Introduction à la cinétique du point

par M. BARBASTE
Lycée A. Kastler, 33400 Talence

N.B. : Dans les lignes qui suivent les observations ou intentions pédagogiques figureront en italique.

TRAVAUX PRATIQUES

Ces T.P., réalisés actuellement en Terminale E, et cela depuis plus de dix ans, s'inscrivent parfaitement dans le cadre des futurs programmes de la Première scientifique, et plus particulièrement de l'Unité U_1 : Observateurs et mouvement.

Ils ne nécessitent que deux feuilles de papier format A_4, l'une opaque, l'autre de calque, et les accessoires classiques pour tout écolier : crayon noir (HB), stylos bille bleu, vert, rouge, un double décimètre, un compas ou un rapporteur et, si besoin, une feuille de carton et une paire de ciseaux.

Ils présentent l'intérêt de renouer avec des manipulations caractérisées par «l'esprit de géométrie», en amenant progressivement l'élève à construire un document à l'aide de la règle et du compas, donc sans moyens onéreux, et à prendre conscience, juste avant d'aborder la Dynamique, de concepts fondamentaux et de leur corrélation. Si nécessaire, la réflexion pourra être soutenue par une manipulation faisant appel au découpage, sans en abuser.

1. BUT DE LA MANIPALTION & MÉTHODE

On se propose de déterminer dans deux référentiels différents :

1/ La trajectoire d'un point P d'un mobile,

2/ Le vecteur-vitesse instantanée de P *selon la méthode pratique utilisée en Seconde pour construire ce vecteur à partir d'un document sur lequel figurent les positions P_i occupées par ce point P au bout de durées successives et égales.*

Plus concrètement on illustrera ce T.P. en prenant par la suite comme exemple :

– pour solide : la roue avant (supposée sans épaisseur) d'une bicyclette ($\mathscr{B}$),

– pour point : la valve, assimilée à un point P de la périphérie de la roue.

2. NOTION DE «ROULEMENT SANS GLISSEMENT»

On amènera les élèves à trouver (expérimentalement, à l'aide d'un disque découpé dans du carton fort, d'une dizaine de centimètres de rayon) et à énoncer la propriété ci-après de ce mouvement, en montrant que celui-ci exclut les cas séparés ou combinés ci-après :

– du glissement : même point P en contact avec des points Q différents du support sur lequel se déplace la roue.
Exemple : roue de voiture qui progresse tous freins bloqués.

– du roulement : même point Q en contact avec des points P différents
Exemple : roue de voiture qui «dérape» ou «chasse» au démarrage sur le gravillon.

Pour exprimer que le cercle $\mathscr{C}$(C ; R) «roule sans glisser» sur une droite (D) nous considérons qu'à chaque instant t_i, un point P de la périphérie, en contact avec (D) en Q_0 à t = 0 s, soit P_0, occupe à l'instant t_i la position P_i, (un nouveau point P'_i étant en contact avec Q_i de la droite) telle que :

$$\text{mes}\,.\,\overparen{P_i\,P'_i} = \text{mes}\,.\,P_0\,P'_i = \text{mes}.\,C_0\,C_i \text{ (en mètres)}$$

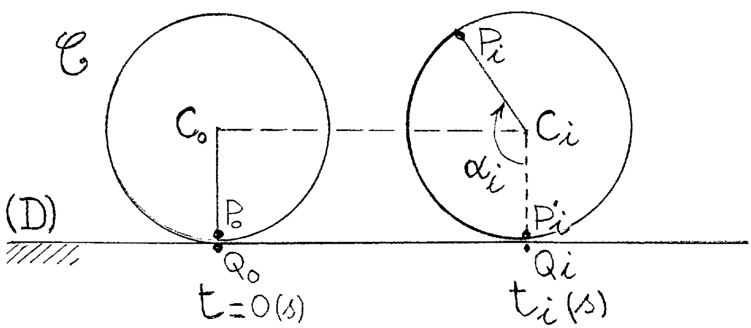


Figure 1

On rappelle la relation :

$\widehat{P_i P'_i} = R \cdot \alpha_i$ — R : rayon du cercle (en mètres) ; α_i : angle de rotation (en radians)

3. CHOIX DES RÉFÉRENTIELS

Nous allons procéder à des observations en nous plaçant dans deux référentiels différens dans lesquels nous choisirons chaque fois un repère spatial particulier associé à un repère temporel (ou chronologie) commun dans les deux cas.

Pour préciser concrètement cette étude nous considèrerons la valve P d'une roue (sans épaisseur) de bicyclette roulant sans glisser sur la route (D).

Il s'agit de reprendre les notions vues en cours et de bien différencier référentiel et repère spatial.

A - Référentiel absolu : (Figure 2)

Constitué par la route (D).

Repère ($\mathscr{R}$) : (P_0 ; $\vec{i}$; $\vec{j}$) *lié à la route (D) ; P_0 étant la position occupée par le point P à la droite t = 0 s.*

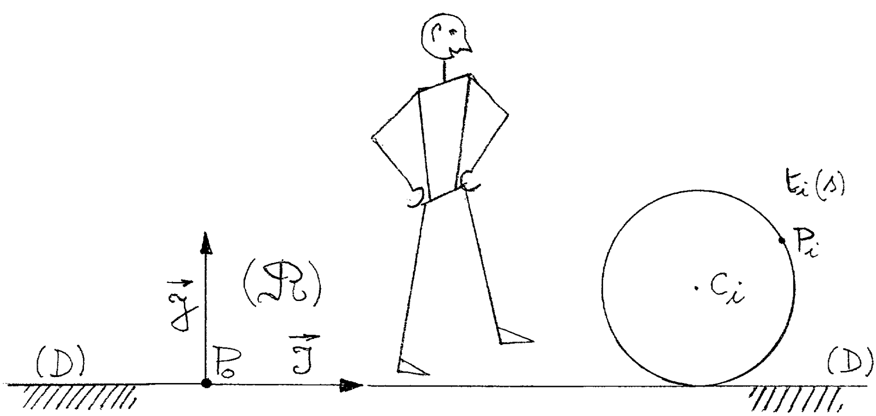


Figure 2

B - Référentiel d'entraînement : (Figure 3)

Lié à la bicyclette.

Repère (r) : $(C_0 ; \vec{i} ; \vec{j})$ *lié au centre C de la roue.*

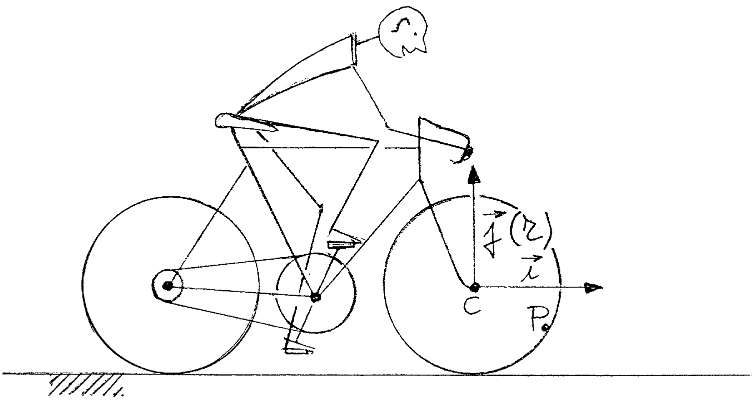


Figure 3

On peut rappeler que dans un référentiel donné, il existe une infinité de repères équivalents, plus ou moins commodes.

4. ÉTUDE DU MOUVEMENT DE P DANS LE RÉFÉRENTIEL D'ENTRAÎNEMENT

A - Trajectoire de P dans (r) : $\mathcal{C}_{P/(r)}$ (fig.4)

1/ Tracer la trajectoire, en la justifiant, sur une feuille (f_1), sachant que le rayon de la roue est : R = 95,5 mm *cette valeur sera justifiée par la simplicité des résultats auxquels conduiront les calculs ultérieurs.*

2/ Le mouvement de P est uniforme ; un tour est accompli en T = 0,480 s.

a) Tracer tous les θ = 20 ms les positions du rayons CP soit : CP_0 ; CP_1 ; … ; CP_{10}.

b) Calculer l'angle α balayé par le rayon d'une position à la suivante.

P est animé d'un mouvement uniforme sur sa trajectoire, s'il décrit des arcs consécutifs égaux pendant des durées égales. Il y a : $\frac{0,480}{0,020} = 24$ *positions du rayon CP, facilement déterminées à l'aide du compas ; la définition du mouvement uniforme conduit à la proportion :* $\frac{\alpha}{360} = \frac{\theta}{T} \Rightarrow \alpha = 15^o$*. Il vaut mieux faire le calcul en b) afin que l'élève ne soit pas tenté d'employer systématiquement le rapporteur d'utilisation moins féconde que celle du compas. Le centre C du cercle sera judicieusement choisi au point d'intersection des diagonales de la feuille.*

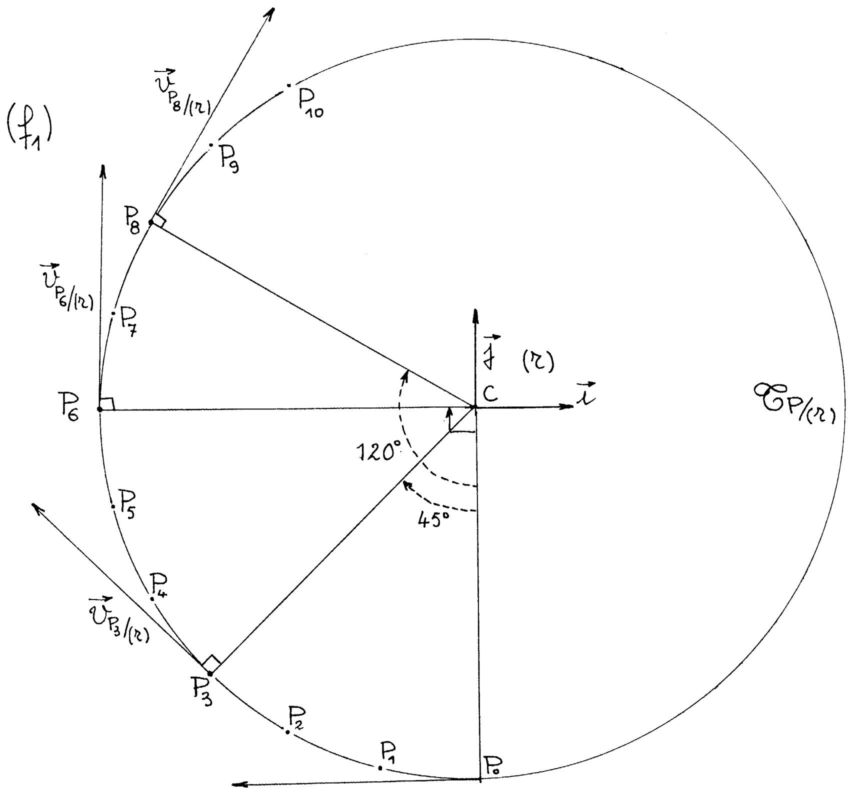


Figure 4

B - Vecteur-vitesse instantanée de P dans (r) : $\overrightarrow{\mathbf{v}}_{\mathbf{P/(r)}}$ (Figure 4)

1/ Déterminer la norme $||\overrightarrow{v}_{P/(r)}||$:

a) Graphiquement pour les points : P_3, P_6, P_8.

Pour $||\overrightarrow{v}_{P_3/(r)}||$, par exemple, on calcule : $\dfrac{d\,(P_2\,P_4)}{2\theta}$; on mesure très bien : $d(P_2\,P_4)$ = 49,5 mm on obtient ainsi :

$||\overrightarrow{v}_{P_3/(r)}|| = \dfrac{49{,}5\,.\,10^{-3}}{2\times 20\,.\,10^{-3}}$, *soit* $||\overrightarrow{v}_{P_3/(r)}|| \approx 1{,}24\,m/s.$

b) Par le calcul à partir des données du § 4.A.2/.

Cette fois nous aurons : $||\overrightarrow{v}_{P/(r)}|| = \dfrac{\text{longueur du parcours}}{\text{durée du parcours}} = \dfrac{2\pi R}{T}$, *soit :* $||\overrightarrow{v}_{P/(r)}|| = 1{,}25\,m/s.$

Il n'est pas nécessaire de faire appel à la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

c) Justifier la meilleure de ces deux déterminations.

Bien entendu la meilleure valeur est celle obtenue en **b***) car il n'y a pas d'approximation en ce qui concerne la mesure de l'espace parcouru.*

2/ Construire $\overrightarrow{v}_{P/(r)}$ aux points P_3, P_6, P_8. Échelle : 1 cm pour 0,20 m/s.

Il suffit de tracer la perpendiculaire au rayon correspondant et de porter sur celle-ci à partir de P une longueur de 62,5 mm.

5. ÉTUDE DU MOUVEMENT DE P DANS LE RÉFÉRENTIEL ABSOLU

On utilisera une feuille (f_2) de papier calque, format A_4, sur laquelle :

- *la droite (D) sera (Figure 5) :*
  - *parallèle au grand côté,*
  - *et à 1 cm de distance.*

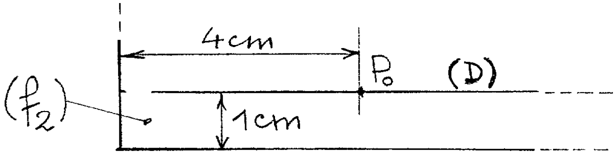


Figure 5

• *le point P_0 étant sur (D) à 4cm du petit côté gauche (cf. Figure 5). Dans ce référentiel réduit à la feuille (f_2), et dans lequel le repère ($\mathscr{R}$) aura le vecteur unitaire $\vec{J}$ perpendiculaire à $\vec{I}$ porté par (D), tous deux d'origine P_0, la roue «roule sans glisser» (comme cela a été précisé au § 2.), et de gauche à droite.*

A - Trajectoire du centre C dans ($\mathscr{R}$) : $\mathscr{C}_{C/(\mathscr{R})}$
(tracée en bleu) (Figure 6)

B - Vecteur-vitesse instantanée de C dans ($\mathscr{R}$) : $\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}$ (Figure 6)

D'après la propriété du mouvement établie au § 2. et des relations qui en découlent on peut intuitivement concevoir que le centre est animé d'un mouvement rectiligne uniforme précisé par les calculs demandés ci-après.

1/ Calculer la distance C_0C_n parcourue par C après 1 tour de roue.

Nous savons que $mes\,P_0\,P'_i = mes\,\overset{\frown}{C_0\,C_i}$ *; pour 1 tour :*
$mes\,C_0\,C_n = 2\pi R$, *soit* $mes\,C_0\,C_n = 0{,}600\,m.$

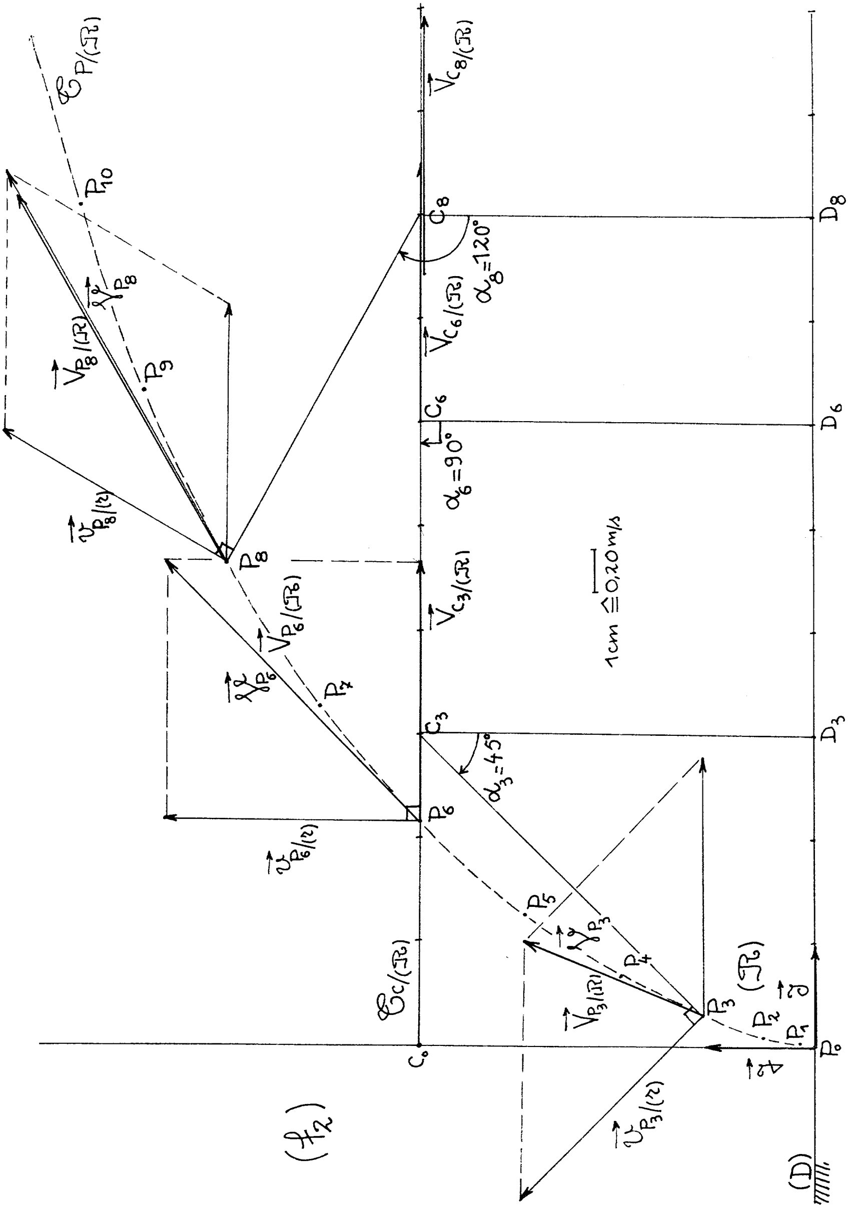
2/ Calculer $||\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}||$ en considérant toujours qu'un tour est accompli en T = 0,480 s.

Un calcul simple donne $||\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}|| = 1{,}25\,m/s$ *; on fera remarquer aux élèves que :*

$$||\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}|| = ||\vec{v}_{P/(\mathrm{r})}||\,.$$

3/ Préciser les positions de C toutes les 20 ms, soit : C_0, C_1,..., C_{10}.
$mes\,C_0\,C_1 = mes\,C_1\,C_2 = \ldots = mes\,C_9\,C_{10} = ||\,\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}\,|| \times \theta\,;$
soit: $mes\,C_i\,C_{i+1} = 1{,}25 \times 20\,.\,10^{-3} = 25\,mm$

4/ Tracer (en bleu) le vecteur $\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}$ aux points C_3, C_6, C_8.



1cm ≙ 0,20 m/s
α8 = 120°
α6 = 90°
α3 = 45°
C0
C3
C6
C8
D3
D6
D8
P0
P3
P5
P6
P7
P8
P9
P10
(R)
(D)

Figure 6

*Bien entendu il faut conserver l'échelle adoptée au § 4.B.**2/** que nous rappelons : 1 cm pour 0,20 m/s ; le vecteur* $\vec{V}_{C_{8/(\mathscr{R})}}$ *ne pourra être appliqué en* C_8 *faute de place : il sera légèrement décalé vers la gauche.*

C - Trajectoire du point P dans ($\mathscr{R}$) : $\mathscr{C}_{P/(\mathscr{R})}$ (Figure 6)

1/ Tracer (en noir) le positions occupées par :

a) Le point P toutes les 20 ms et cela de 0 s à 0,200 s.

b) Le rayon CP de la roue aux dates indiquées ci-dessous :

t(ms) : 60 ; 120 ; 160.

rayon : C_3P_3 ; C_6P_6 ; C_8P_8.

Quand on demande aux élèves, dans une première approche, de dessiner l'allure de la trajectoire, beaucoup ont tendance à l'instant t = 0, à tracer cette trajectoire en partant vers la gauche du vecteur unitaire $\vec{\jmath}$ *comme indiqué figure 7, et l'expérience n'est pas de trop, à l'aide du disque en carton déjà utilisé § 2., pour qu'ils se rendent compte que la trajectoire est tangente à* $\vec{\jmath}$ *en* P_0 *et que, si l'on considère les dates précédentes, on a en* P_0 *un «point de rébroussement».*

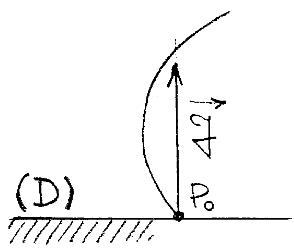


Figure 7

La détermination précise de P toutes les 20 ms par une méthode géométrique simple pose de sérieuses difficultés à certains élèves, et encore une fois l'expérience vient à leur secours en plaçant justement sous le calque (f_2) *la feuille* (f_1) *utilisée au § 4.A.**1/** : amenant successivement le centre C en coïncidence avec les positions qu'il occupe sur* $\mathscr{C}_{C/(\mathscr{R})}$ *aux dates successives, et en tenant compte de la position du rayon* $C_i P_i$ *à ces dates là, l'élève détermine* *alors facilement l'angle formé par le rayon et la verticale descendante passant par C_i*. Soit D_i la projection orthogonale de C_i sur (D). Lorsque le cercle a son centre en C_i, le rayon C_iP_i forme avec C_iD_i l'angle α_i. On a alors d'une manière générale :

$\alpha_i = \widehat{D_i C_i P_i} = i \times 15°$; en particulier :

$t = 60\,\text{ms} = 3\,\theta \Rightarrow i = 3 \Rightarrow \alpha_3 = \widehat{D_3 C_3 P_3} = 3 \times 15° \Rightarrow \alpha_3 = 45°$,

$t = 120\,\text{ms} = 6\,\theta \Rightarrow i = 6 \Rightarrow \alpha_6 = \widehat{D_6 C_6 P_6} = 6 \times 15° \Rightarrow \alpha_6 = 90°$,

$t = 160\,\text{ms} = 8\,\theta \Rightarrow i = 8 \Rightarrow \alpha_8 = \widehat{D_8 C_8 P_8} = 8 \times 15° \Rightarrow \alpha_8 = 120°$.

D'ailleurs toutes les positions peuvent être simplement obtenues à l'aide de la règle et du compas : c'est, en passant, une utilisations très concrète de ces instruments, et une occasion de plus de travailler méticuleusement.

On pourra prononcer le nom de cycloïde.

D - Vecteur-vitesse instantanée de P dans ($\mathscr{R}$) ; $\vec{V}_{P/(\mathscr{R})}$ (Figure 6)

Tracer (en vert) ce vecteur aux dates 60 ms ; 120 ms ; 160 ms.

A titre de renseignements le calcul de la norme de ce vecteur-vitesse selon la relation : $\|\vec{V}_{P_i/(\mathscr{R})}\| = \dfrac{mes\,(P_{i-1}\,P_{i+1})}{2\theta}$, *donne d'après les mesures faites sur le document obtenu, les valeurs ci-après :*

	i	3	6	8
mes $(P_{i-1}\,P_{i+1})$	en mm	38	70,5	87
$\|\vec{V}P_{i/(\mathscr{R})}\|$	en m/s	0,95	1,76	2,18
Tracé	en cm	4,75	8,8	10,9

6. COMPOSITION DES VECTEURS VITESSES $\vec{V}_{C/(\mathscr{R})}$ et $\vec{V}_{P/(r)}$

1/ Construire (en rouge) sur (f_2) en P_3, P_6, P_8, (Figure 6) :

$$\vec{\gamma}_P = \vec{v}_{P/(r)} + \vec{V}_{C/(\mathscr{R})}$$

On est ramené à construire deux losanges et un carré de côtés 62,5 mm.

2/ Comparer : $\vec{\gamma}_P$ et $\vec{V}_{P/(\mathscr{R})}$.

On a une excellente coïncidence en P_3 et P_6 ; par contre en P_8, si la colinéarité est respectée, on note que $\vec{\gamma}_{P_8}$ est plus long de 5 mm environ.

Conclure : *Aux erreurs de mesures et de constructions près* dans le cas où le référentiel d'entraînement (r) est en translation rectiligne par rapport au référentiel absolu ($\mathscr{R}$) on a :

$$\vec{V}_{P/(\mathscr{R})} = \vec{V}_{P/(r)} + \vec{V}_{C/(\mathscr{R})}$$

Nous remercions Monsieur R. MOREAU (I.G.), pour ses remarques et suggestions.