Un modèle simple mais instructif de moteur linéaire

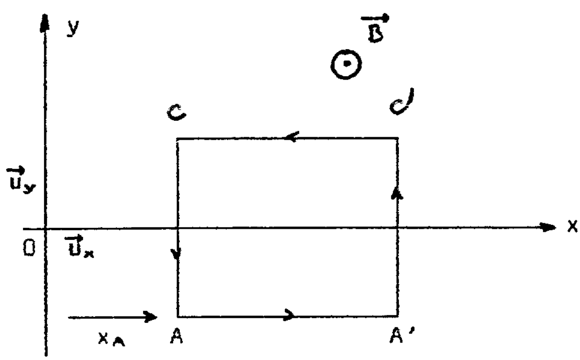
par Ph. JULIARD
LTR H. Brisson, 18103 Vierzon

Cet article présente un modèle simple de moteur linéaire, permettant de dégager les propriétés essentielles de ce type de moteur, tout en restant accessible à un élève de terminale.

Il constitue donc une illustration simple et concrète des deux aspects du phénomène d'induction.

L'idée essentielle est de remplacer l'onde de champ sinusoïdale habituellement utilisée pour ce genre d'étude par une onde de champ carrée : on simplifie alors considérablement les calculs (on peut ainsi étudier par exemple le régime transitoire précédent l'établissement du régime permanent de fonctionnement du moteur).

PRÉSENTATION DU MODÈLE



Le moteur est un cadre carré AA'C'C (cf. figure) de côté a, se déplaçant dans le plan xOy, parallèlement à l'axe Ox. On repère la position du cadre à un instant donné par l'abscisse x_A du côté AC. Dans tous les cas étudiés le cadre est initialement au repos avec $x_A = 0$ m.

Un champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$ peut éventuellement exister dans la région où se déplace le cadre. La description précise de ce champ sera faite ultérieurement. Le plan xOy est horizontal. On note R la résistance électrique du cadre et m sa masse. De plus on néglige son inductance propre.

ENTRAÎNEMENT DU CADRE PAR UN ÉCHELON DE CHAMP SE PROPAGEANT

Dans cette première partie le champ B a simplement la structure d'un échelon se propageant avec une célérité c constante :

– pour un point M d'abscisse x telle que : $x < x_B$: $\vec{B} = \vec{0}$,

– pour un point M d'abscisse x telle que : $x > x_B$: $\vec{B} = B_o\,\vec{u_z}$, B_o est une constante positive. De plus x_B est une fonction du temps t : $x_B = c\,t$; c est donc la célérité du champ ; elle est constante et positive.

Premier cas : on suppose que le cadre n'est soumis qu'aux forces d'origine magnétique

A un instant t quelconque, la seule partie du cadre plongé dans le champ $\vec{B}$ est comprise entre l'abscisse x_B et l'abscisse $(x_A + a)$. On en déduit l'expression du flux de $\vec{B}$ à travers le cadre :

$$\Phi = a\,B_o\,(x_A + a - x_B)$$

La force électromotrice induite $e = -\,d\Phi/dt = -\,a\,B_o\,(v - c)$. Le courant induit i a pour intensité : $i = e/R = -\,a\,B_o\,(v - c)/R$. Seul le côté A'C' du cadre est soumis à la force $\vec{F}$ de Laplace ; on exprime cette force et on applique le théorème du centre d'inertie au cadre.

<u>Résultats</u> : $\vec{F} = i\,a\,B_o\,\vec{u_x}$; $m\,d\vec{v}/dt = \vec{F}$.

En projection sur $\vec{u_x}$: $m\,dv/dt = i\,a\,B_o = -\,[a\,B_o]^2\,(v - c)/R$.

$\tau \dfrac{dv}{dt} + v = c$ avec : $\tau = \dfrac{m\,R}{[a\,B_o]^2}$; on en tire v et x_A ;

$$v = c\left[1 - \exp(-t/\tau)\right] ;\ x_A = c\,\tau\left[\frac{t}{\tau} - \left[1 - \exp(-t/\tau)\right]\right]$$

Se reporter aux figures 1 et 2 pour les graphes.

Pour que le cadre ne décroche pas, il faut qu'une partie de celui-ci reste plongé dans le champ magnétique à tout instant : soit $(x_A + a) > x_B$ à tout instant.

Calculs : $(x_A + a) - x_B = a - c\,\tau\,[1 - \exp(-t/\tau)] > 0$; la contrainte est maximale pour $t >> \tau$: $a > c\,\tau$.

Sur la figure 3 on a représenté les deux cas possibles : $a > c\,\tau$ et $a < c\,\tau$.

En régime permanent : $t >> \tau$: $v \approx c$, $e \approx 0$ V, $i \approx 0$ A, $F \approx 0$ N et $x_A \approx c\,(t - \tau)$. Le cadre se déplace à la même vitesse que le champ, le côté A'C' étant dans le champ ainsi que tous les points du cadre situés à une distance de A'C' inférieure à $(a - c\,\tau)$.

Remarques : on peut qualifier ce moteur de synchrone puisqu'il se déplace à la même vitesse que le champ. On peut également interpréter le fonctionnement de ce moteur en terme de loi de modération : le déplacement du champ provoque dans un premier temps une diminution du flux à travers le cadre, diminution que le mouvement pris par ce dernier a tendance à modérer.

Deuxième cas : le cadre est soumis de plus à une force résistante constante

On suppose qu'en plus des forces d'origine magnétique, le cadre est soumis à une force constante $\vec{F_1}$ s'opposant à son mouvement ; on écrira : $\vec{F_1} = -(m/\tau)\,v_o\,\vec{u_x}$, v_o étant une constante positive homogène à une vitesse. La nouvelle équation du mouvement s'obtient sans difficulté : $\tau \dfrac{dv}{dt} + v = c - v_o$ avec : $\tau = \dfrac{m\,R}{[a\,B_o]^2}$; l'expression de τ n'a pas changé.

$$v = (c - v_o)\left[1 - \exp(-t/\tau)\right] ; \; x_A = (c - v_o)\,\tau\left[\frac{t}{\tau} - \left[1 - \exp(-t/\tau)\right]\right]$$

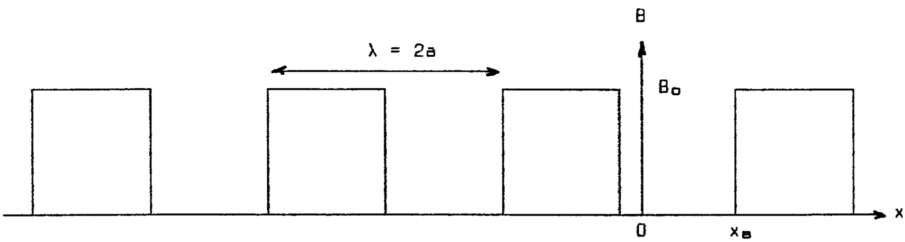
Le cadre démarre si à l'instant $t = 0$ s son accélération est positive : $dv/dt > 0$ m.s^{-2} donne : $c > v_o$.

Interprétation : la force magnétique doit être supérieure à la force résistante. Si le cadre démarre sa vitesse limite n'est plus c mais $(c - v_o)$: en régime permanent le cadre se déplacerait moins vite que le champ. Il existe donc un instant t_o à partir duquel le cadre se trouve en dehors du champ : n'étant plus entraîné à partir de cet instant il finira par s'arrêter. A partir de t_o : $x_B > (x_A + a)$; la figure 4 indique comment déterminer t_o graphiquement.

Conclusions : cette première partie montre que pour obtenir un moteur pouvant fonctionner en permanence, l'entraînement par un échelon de champ n'est pas suffisant.

ENTRAÎNEMENT DU CADRE PAR UNE ONDE CARRÉE DE CHAMP SE PROPAGEANT

Le champ a maintenant la structure représentée ci-dessous :



Le champ à la structure d'une onde carrée, de longueur d'onde $\lambda = 2a$, se propageant avec la célérité c constante. La longueur d'onde du champ étant égale à (2 a), on trouve à l'intérieur du cadre soit le front montant du champ, soit le front descendant.

Compte tenu des conditions initiales données :

– si le front montant du champ est à l'intérieur du cadre, le côté A'C' est dans le champ : c'est donc sur lui que s'exerce la force de Laplace induite,

– si le front descendant du champ est à l'intérieur du cadre, c'est le côté AC qui est dans le champ et sur lui que l'on trouve la force de Laplace.

Le calcul de la force s'effectue comme dans la partie précédente.

Résultats : on retrouve la même force que précédemment s'exerçant alternativement sur A'C' et AC.

Commentaires :

– lorsque A'C' est dans le champ, le déplacement de celui-ci tend à diminuer le flux à travers le cadre ; pour modérer cette diminution, la force de Laplace entraîne le cadre «à la poursuite» du champ ;

– lorsque AC est dans le champ, le déplacement de celui-ci tend à augmenter le flux à travers le cadre ; pour modérer cette augmentation, la force de Laplace entraîne le cadre «à fuir» le champ.

Dans les deux cas la force est motrice ce qui est le but recherché.

Les forces s'exerçant sur le cadre étant les mêmes, l'équation différentielle est la même et les expressions de v et x_A n'ont pas changé.

$$v = (c - v_o)\left[1 - \exp(-t/\tau)\right] ; x_A = (c - v_o)\,\tau\left[\frac{t}{\tau} - \left[1 - \exp(-t/\tau)\right]\right]$$

Comme précédemment le cadre démarre si $c > v_o$. Cette fois le décrochage ne se produit plus car lorsque le front montant du champ quitte le cadre, le front descendant se présente pour «prendre le relais» ; lorsqu'à son tour ce front descendant va quitter le cadre un nouveau front montant se présente ; ainsi le cadre est toujours entraîné.

La force de Laplace change de point d'application chaque fois que : $x_A = (x_B - k\ a)$ avec $k = 1, 2, 3$ ...

La figure 5 montre comment on peut déterminer graphiquement les instants correspondants.

En régime permanent : $t >> \tau$: $v \approx (c - v_o)$; $e \approx a\ B_o\ v_o$; $i \approx a\ B_o\ v_o/R$;

$F = (m/\tau)\ (c - v) \approx (m/\tau)v_o$.

Remarque : en régime permanent le cadre se déplace à une vitesse inférieure à celle du champ ; on peut considérer le moteur comme un moteur asynchrone. La vitesse du champ par rapport au cadre est égale à v_o : c'est la vitesse de glissement.

Puissance fournie au cadre par la force de Laplace :

$P_{LAP} = F.v \approx F.(c - v_o) = (m/\tau)v_o(c - v_o)$.

Puissance absorbée par la force résistante constante :

$P_1 = F_1.v \approx (m/\tau)v_o(c - v_o)$.

Remarque : lorsque le régime permanent est établi, la somme des forces agissant sur le cadre est nulle ; en valeur absolue les deux puissances sont donc égales.
Puissance Joule : $P_J = R\ i^2 \approx (m/\tau)\ (v_o)^2$.

Le champ magnétique doit donc fournir une puissance égale à la somme $(P_{LAP} + P_J)$; la puissance utile (pour le déplacement du cadre) est P_{LAP}. On définira donc le rendement η par : $\eta = P_{LAP}/[P_{LAP} + P_J]$.

Résultat : $\eta = 1 - (v_o/c)$.

Commentaire : ce rendement est maximum en l'absence de phénomènes irréversibles (ici pour $v_o = 0\ m.s^{-1}$) ; en pratique il faudra faire fonctionner le moteur de telle sorte que l'on ait : $v_o << c$.

Les moteurs linéaires réels sont entraînés par une onde de champ sinusoïdale ; néanmoins l'essentiel des résultats établis sur ce modèle simple restent valables.

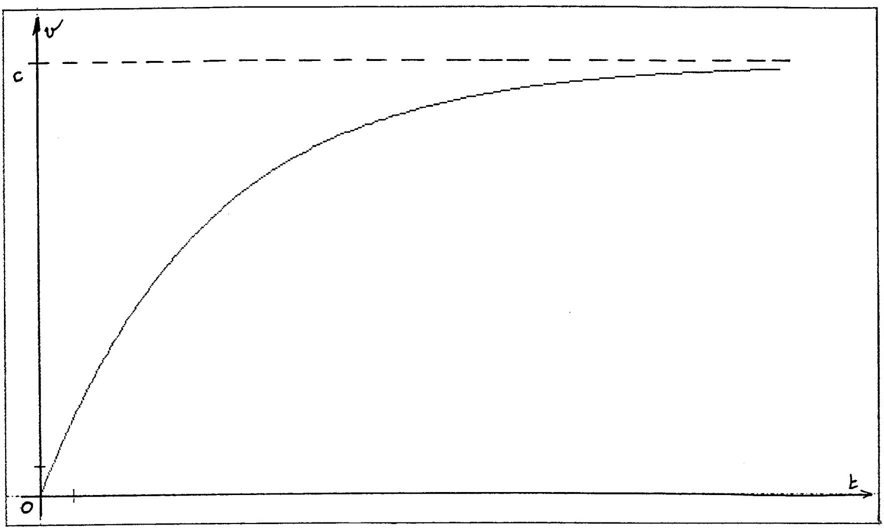


Figure 1

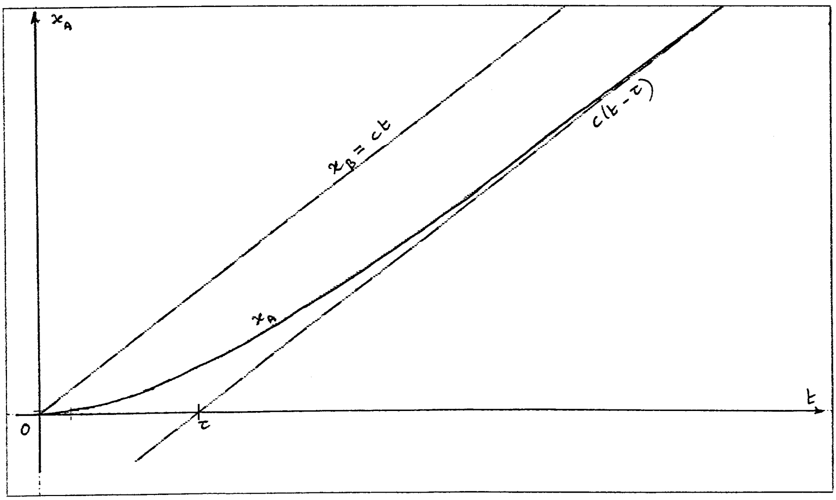


Figure 2

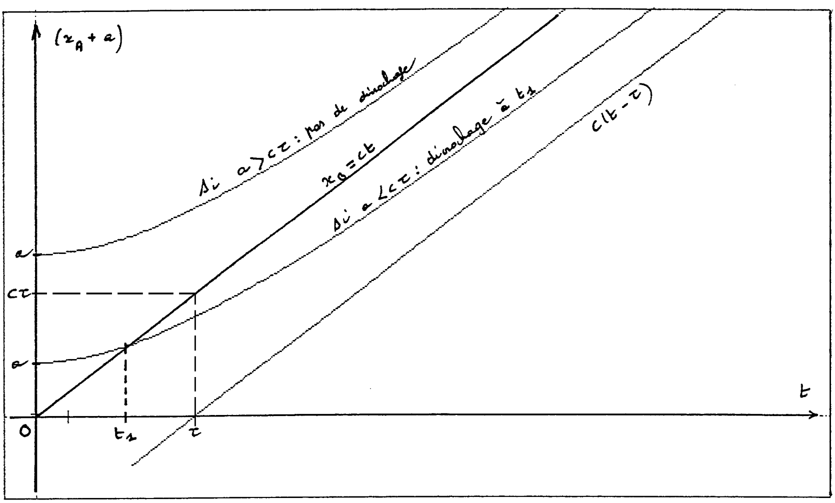


Figure 3

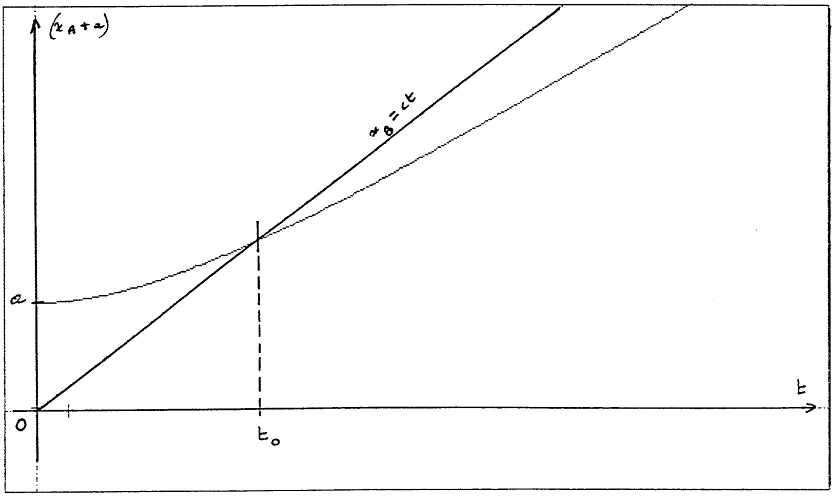


Figure 4

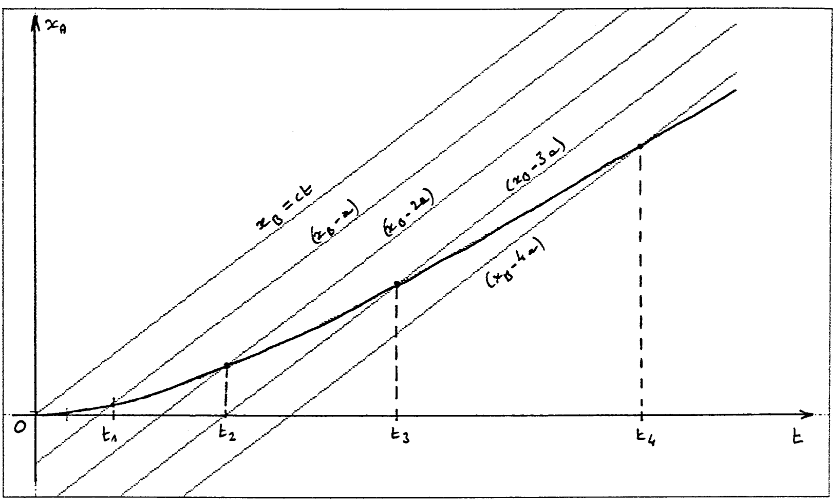


Figure 5