \frac{5}{8} \cos 2\pi f Te - \frac{1}{8} \cos 6\pi f Te .$$

La représentation de $|H|$ en fonction de la fréquence f est donnée à la figure 15.

Il s'agit d'un filtre passe-bas dont la fréquence de coupure dépend de la fréquence d'échantillonnage F_e .

Remarque

$\cos 2 \pi f (t - 3 T_e) = \cos (2 \pi f t - 6 \pi f T_e)$. Le signal de sortie présente par rapport au signal d'entrée un retard de phase de $6 \pi f T_e$. Ce retard étant proportionnel à la fréquence, on dit que le **filtre est à phase linéaire**.

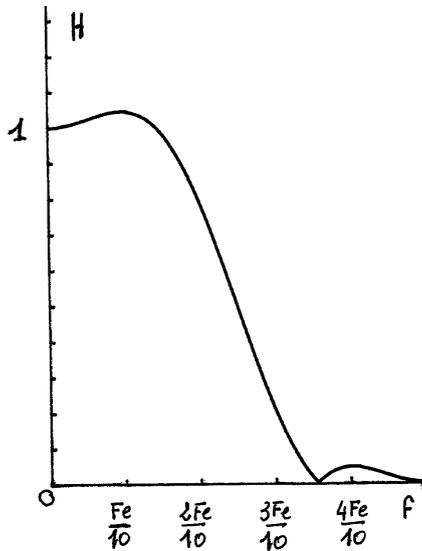


Figure 15

Pour conclure

Les propriétés du filtre dépendent des coefficients a_k et b_k (sur lesquels il ne peut y avoir que des erreurs d'arrondi) et de la fréquence d'échantillonnage F_e . Ainsi dès lors que la fréquence d'échantillonnage F_e est fixée avec précision, il ne peut y avoir aucun vieillissement dans le temps des propriétés du filtre ; de même tous les filtres numériques d'une même série ont un comportement parfaitement identique sans qu'il soit nécessaire d'effectuer des réglages sur des capacités ou des inductances.

7.2. Asservissement numérique

a - Principe des asservissements

Afin de rendre un système physique moins sensible aux perturbations, on compare sa grandeur de sortie x_S à la grandeur de commande x_C .

Considérons, par exemple, la boucle à retour unitaire de la figure 16.

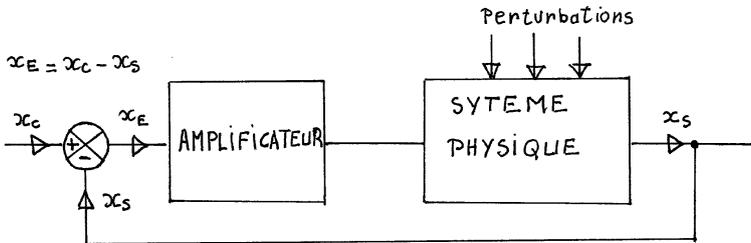


Figure 16

Si par suite d'une perturbation, la grandeur de sortie x_S augmente, le comparateur provoque une diminution de la grandeur d'entrée x_E et par suite un retour de la grandeur de sortie vers son état d'équilibre et ce sans qu'il soit nécessaire de connaître l'origine de la perturbation.

Précision

Sachant que $x_E = x_C - x_S$, la grandeur de sortie x_S est d'autant plus proche de la grandeur de commande x_C , que la grandeur d'entrée x_E est plus faible. L'asservissement étant destiné à fixer la grandeur de sortie x_S , **l'erreur $x_E = x_C - x_S$ est d'autant plus faible que l'amplification est plus grande.**

Stabilité

Le système physique fait intervenir des retards dans la transmission du signal. Compte tenu de ces retards, le signal x_S ramené sur l'entrée peut agir «à contre temps» et provoquer l'oscillation du système. **Le risque d'instabilité est d'autant plus important que l'amplification est plus grande.**

Précision et stabilité sont donc deux exigences contradictoires. Pour les concilier, on place en cascade dans la chaîne directe un filtre correcteur.

b - Asservissement numérique

On réalise un asservissement numérique (figure 17) en insérant une chaîne de traitement numérique dans la boucle de la figure 16.

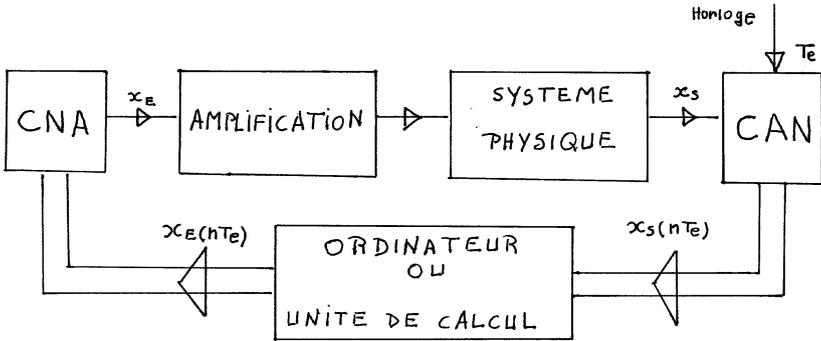


Figure 17

Le C.A.N. cadencé à la fréquence $f_e = \frac{1}{T_e}$ fournit à l'ordinateur une suite de nombres $x_S(nT_e)$. L'ordinateur détermine l'échantillon d'entrée $x_E(nT_e)$ par comparaison avec une suite mémorisée d'échantillons de commande $x_C(nT_e)$.

Si l'ordinateur se contentait de réaliser l'opération $x_E(nT_e) = x_C(nT_e) - x_S(nT_e)$, la chaîne de traitement numérique ne présenterait aucun intérêt, car son seul effet serait d'ajouter un retard temporel supplémentaire $\frac{T_e}{2}$ ce qui contribuerait à l'instabilité du système.

Précision statique

On chiffre la précision statique par la différence $\mathcal{E}_S = x_C - x_S = x_E$ lorsque la grandeur x_C est constante ($x_C(nT_e) = \text{cste} \forall n$).

Dans ce cas, l'ordinateur peut annuler l'erreur statique \mathcal{E}_S en incrémentant $x_E(nT_e)$ de la différence entre $x_S(nT_e)$ et $x_C(nT_e)$ soit :

$$x_E(nT_e) = x_E[(n-1)T_e] + x_C(nT_e) - x_S(nT_e)$$

Lorsque le régime permanent continu est établi,

$x_E(nT_e) = x_E[(n-1)T_e]$ ce qui conduit à $x_C(nT_e) = x_S(nT_e)$ et l'erreur statique \mathcal{E}_S est nulle.

Stabilité

La relation $x_E(nTe) = x_E[(n-1)Te] + x_C(nTe) - x_S(nTe)$ doit en général être corrigée pour donner au système une bonne stabilité et un temps de réponse suffisamment court. L'étude complète est réalisée à l'aide des transformées en Z et la relation de récurrence qui permet de calculer $x_E(nTe)$ est analogue à celle qui régit le fonctionnement d'un filtre numérique. On réalise ainsi un correcteur numérique.

On conçoit qu'en établissant l'échantillon $x_E(nTe)$ à partir des états antérieurs, l'ordinateur contribue à la stabilité du système. En effet, la mémorisation des échantillons permet à l'ordinateur de se **souvenir** des états antérieurs (**correction intégrale**) et **de prévoir** leur évolution future (**correction dérivée**). On peut alors comparer le comportement de l'ordinateur à celui d'un conducteur automobile qui, pour établir la vitesse, se souviendrait des états antérieurs du compteur de vitesse et tiendrait compte de sa vitesse de variation instantanée (c'est-à-dire de l'accélération). On aboutit ainsi à un comportement plus «intelligent» qui est un facteur de stabilité.

7.3. Transmissions numériques

Dans ce type de liaison, l'information est transmise à l'aide d'une suite d'éléments binaires susceptibles de présenter deux états notés «0» et «1». L'idée n'est pas nouvelle si l'on considère que les premières transmissions électriques ont été faites en MORSE, en codant le signal par un élément binaire pouvant prendre deux états : le point et le trait. La nécessité de l'intervention humaine dans une liaison MORSE limite les performances du système.

La production du signal numérique à partir du signal à transmettre $m(t)$ se décompose en deux opérations :

- codage du signal par un élément binaire,
- représentation de chaque état de l'élément binaire par un signal électrique.

a - Codage du signal par un élément binaire

L'opération correspondante est décrite à la figure 18.

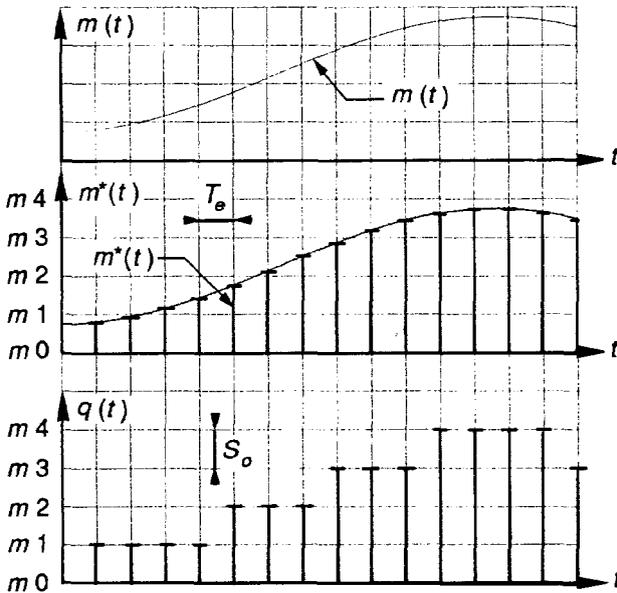


Figure 18

Le signal $m(t)$ est échantillonné à la fréquence $F_e = \frac{1}{T_e}$, puis quantifié suivant une suite discrète de niveaux m_0, m_1, m_2, \dots

• Échantillonnage

Nous avons vu que l'échantillonnage à la fréquence F_e impose que la décomposition spectrale du signal $m(t)$ ne contienne pas de composantes dont la fréquence f_M serait supérieure à $\frac{F_e}{2}$.

L'échantillonnage limite donc la fréquence du signal à transmettre.

• Quantification

La plage de variations du signal $m(t)$ est découpée en M niveaux. Le nombre M est une puissance de 2 et peut être écrit $M = 2^N$. Chaque valeur d'échantillon est approximée par le niveau dont elle est le plus proche. Sur la figure 18, on passe ainsi du signal $m^*(t)$ au signal $q(t)$. Chacun des $M = 2^N$ niveaux de quantification peut être écrit sous la forme $m_n = S_0 [\mathcal{C}_0^e 2^0 + \dots + \mathcal{C}_{N-1}^e 2^{N-1}]$, où $\mathcal{C}_0^e, \mathcal{C}_1^e, \dots, \mathcal{C}_{N-1}^e$ sont des

éléments binaires qui ne peuvent prendre que les valeurs 0 ou 1. La transmission de l'échantillon m_n est donc réalisée en transmettant la séquence binaire $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_1 \dots \mathcal{E}_{N-1}$.

La plage de variations du signal $m(t)$ étant fixée, le pas de quantification S_0 est d'autant plus faible que le nombre N de bits utilisés pour coder la valeur d'un échantillon est plus élevé. Le passage du signal échantillonné $m^*(t)$ au signal quantifié $q(t)$ constitue une dégradation du signal analogue à celle que produirait un bruit superposé au signal $m^*(t)$. On l'appelle bruit de quantification et on montre que sa valeur quadratique moyenne est $\frac{S_0^2}{12}$.

La quantification est à l'origine d'un bruit.

• **Comparaison entre une transmission analogique et une transmission numérique**

Un canal de transmission fait apparaître deux sortes de perturbations :

- la bande passante limite la fréquence du signal à transmettre ce qui provoque une déformation de ce signal,
- un signal de bruit est superposé au signal utile.

Pour une transmission analogique, ces deux perturbations se traduisent par une dégradation du signal décrite par la figure 19.

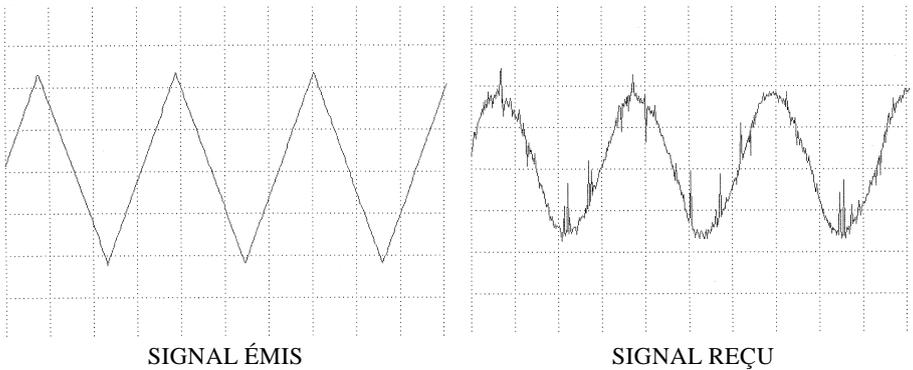


Figure 19

Pour une transmission numérique, la même dégradation affecte les motifs attribués aux deux états «0» et «1» (figure 20).

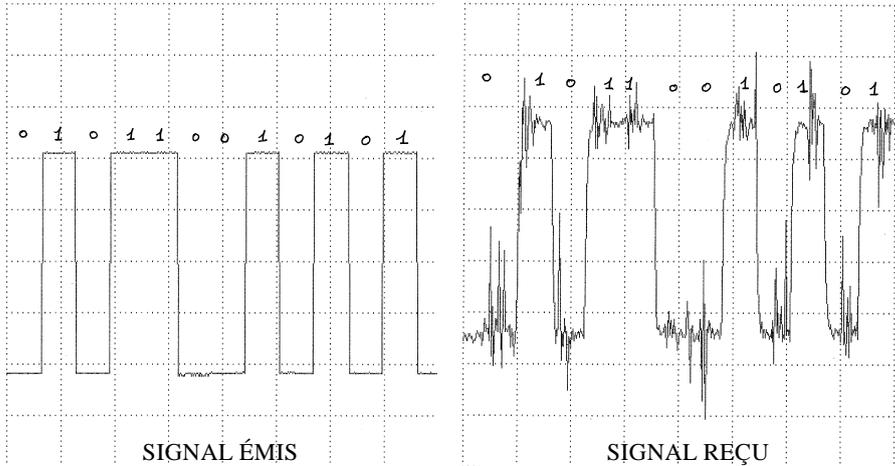


Figure 20

Cependant si la perturbation n'est pas trop importante, le récepteur est en mesure de reconstituer la séquence de «0» et de «1» du signal émis. Dans ce cas la totalité de l'information émise est présente à la réception. Les imperfections du canal n'ont alors aucun effet sur la qualité de la transmission.

Cela ne signifie pas que la transmission numérique ne dégrade pas le signal. Nous avons vu en effet que :

- l'échantillonnage limite la fréquence du signal à transmettre,
- la quantification est à l'origine d'un bruit.

Ainsi les deux perturbations (limitation de la bande passante, addition de bruit) apparaissent également dans une transmission numérique. On peut cependant distinguer une différence fondamentale.

- Pour une transmission analogique, la dégradation est le fait du canal de transmission et présente ainsi un caractère aléatoire (environnement industriel, conditions météorologiques...).

• Pour une transmission numérique, **la dégradation est définie une fois pour toutes à la conception** et ce, indépendamment du canal de transmission :

- la fréquence d'échantillonnage F_e fixe la bande de fréquence transmise,
- le pas de quantification S_0 fixe le bruit.

b - Représentation d'un élément binaire par un signal électrique

Chaque état «0» et «1» de l'élément binaire est représenté dans le temps par un motif : $s_0(t)$ pour un «0», $s_1(t)$ pour un «1». A la figure 21 sont représentés les motifs $s_0(t)$ et $s_1(t)$ correspondant au codage N.R.Z. (non retour à zéro).

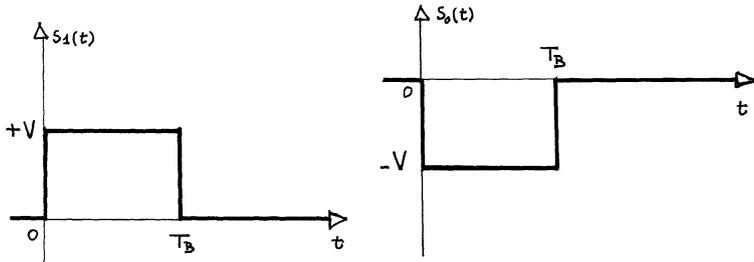


Figure 21

On montre que la bande de fréquence nécessaire à la transmission du signal numérique est un multiple de $\frac{1}{T_B}$ (où T_B est la durée d'un motif). Elle augmente donc si T_B diminue.

Dans l'intervalle de temps T_e séparant deux instants d'échantillonnage, N bits, correspondant chacun à un motif de durée T_B doivent être transmis, ce qui impose $T_e > N T_B$ c'est-à-dire :

$$\frac{1}{T_B} > N F_e$$

La qualité de la transmission impose une valeur minimale à F_e (limitation de la bande passante du signal à transmettre) et à N (bruit de quantification). Cette condition impose donc une valeur minimale à $1 / T_B$ et fixe pour le canal de transmission une bande de fréquence suffisamment élevée. Nous aboutissons ainsi à la même conclusion que pour une transmission analogique.

7.4. Analyse spectrale numérique

L'analyse spectrale numérique est étudiée dans un autre article de ce numéro.

8. CONCLUSION SUR LE TRAITEMENT NUMÉRIQUE DU SIGNAL

Le principal inconvénient des systèmes numériques provient de la limitation en fréquence due à la fréquence d'échantillonnage F_e (on peut cependant remarquer que le plus faible des oscilloscopes numériques échantillonne tout de même le signal à 20 MHz). De plus cette **fréquence doit être fixée avec précision** ce qui est possible en utilisant un oscillateur à quartz.

En contrepartie le traitement numérique du signal présente de nombreux avantages :

- Si l'élaboration théorique du système numérique nécessite des calculs complexes, (complexité qui peut d'ailleurs être réduite par l'assistance d'un ordinateur) la mise en œuvre au niveau matériel ne nécessite aucun réglage si ce n'est celui de la fréquence d'échantillonnage.
- Si la fréquence d'horloge est bien fixée, le système numérique ne présente aucun vieillissement dans le temps et la qualité du fonctionnement est définie une fois pour toutes à la conception.
- La miniaturisation des fonctions (retard, mémorisation...) peut être très poussée alors que celle des composants (condensateurs, inductances) est limitée.
- La précision du système numérique ne dépend que de la précision de l'horloge qui fixe la fréquence F_e . Or les mesures de fréquences sont beaucoup plus précises que les mesures de résistances, de condensateurs ou d'inductances : il suffit pour s'en convaincre de compter le nombre d'afficheurs d'un fréquencemètre haut de gamme.

Pour un système numérique les difficultés, inhérentes à la construction sont transférées au stade de la conception, autorisant ainsi une mise en œuvre matérielle plus confortable.