
Bulletin de l'Union des Physiciens

Association des professeurs de Physique et de Chimie

Le théorème de D'Alembert

*Application à la visualisation, par ordinateur,
de la propagation d'ondes*

par D. MAURAS
Lycée Saint-Louis, Paris

On considère la propagation d'ondes transversales le long d'une corde tendue entre deux points fixes ou les vibrations longitudinales d'une colonne d'air dans un tuyau sonore. Le but est de montrer que les grandeurs qui se propagent peuvent s'exprimer simplement en fonction des conditions initiales et limites et d'utiliser la méthode pour visualiser le phénomène sur la console d'un ordinateur.

On termine en comparant à deux autres méthodes, l'une utilisant la décomposition en série de Fourier, l'autre appelée méthode aux différences finies.

1. ÉQUATION DE PROPAGATION DES ONDES

1.1. Propagation le long d'une corde

Supposons une corde tendue entre deux points fixes A et B distants de L ; l'axe x est défini par la position de repos ; on l'écarte de sa

position initiale, en lui communiquant une forme initiale et en lui appliquant une loi de distribution de vitesses initiales déterminées. Au repos la corde définit l'axe $x'x$, A en $x = 0$ et B en $x = L$. Nous faisons les approximations usuelles : l'angle d'inclinaison $\theta(x, t)$ de la corde sur l'axe $x'x$ reste faible, le poids est négligeable, mais pas l'inertie ; enfin on suppose qu'un point de l'axe se déplace parallèlement à l'axe $y'y$ perpendiculaire à $x'x$; son ordonnée est notée $y(x, t)$ à l'abscisse x et à la date t . La vitesse du point de la corde $v(x, t)$ est parallèle à l'axe $y'y$. La masse linéique de la corde au repos est notée μ . Un élément de corde est soumis à ses deux extrémités aux tensions $\vec{T}(x, t)$ et $\vec{T}(x + dx, t)$ tangentes à la corde ; l'application du théorème de la quantité de mouvement donne :

$$\vec{T}(x + dx, t) - \vec{T}(x, t) = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y$$

En confondant le cosinus avec l'unité, la projection sur l'axe $x'x$ donne :

$$T(x, t) - T(x + dx, t) \approx 0 \quad (1)$$

et en confondant le sinus et l'angle, la projection sur $y'y$ donne :

$$T(x + dx, t) \theta(x + dx, t) - T(x, t) \theta(x, t) \approx \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (2)$$

D'après (1), $T(x, t)$ ne dépend que de t ; nous supposons que $T(t)$ varie avec t d'une façon négligeable ; on note $T(x, t) = T$. D'après (2), on obtient :

$$T \frac{\partial \theta}{\partial x} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (3)$$

L'angle d'inclinaison de la corde s'exprime en fonction de $y(x, t)$:

$$\theta(x, t) \approx \tan \theta(x, t) = \frac{\partial y}{\partial x} \quad (4)$$

L'équation de propagation de $y(x, t)$ s'écrit :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad (5)$$

La grandeur $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ a les dimensions d'une vitesse et représente la célérité des ondes le long de la corde. La solution générale est somme de deux ondes progressives et s'écrit :

$$y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct) \quad (6)$$

Les équations de propagation de $\theta(x, t)$ et de la vitesse $v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t}$ sont de la même forme que celle relative à $y(x, t)$ et s'obtiennent à partir des deux formules conjuguées :

$$T \frac{\partial \theta}{\partial x} = \mu \frac{\partial v}{\partial t} \quad (7)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad (8)$$

Elles s'écrivent :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (10)$$

La solution générale de (9) est :

$$q(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct) \quad (11)$$

avec, d'après (4) :

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx}, \quad g(x) = \frac{dG(x)}{dx}, \quad (x) \in [0, L]$$

ou mieux :

$$F(x) = \int_{u=0}^{u=x} f(u) du, \quad G(x) = \int_{u=0}^{u=x} g(u) du \quad (12)$$

car, le point A étant fixe, on peut toujours imposer $F(0) = G(0) = 0$. On peut en déduire l'expression de $v(x, t)$:

$$v(x, t) = \frac{\partial y}{\partial t} = -c \frac{dF}{d(x - ct)} + c \frac{dG}{d(x + ct)}$$

$$v(x, t) = c [g(x + ct) - f(x - ct)] \quad (13)$$

Pour déterminer les fonctions f et g , il faut faire intervenir les conditions initiales et limites. Cette étude sera effectuée dans les paragraphes 2. et 3. Auparavant donnons un autre exemple, la propagation d'ondes longitudinales le long d'une colonne gazeuse.

1.2. Propagation le long d'un tuyau

On considère un tuyau cylindrique d'axe $x'x$ (vecteur unitaire $\vec{e}_x$) dans lequel est placé un gaz initialement au repos à la pression P_0 et de masse volumique μ_0 le long duquel se propagent des ondes de pression produites par un piston ; la vitesse $\vec{v}(x, t) = v(x, t) \vec{e}_x$ d'une particule, la masse volumique $\mu(x, t)$ et la pression du gaz $p(x, t)$ sont des fonctions de l'abscisse x et du temps t seuls. L'écoulement du gaz est régi par l'équation locale de conservation de la masse d'une part :

$$\vec{\nabla} \cdot (\mu \vec{v}) + \frac{\partial \mu}{\partial t} = 0 \quad (14)$$

et par l'équation d'Euler d'autre part, traduisant le théorème de la quantité de mouvement appliqué à une particule (au sens de la mécanique des fluides) du gaz ; en négligeant l'action de la pesanteur :

$$\mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = - \vec{\nabla} p \quad (15)$$

On a trois inconnues μ , p et v pour deux équations : il est nécessaire d'introduire une équation thermodynamique :

$$p = p(\mu)$$

Pour linéariser, posons : $\mu = \mu_0 + \mu'$ (x, t) et $p = p_0 + p'$ (x, t) ; μ' (x, t) et p' (x, t) représentent respectivement l'excès de masse volumique et la surpression ; par hypothèse : $|\mu'| \ll \mu_0$ et $|p'| \ll p_0$, ce qui donne :

$$p = p(\mu_0 + \mu') \quad \text{c'est-à-dire} : p + p_0 = p(\mu_0) + \mu' \left(\frac{dp}{d\mu} \right)_{\mu = \mu_0}$$

$$\text{On pose } c^2 = \left(\frac{dp}{d\mu} \right)_{\mu = \mu_0} \Rightarrow$$

$$p' = \mu' c^2 \quad (16)$$

On suppose également $v \ll c$; dans ces conditions le terme quadratique du premier membre de l'équation (15) est négligeable si on se contente des termes du premier ordre ; (14) et (15) s'écrivent après élimination de μ' :

$$\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{\mu_0 c^2} \frac{\partial p'}{\partial t} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial p'}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

En éliminant une variable, on obtient les équations de propagation :

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = 0 \quad (20)$$

La grandeur c peut donc s'interpréter comme la célérité du son dans le gaz. Dans l'hypothèse adiabatique réversible (fluide parfait en écoulement laminaire), la mieux vérifiée expérimentalement, $\frac{p}{\mu^\gamma} = \text{cste}$ avec

$\gamma = \frac{c_p}{c_v}$, rapport des chaleurs massiques à pression et volume constants

respectivement, d'où $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$.

Les variables p' et v sont les analogues des variables θ et v du paragraphe précédent ; les solutions peuvent s'exprimer de la même façon.

1.3. Grandeurs conjuguées et duales

Dans de nombreux problèmes de propagation, il est possible de mettre en évidence deux grandeurs conjuguées, au sens thermodynamique du terme : l'une est intensive et l'autre est le débit de la grandeur extensive conjuguée ; il en est ainsi pour le couple formé par la composante $T\theta$ de la tension du fil et la vitesse v (débit d'amplitude) d'un point du fil dans le premier exemple et pour le couple surpression p' et débit volumique vS (S section du tube) dans le second exemple ; dans une ligne bifilaire ce couple est formé du courant électrique (débit de charge) dans l'âme et

l'armature et de leur différence de potentiel (à une abscisse donnée) ; il s'agit là d'un guide précieux pour la définition de l'impédance complexe à une abscisse donnée, précisément égale (par analogie avec le cas de la ligne bifilaire) au rapport de la grandeur intensive au débit de la grandeur extensive conjuguée. Remarquons que le débit de la grandeur extensive et la grandeur intensive sont des grandeurs duales.

Les équations telles que (7) et (8) ou (17) et (18) forment des couples d'équations conjuguées : ce sont elles qui régissent les grandeurs conjuguées. Il est souvent commode de les chercher en premier dans ce type de problème.

2. SOLUTION EN FONCTION DES CONDITIONS AUX LIMITES

Reprenons l'exemple de la corde vibrante. Elle est fixée à ses deux extrémités : $v(0, t) = 0 \Rightarrow g(ct) = f(-ct)$ et $v(L, t) = 0 \Rightarrow g(L + ct) = f(L - ct) \forall t$; en remplaçant ct par $ct - L$ dans la 2^{ème} égalité et ct par $ct - 2L$ dans la 1^{ère}, on a $g(ct) = f(2L - ct) = g(ct - 2L) \forall t$.

$f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions $2L$ périodiques vérifiant :

$$\forall x \text{ réel, } g(x) = f(-x) \text{ et } g(-x) = f(x) \quad (21)$$

Il en est de même pour $F(x)$ et $G(x)$ qui vérifient :

$$\forall x \text{ réel, } G(x) = -F(-x) \text{ et } G(-x) = -F(x) \quad (22)$$

Remarquons que la seconde égalité de (21) ou (22) découle de la première.

3. INTERVENTION DES CONDITIONS INITIALES

3.1. Méthode

Toujours dans le cas de la corde vibrante, on se donne $y(x, 0)$ ou $\theta(x, 0)$ et $v(x, 0) \forall x \in [0, L]$; on a :

$$y(x, 0) = Y(x) \Rightarrow \theta(x, 0) = \frac{dY}{dx} \Rightarrow f(x) + g(x) = \frac{dY}{dx}$$

$$v(x, 0) = V(x) \Rightarrow g(x) - f(x) = \frac{V(x)}{c}$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{dY(x)}{dx} - \frac{V(x)}{c} \right)$$

$$g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{dY(x)}{dx} + \frac{V(x)}{c} \right) \quad \forall x \in [0, L]$$

Le théorème de d'Alembert consiste à écrire d'après (11) et (13) :

$$v(x, t) = \frac{c}{2} \left\{ \left[\frac{dY(x+ct)}{dx} + \frac{V(x+ct)}{c} \right] - \left[\frac{dY(x-ct)}{dx} - \frac{V(x-ct)}{c} \right] \right\}$$

$$\theta(x, t) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{dY(x+ct)}{dx} + \frac{V(x+ct)}{c} \right] - \left[\frac{dY(x-ct)}{dx} - \frac{V(x-ct)}{c} \right] \right\}$$

Il montre comment la solution générale s'exprime en fonction des conditions initiales et de quelle façon sont construites les deux ondes progressives de célérités opposées qui se propagent.

D'après (21) $g(x) = f(-x) \Rightarrow f(x)$ est connue sur l'intervalle $[-L, +L]$ et du fait de la périodicité sur $]-\infty, +\infty[$. En particulier si $\frac{dY}{dx} = 0$, on a : $f(x) = -g(x) = -f(-x) \Rightarrow f(x)$ est une fonction impaire de x , ainsi que $g(x)$. Au contraire, si $V = 0$, on a $f(x) = g(x) = f(-x)$ donc f est paire ainsi que g .

On peut construire graphiquement $f(x)$ et $g(x)$ sur $]-\infty, +\infty[$ à partir de la donnée de $V(x)$ et $Y(x)$ sur l'intervalle $[0, L]$. D'après l'équation (11) $\theta(x, t)$ s'obtient à la date t , en faisant glisser $f(x)$ de ct en sens positif et $g(x)$ de ct en sens négatif puis en ajoutant les ordonnées correspondantes des deux courbes obtenues, en se restreignant à l'intervalle $[0, L]$. D'après (13) pour $v(x, t)$, on retranche au lieu d'ajouter ; au bout d'une durée $T = \frac{2L}{c}$ de glissement, les fonctions $f(x)$ et $g(x)$ reprennent leur aspect initial : la périodicité temporelle du mouvement de la corde est T . On se contente de faire les schémas pour certaines dates régulièrement espacées :

par exemple : $t_n = n \frac{T}{8}$, $n \in \{0, \dots, 7\}$.

Si on désire avoir $y(x, t)$, on exprime $F(x)$ et $G(x)$ sous la forme suivante sur l'intervalle $[0, L]$ grâce à (12) :

$$F(x) = \frac{1}{2} \left[Y(x) - \int_{u=0}^{u=x} \frac{V(u)}{c} du \right]$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \left[Y(x) + \int_{u=0}^{u=x} \frac{V(u)}{c} du \right]$$

Puis on utilise la propriété : $-F(x) = G(-x)$ et $-G(x) = F(-x)$ et la périodicité ; $G(x)$ et $F(x)$ sont des fonctions $2L$ périodiques ; si $V(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, L]$, les expressions de $F(x)$ et $G(x)$ sont particulièrement simples :

$$F(x) = G(x) = \frac{1}{2} Y(x) \quad x \in [0, L]$$

Pour obtenir $y(x, t)$, on opère comme on l'a fait à partir de $f(x)$ et $g(x)$ pour obtenir $\theta(x, t)$ et $v(x, t)$.

Dans les deux paragraphes qui suivent, nous appliquons la méthode à une corde pincée puis à une corde percutée. Il s'agit essentiellement d'obtenir $G(x)$ et $F(x)$.

3.2. Exemple d'une corde pincée

La forme initiale de la corde est définie par la figure 1.

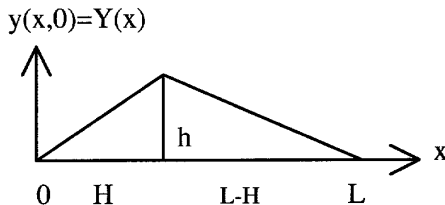


Figure 1

Dans ce cas $V(x) = 0$; $f(x)$ et $g(x)$ sont des fonctions paires de x mais $G(x)$ et $F(x)$, intégrales de fonctions paires sont impaires en x ; on a, sur l'intervalle $[0, L]$:

$$G(x) = F(x) = \frac{Y(x)}{2}$$

La figure 2 fournit $Y(x)$ en pointillés sur l'intervalle $[0, L]$ et $G(x) = F(x)$ sur l'intervalle $]-\infty, +\infty[$.

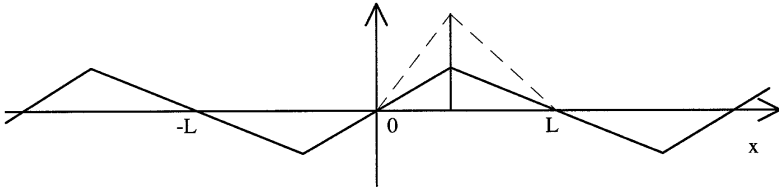


Figure 2 : $G(x) = F(x)$ en traits pleins, $Y(x)$ en pointillés.

Il n'est pas question de donner les schémas de ces courbes à différents instants, faute de place, mais il suffit d'imaginer le glissement de $F(x)$ dans un sens et de $G(x)$ dans l'autre à la même vitesse et d'additionner, à un instant donné, les ordonnées correspondant à une même abscisse, dans l'intervalle, $[0, L]$, pour obtenir la forme de la corde à cet instant. C'est précisément le genre de travail dont s'acquitte parfaitement l'ordinateur à condition de le programmer adéquatement.

3.3. Exemple d'une corde percutée

La forme initiale de la répartition des vitesses sur la corde est définie par la figure 3, dans ce cas $Y(x) = 0$; $f(x) = -g(x) = \frac{-1}{2c} V(x)$ sont des

fonctions impaires de x ; $F(x) = -G(x) = -\frac{1}{2c} \int_{x=0}^{x=u} V(u) du$ sont des fonctions paires de x .

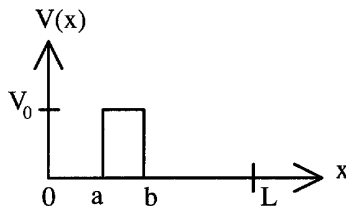


Figure 3

$$G(x) = 0 \text{ si } x \in [0, a] ; G(x) = \frac{V_0}{2c}(x - a) \text{ si } x \in [a, b] ;$$

$$G(x) = \frac{V_0}{2c}(b - a) \text{ si } x \in [b, L]. \text{ La figure 4 donne le tracé de}$$

$G(x) = -F(x)$ fonctions paires $2L$ périodiques.

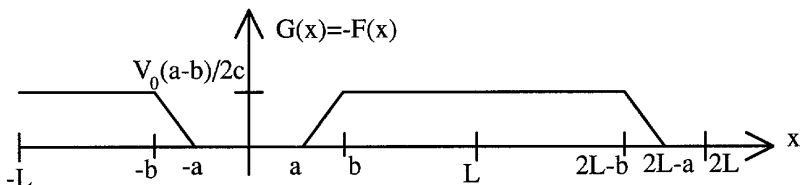


Figure 4

Il suffit d'imaginer que $G(x)$ se translate vers la gauche, à la vitesse c , et que $F(x)$, obtenue en prenant le symétrique de $G(x)$ par rapport à l'axe des abscisses, se translate vers la droite à la même vitesse ; à la date t , il faut ajouter les ordonnées pour chaque abscisse x comprise entre O et L . L'ordinateur permet de faire cela efficacement.

4. ALGORITHME DE RÉOLUTION UTILISANT LE THÉORÈME DE D'ALEMBERT

L'algorithme est fourni pour l'exemple de la corde percutée; les commentaires sont écrits en italique :

Section déclaration

- Constante :

c de type entier ; *célérité en pixels par unité de temps.*

- Variables :

$L, L2$ de type entier ; *longueur et demi-longueur de la corde*

TT de type entier ; *période $2L/c$*

$V0$ de type entier ; *hauteur de la percussion*

a, b de type entier ; *largeur de la percussion*

yc de type entier ; *demi hauteur de l'écran en pixels*

Fonction G (x : entier) : entier ;

$G \leftarrow 0$; initialisation

si $x \geq 0$ alors $x \leftarrow x \bmod L2$ sinon $x \leftarrow (x \bmod L2) + L2$; *pour rendre G périodique*

si $x \geq a$ et $x \geq b$ alors $G \leftarrow V0 * (x - a) / 2c$;

si $x < b$ et $x \leq 2L - b$ alors $G \leftarrow V0 * (x + a - 2L) / 2c$;

Fin fonction G ;

Procédure Trace ;

Variables locales : x, t de type entier ;

Faire couleur de fond noire ;

Répéter

Sonnerie ; pour marquer le début d'une période

De $t = 0$ à $TT - 1$ faire

De $x = 1$ à L faire : placer un pixel blanc en

$x - 1, yc - G(x - ct) + G(x - ct)$; *tracé à t*

De $x = 1$ à L faire : placer un pixel noir en

$x - 1, yc - G(x - ct) + G(x - ct)$; *effacement à $t + \epsilon$*

Si touche pressée : exit procédure ; *ces 3 instructions définissent l'unité de temps*

Jusqu'à l'infini ; *Until false en Pascal*

Fin Procédure Trace

Programme principal ;

Initialisation graphique ;

$L \leftarrow$ largeur écran en pixels ;

$L2 \leftarrow 2 * L$;

$TT \leftarrow L2 \text{ div } c$; *période temporelle*

$a \leftarrow$ fraction de L ;

$b \leftarrow$ fraction de L ; $b > a$

$yc \leftarrow$ demi hauteur écran en pixels ;

appel de trace ;

Fin programme principal.

Remarque : dans la procédure Trace, ce sont les trois instructions de la boucle : «De $t = 0$ à $TT - 1$ faire...» qui définissent l'unité de temps ; on essaye une valeur de la célérité c ; si le défilement est trop rapide, on change sa valeur.

5. UTILISATION DES SÉRIES DE FOURIER

On s'intéresse toujours au cas de la corde percutée ; la fonction $G(x) = -F(x)$ de la figure 4 est paire en x et de période $2L$; elle possède la propriété de continuité nécessaire au développement en série de Fourier, telle que la série converge vers la fonction $G(x)$.

On sait que :

$$G(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right) + b_n \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) \right]$$

avec :

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{x=-L}^{x=+L} G(x) \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx \quad n \geq 0$$

et :

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{x=-L}^{x=+L} G(x) \sin\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx \quad n > 0$$

La fonction $G(x)$ est paire et la fonction sinus est impaire en x ; le produit des deux est impair $\Rightarrow b_n = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots$; le produit de $G(x)$ par $\cos(x)$ est pair en $x \Rightarrow$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_{x=0}^{x=+L} G(x) \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx$$

$$a_n = \frac{2}{L} \left[\int_{x=a}^{x=b} \frac{V_0}{2c} (x-a) \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx + \int_{x=b}^{x=L} \frac{V_0}{2c} (b-a) \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right) dx \right]$$

Le calcul donne :

Si $n > 0$:

$$a_n = \frac{L V_0}{(n \pi)^2 c} \left[\cos\left(\pi n \frac{b}{L}\right) - \cos\left(\pi n \frac{a}{L}\right) \right]$$

Si $n = 0$:

$$a_0 = \frac{V_0}{2Lc} (b-a) [2L - (a+b)]$$

Remarquons que $\frac{a_0}{2}$ représente la valeur moyenne de la fonction $G(x)$; a_0 ne s'obtient pas à partir de l'expression de $a_{n>0}$ car dans le calcul de ces derniers coefficients le terme $(b-a) \frac{V_0}{n\pi c} \sin(\pi n)$ qui s'introduit n'est pas nul pour $n=0$ (forme indéterminée qui se réduit à $(b-a) V_0/c$) alors qu'il l'est pour $n>0$; on peut d'ailleurs calculer géométriquement la valeur moyenne de $G(x)$ sans passer par l'intégration, en évaluant la surface sous la courbe $G(x)$ sur une période. D'où $G(x)$:

$$G(x) = \frac{V_0}{2Lc} (b-a) [2L - (a+b)] + \frac{L V_0}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\pi n \frac{b}{L}\right) - \cos\left(\pi n \frac{a}{L}\right)}{n^2} \cos\left(\pi n \frac{x}{L}\right)$$

et la solution générale obtenue sous forme de série de Fourier à partir de l'expression (6) :

$$y(x, t) = G(x + ct) - G(x - ct)$$

$$y(x, t) = \frac{L V_0}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{n \rightarrow \infty} \frac{\cos\left(\pi n \frac{b}{L}\right) - \cos\left(\pi n \frac{a}{L}\right)}{n^2} \left[\cos\left(\pi n \frac{x+ct}{L}\right) - \cos\left(\pi n \frac{x-ct}{L}\right) \right]$$

Cette méthode est théoriquement intéressante car elle donne l'amplitude des divers harmoniques ; par exemple, si l'on sait enregistrer sous forme de signal électrique l'excitation produite par la percussion, on peut prévoir le résultat d'un filtrage, c'est-à-dire la suppression de certains harmoniques. Mais la méthode se prête difficilement à une mise en œuvre informatique : la série de Fourier converge lentement ; pour obtenir correctement $y(x, t)$ à t donné, il faut calculer de nombreux termes ce qui demande du temps, même à un micro-ordinateur puissant, d'autant plus qu'il y a de nombreuses fonctions trigonométriques à évaluer ; le problème devient difficile à résoudre quand la fonction considérée présente des discontinuités ; considérons une fonction périodique $f(x)$:

$$\text{si } f(a - \varepsilon) \rightarrow A \text{ et } f(a + \varepsilon) \rightarrow B \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0$$

on démontre que la série de Fourier converge vers $\frac{A+B}{2}$ pour $x = a$ (théorème de Dirichlet) ; quand on veut restituer $f(x)$ en sommant sa série de Fourier par une méthode numérique utilisant ou non l'ordinateur, du fait qu'on ne peut considérer qu'un nombre fini de termes de la série, la somme présente des oscillations de haute fréquence au voisinage de $x = a$; c'est le phénomène de Gibbs. Enfin le calcul des coefficients de la série

de Fourier peut-être difficile, voire impossible pour des excitations compliquées de la corde. Pour ces différentes raisons, cette méthode n'est certainement pas bien adaptée à une exploitation par ordinateur.

6. MÉTHODE AUX DIFFÉRENCES FINIES

Elle exige de discrétiser les valeurs de l'amplitude $y(x, t)$ dans le temps et l'espace et permet de remplacer l'équation aux dérivées partielles : $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ par des équations algébriques ou équations aux différences finies.

Soit $\Delta x = \frac{L}{N}$, N nombre d'intervalles spatiaux introduits sur la longueur L et $\Delta t = \frac{t_{\max}}{M}$, M nombre d'intervalles temporels introduits sur la durée $t_{\max}$ d'étude. Soit y_k^p l'amplitude discrète à $t = k\Delta t$ et $x = p\Delta x$; $y_k^p = y(k\Delta t, p\Delta x)$ $p \in \{0 \dots N\}$ $k \in \{0 \dots M\}$ indices respectivement spatial et temporel. L'équation différentielle peut être discrétisée de différentes manières. Les nombreux ouvrages sur le sujet conseillent d'utiliser des formules centrées pour les dérivées partielles secondes de manière à assurer la convergence de l'algorithme; pour une fonction $f(x)$, la dérivée première s'écrit :

$$\frac{df}{dx} = \frac{f[(k+1)\Delta x] - f(k\Delta x)}{\Delta x}$$

et la dérivée seconde :

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{\left(\frac{df}{dx}\right)_{(k+1, k)} - \left(\frac{df}{dx}\right)_{(k, k-1)}}{\Delta x}$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f[(k+1)\Delta x] - 2f(k\Delta x) + f[(k-1)\Delta x]}{(\Delta x)^2}$$

ce qui constitue une formule centrée sur trois points; de même, pour une fonction du temps; dans ces conditions, l'équation différentielle peut s'écrire :

$$\frac{y[k\Delta t, (p+1)\Delta x] - 2y(k\Delta t, p\Delta x) + y[k\Delta t, (p-1)\Delta x]}{(\Delta x)^2}$$

$$-\frac{1}{c^2} \frac{y[(k+1)\Delta t, p\Delta x] - 2y(k\Delta t, p\Delta x) + y[(k-1)\Delta t, p\Delta x]}{(\Delta t)^2} = 0$$

Avec la notation introduite au début :

$$\frac{y_k^{p+1} - 2y_k^p + y_k^{p-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{c^2} \frac{y_{k+1}^p - 2y_k^p + y_{k-1}^p}{(\Delta t)^2} = 0$$

On veut $\forall p = 0, \dots, N$, y_{k+1}^p à partir de y_k^p , y_k^{p-1} , y_k^{p+1} , y_{k-1}^p puisque $k+1$ représente le dernier indice temporel introduit. Soit en

posant : $\sigma = \left(c \frac{\Delta t}{\Delta x} \right)^2$:

$$y_{k+1}^p = 2y_k^p - y_{k-1}^p + \sigma \left(y_k^{p+1} - 2y_k^p + y_k^{p-1} \right)$$

En plus, il faut écrire :

- les conditions aux limites :

$$\text{en } x = 0, p = 0 : y_k^0 = 0 \quad \forall k$$

$$\text{en } x = L, p = N : y_k^N = 0 \quad \forall k$$

- les conditions initiales :

$$\text{à } t = 0 \quad k = 0 : y_0^p = 0 \quad \forall p = 0, \dots, N$$

et si V_0 est la vitesse initiale des points percutés, disons pour $p \in \{u \dots v\}$;

$$u \text{ et } v \in \{0 \dots N\} ; u < v$$

$$y_1^p = 0 \quad \forall p \in \{0 \dots u-1\} \text{ et } p \in \{v+1 \dots N\}$$

$$y_1^p = V_0 \Delta t \quad \forall p \in \{u \dots v\}$$

Cette méthode donne de bons résultats ; cependant il est utile de comparer à la méthode utilisant le théorème de D'Alembert : la méthode aux différences finies utilise nettement plus de place mémoire : il faut trois tableaux à une dimension contenant N réels, chacun sur huit octets, si l'on dispose d'un coprocesseur mathématique 80X87 et qu'on utilise le type double du turbo-pascal 5.0 ou 6.0, le plus avantageux en vitesse d'exécution. Chaque tableau sert à contenir les générations y_{k-1}^p , y_k^p , y_{k+1}^p . D'autre part, la quantité de calculs est très importante : pour obtenir y_{k+1}^p , il faut quatre additions ou soustractions et trois multiplications. Par

contre, la méthode utilisant le théorème de D'Alembert utilise un seul tableau de dimension N , contenant des entiers sur deux octets et nécessite trois additions ou soustractions et deux multiplications sur des entiers du fait que $y(x, t) = F(x - ct) - F(x + ct)$. Un des points avantageux de la méthode aux différences finies est qu'elle s'applique sans une connaissance préalable de la solution sous forme de combinaison linéaires d'ondes progressives. Il reste à montrer qu'elle converge et qu'elle converge vers la solution correcte ; c'est là une autre paire de manches ! Pour conclure disons que la méthode aux différences finies permet de résoudre une quantité considérable de problèmes de physique et chimie et que le lecteur qui s'y attaquera ne perdra certainement pas son temps.