

Corrigé du concours général

Dominique CHARDON
et les membres du Jury

I. ORIGINE DE L'EXISTENCE DE L'INDICE DE RÉFRACTION D'UN MATÉRIAU

A. Modèle d'atome hors équilibre.

1. RFD $m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x \quad \ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

2. a. Solution générale : $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\begin{cases} x(0) = A \cos \varphi = 0 \\ \dot{x}(0) = -A\omega_0 \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

on peut choisir $A = x_0 \quad \varphi = 0 \quad x(t) = x_0 \cos \omega_0 t$.

b.

$$E_p(x_2) - E_p(x_1) = - \int_{x_2}^{x_1} m\omega_0^2 x \, dx = \frac{m\omega_0^2}{2} (x_2^2 - x_1^2)$$

$$E_p = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2$$

en choisissant $E_p = 0$ pour $x = 0$.

c.

$$E = E_p + E_c = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \cos^2 \omega_0 t$$

$$+ \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 \sin^2 \omega_0 t$$

$$E = \frac{1}{2} m\omega_0^2 x_0^2$$

B. Freinage dû au rayonnement

1. A $t = 0$ vitesse nulle $E_c = 0$, $E = E_p = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 = W_0$
2. – L'énergie totale diminue au cours du temps à cause des pertes par rayonnement.
– Mouvement oscillatoire amorti.

$$3. \frac{dW}{dt} = -P_u = -\frac{q^2 \omega^4 x_m^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3} \text{ si le modèle précédent est approximativement valable } W \approx \frac{1}{2} m \omega^2 x_m^2$$

$$\text{donc } \frac{dW}{dt} = -\frac{q^2 \omega^2}{6 \pi \epsilon_0 c^3 m} W \text{ de la forme } \frac{dW}{dt} + \frac{W}{\tau} = 0$$

$$\text{avec } \tau = \frac{6 \pi \epsilon_0 m c^3}{q^2 \omega^2} = W_0 e^{-t/\tau} \text{ avec la CI : } W(0) = W_0$$

$$\tau = \frac{1,60 \cdot 10^{23}}{\omega^2}, \tau \text{ en seconde } \omega \text{ en rad. s}^{-1}$$

$$4. a. m \gamma v \text{ est une force : } m \gamma v \equiv M L T^{-2} \quad v \equiv L T^{-1} \quad \gamma \equiv [T]^{-1}$$

$$b. \quad m \ddot{x} = -m \omega_0^2 x - m \gamma \dot{x} \quad \text{car } \vec{v} = \dot{x} \vec{i} \\ \ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

$$5. a.$$

$$x = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\dot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[-\frac{\gamma}{2} \cos(\Omega t + \varphi) - \Omega \sin(\Omega t + \varphi) \right]$$

$$\ddot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\frac{\gamma^2}{4} \cos(\Omega t + \varphi) - \frac{\Omega \gamma}{2} \sin(\Omega t + \varphi) + \frac{\Omega \gamma}{2} \sin(\Omega t + \varphi) - \Omega^2 \cos(\Omega t + \varphi) \right]$$

$$\ddot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\left(\frac{\gamma^2}{4} - \Omega^2 \right) \cos(\Omega t + \varphi) + \Omega \gamma \sin(\Omega t + \varphi) \right]$$

en reportant dans l'équation différentielle :

$$A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[\left(\frac{\gamma^2}{4} - \Omega^2 \right) \cos(\Omega t + \varphi) + \Omega \gamma \sin(\Omega t + \varphi) - \frac{\gamma^2}{2} \cos(\Omega t + \varphi) - \Omega \gamma \sin(\Omega t + \varphi) + \omega_0^2 \cos(\Omega t + \varphi) \right] = 0$$

$$\text{et finalement } A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos(\Omega t + \varphi) \left[-\frac{\gamma^2}{4} - \Omega^2 + \omega_0^2 \right] = 0$$

$$\text{donc } \boxed{\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}.$$

b. Utilisons les conditions initiales :

$$\begin{cases} x(0) = x_0 = A \cos \varphi \\ \dot{x}(0) = A \left(-\frac{\gamma}{2} \cos \varphi - \Omega \sin \varphi \right) = 0 \end{cases} \quad \boxed{\tan \varphi = -\frac{\gamma}{2\Omega}}$$

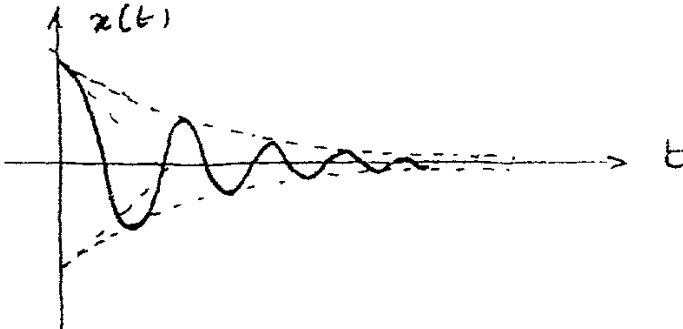
6. a. Si $\omega_0 \gg \gamma$: $\Omega \approx \omega_0$ au deuxième ordre près en $\frac{\gamma}{\omega_0}$

$$\tan \varphi = -\frac{\gamma}{2\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}} \quad \text{donc } \text{tg } \varphi \approx -\frac{\gamma}{2\omega_0}$$

φ est petit, donc $\cos \varphi \approx 1$ au deuxième ordre près

$$x_0 = A \cos \varphi \Rightarrow A \approx x_0 \text{ et } x(t) \approx x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \cos \omega_0 t.$$

b.



c.

$$\text{D'après 5.a. } \dot{x} = A e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[-\frac{\gamma}{2} \cos(\Omega t + \varphi) - \Omega \sin(\Omega t + \varphi) \right]$$

$$\text{avec } \gamma \ll \omega_0 \quad \dot{x} \approx x_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \left[-\frac{\gamma}{2} \cos \omega_0 t - \omega_0 \sin(\omega_0 t) \right]$$

$$\dot{x}(t) \approx -x_0 \omega_0 e^{-\frac{\gamma t}{2}} \sin \omega_0 t$$

$$W = \underbrace{\frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2}_{\text{énergie potentielle}} + \underbrace{\frac{1}{2} m \dot{x}^2}_{\text{énergie cinétique}} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x_0^2 e^{-\gamma t} \left(\cos^2 \omega_0 t + \sin^2 \omega_0 t \right)$$

$$W = \frac{1}{2} m \omega_0 x_0^2 e^{-\gamma t} = W_0 e^{-\gamma t}.$$

$$d. \quad \gamma = \frac{1}{\tau} \quad \gamma \ll \omega_0 \quad \underline{\text{oscillations faiblement amorties}}$$

C. Action d'une onde sinusoïdale sur un matériau

$$1. \quad m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - m\gamma\dot{x} - eE_0 \cos \omega t$$

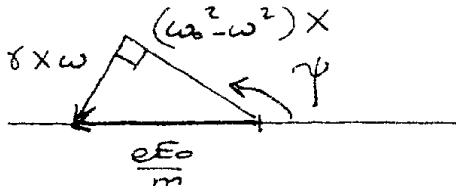
$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$$

$$2. a. \quad x(t) = X \cos(\omega t + \psi), \quad \ddot{x} = -\omega^2 x$$

$$\text{donc : } \ddot{x} + \omega_0^2 x = (\omega_0^2 - \omega^2) X \cos(\omega t + \psi)$$

$$\text{de plus : } \gamma\dot{x} = -\gamma X \omega \sin(\omega t + \psi) = \gamma X \omega \cos\left(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où le schéma pour $\omega > \omega_0$



$$\text{donc : } \left(\frac{e E_0}{m} \right)^2 = X^2 \left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\gamma \omega)^2 \right)$$

$$X(\omega) = \frac{e E_0}{m} g(\omega) \quad \boxed{g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}}}$$

b. $\sin(\pi - \psi) = \sin \psi = \frac{\gamma X \omega}{\frac{e E_0}{m}} \quad \boxed{\sin \psi = \gamma \omega g(\omega)}$

$$\cos(\pi - \psi) = -\cos \psi = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2) X}{\frac{e E_0}{m}} \quad \boxed{\cos \psi = (\omega^2 - \omega_0^2) g(\omega)}$$

3. a. $x(t) = X \cos(\omega t + \psi) = X [\cos \omega t \cos \psi - \sin \omega t \sin \psi]$
 $= \frac{e E_0}{m} \{(\omega^2 - \omega_0^2) g(\omega)^2 \cos \omega t - \gamma \omega g(\omega)^2 \sin \omega t\}$

de la forme : $-E_0 (X'(\omega) \cos \omega t - X''(\omega) \sin \omega t)$

avec : $X'(\omega) = \frac{e}{m} (\omega_0^2 - \omega^2) g(\omega)^2 = \frac{e}{m} \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$

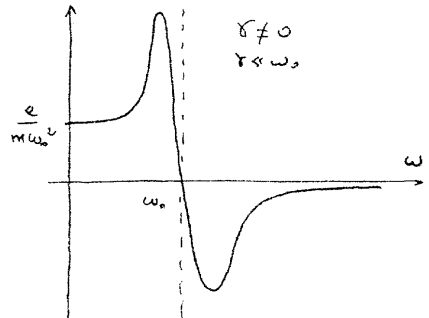
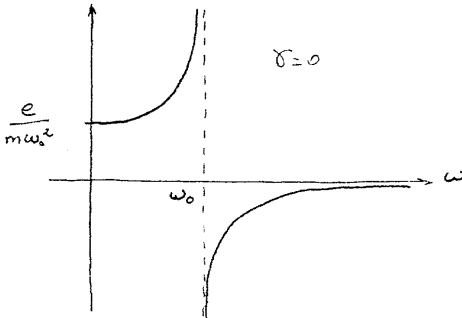
$$X''(\omega) = -\frac{e}{m} \gamma \omega g(\omega)^2 = -\frac{e}{m} \frac{\gamma \omega}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

$$X'(\omega_0) = 0.$$

b. $\gamma = 0$ correspondrait à un oscillateur non amorti.

$$X'(\omega) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

c.



d. Expression approchée de $X'(\omega)$ pour $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$

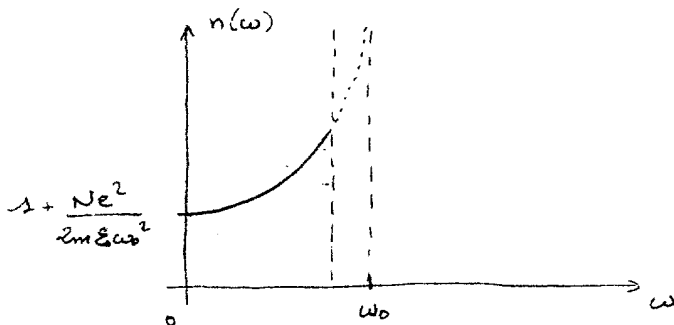
$$\text{Si } |\omega - \omega_0| \gg \gamma \quad X'(\omega) \approx \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

D. Indice de réfraction

1.
$$v = \frac{c}{n}.$$

2. $n(\omega)$: dispersion - déviation de la lumière blanche par un prisme.

3.
$$n(\omega) = 1 + \frac{eN}{2\epsilon_0} X'(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{2m\epsilon_0} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}$$



n augmente quand ω augmente or : $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$

- n diminue quand λ augmente.
- le bleu est plus dévié que le rouge et la déviation augmente avec n . Le modèle décrit ce comportement.

II. L'EFFET KERR OPTIQUE : UN EFFET NON LINÉAIRE

1.
$$m\ddot{x} = -m\omega_0^2 x - mDx^3 - eE_0 \cos \omega t$$

$\ddot{x} + \omega_0^2 x + Dx^3 = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$ en négligeant le freinage de rayonnement.

2. x_1 vérifie $\ddot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = -\frac{e E_0}{m} \cos \omega t \quad D = 0$

$$x = x_1 + x_{nl} \quad \text{donc} \quad \ddot{x}_{nl} + \omega_0^2 x_{nl} + D (x_{nl} + x_1)^3 = 0.$$

3. En supposant : $x_{nl} \ll x_1$

$$\ddot{x}_{nl} + \omega_0^2 x_{nl} = -D x_1^3$$

d'après l'étude du C, pour $\gamma = 0 \quad x_1(t) = -E_0 X'(\omega) \cos \omega t$

avec : $X'(\omega) = \frac{e}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2} \quad \text{donc} \quad x_1^3 = -E_0^3 X'^3 \cos^3 \omega t$

$$\cos^3 \omega t = \frac{\cos 3 \omega t + 3 \cos \omega t}{4} \quad x_1^3 = -\frac{E_0^3 X'^3}{4} [\cos 3 \omega t + 3 \cos \omega t]$$

$$\text{donc : } \ddot{x}_{nl} + \omega_0^2 x_{nl} = \frac{D E_0^3 X'^3}{4} \cos 3 \omega t + \frac{3 D E_0^3 X'^3}{4} \cos \omega t$$

$$B(\omega) = \frac{D E_0^3}{4} [X'(\omega)]^3 \quad A(\omega) = \frac{3 D E_0^3 [X'(\omega)]^3}{4}$$

4. Cherchons $x_{nl_1}(t) = \alpha \cos \omega t \quad x_{nl_3}(t) = \beta \cos 3 \omega t$

$$\ddot{x}_{nl_1} + \omega_0^2 x_{nl_1} = A(\omega) \cos \omega t \quad \ddot{x}_{nl_3} + \omega_0^2 x_{nl_3} = B(\omega) \cos 3 \omega t$$

donc : $\alpha(-\omega^2 + \omega_0^2) = A(\omega) \quad \left(-(3\omega)^2 + \omega_0^2 \right) \beta = B(\omega)$

$x_{nl_1}(t) = \frac{A(\omega)}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t$	$x_{nl_3}(t) = \frac{B(\omega)}{\omega_0^2 - 9\omega^2} \cos 3 \omega t.$
---	---

5. Les atomes peuvent rayonner ω (linéaire) et 3ω (effet non-linéaire).

6.
$$x = x_1 + x_{nl_1} = \left(-E_0 X' + \frac{3 D E_0^3}{\omega_0^2 - \omega^2} X'^3 \right) \cos \omega t$$

$$x = -E_0 X' \left(1 - \frac{3 D E_0^2 X'^2}{4 (\omega_0^2 - \omega^2)} \right) \cos \omega t$$

de la forme $x = -E_0 X'_{\text{kerr}} \cos \omega t$

En comparant à l'étude de I.D. : $n = 1 + \frac{\text{Ne } X'_{\text{kerr}}}{2 \epsilon_0}$

$$n = 1 + \frac{\text{Ne } X'}{2 \epsilon_0} - \frac{\text{Ne}}{2 \epsilon_0} \frac{3}{4} \frac{DX'^3}{\omega_0^2 - \omega^2} E_0^2$$

de la forme $n = n_0 + n_2 I$ si $I \propto E_0^2$ dans le domaine considéré $X' > 0$ donc $n_2 < 0$.

III. EFFETS NON LINÉAIRES DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

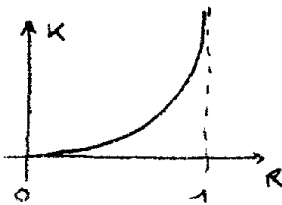
A. Étude de la transmission de la cavité en intensité

1.
$$\Phi = \frac{2\pi}{\lambda} nL .$$

2. Il faut qu'au bout d'un aller-retour l'onde soit en phase avec elle-même donc : $2\Phi = 2p\pi$ $\Phi = p\pi$ p entier

$$2\Phi = \frac{4\pi nL}{\lambda_p} = 2p\pi \quad \lambda_p = \frac{2L}{p} \text{ donnera un maximum de transmission.}$$

3. Pour $R = 0$ $K = 0$
 $R \rightarrow 1$ $K \rightarrow \infty$

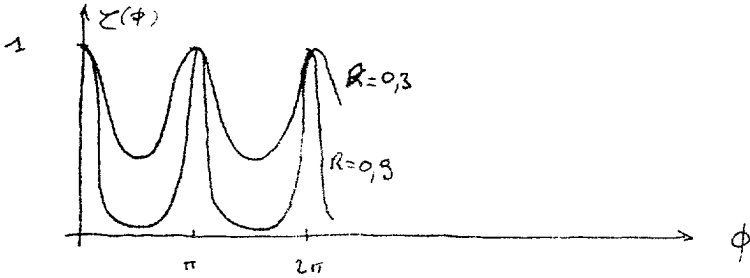


$$\begin{array}{l} R \nearrow \\ (1-R)^2 \searrow \text{ donc } \frac{1}{(1-R)^2} \nearrow \\ K(R) \nearrow \end{array}$$

4. $\sin^2 \Phi$ de période π donc $\tau(\Phi)$ de période π .

$\tau(\Phi)$ maximum quand $1 + K \sin^2 \Phi$ minimum donc pour $\Phi = p\pi$ ce qui confirme A-2.

$$\tau_{\max} = 1 \quad \tau_{\min} = \frac{1}{1 + K}$$



Choix de K :

K doit être grand. Facteur de qualité :

$$Q = \frac{\pi}{\Delta\Phi_{12}} \text{ avec } \frac{1}{1 + K \sin^2 \frac{\Delta\Phi_{12}}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta\Phi_{12} = 2 \text{ Arc sin } \frac{1}{\sqrt{K}} \approx \frac{2}{\sqrt{K}}$$

$$Q = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

B. Étude d'une cavité avec un milieu présentant de l'effet Kerr optique

1. Il existe une onde quasi-stationnaire à l'intérieur de la cavité donc $I(x)$.

$$\text{Pour une tranche } dx \quad d\Phi = n \, dx \cdot \frac{2\pi}{\lambda} = (n_0 + n_2 I(x)) \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \, dx$$

$$\Phi = \int_0^L \frac{2\pi n_0}{\lambda} \, dx + \frac{2\pi}{\lambda} n_2 \int_0^L I(x) \, dx = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} + \frac{2\pi n_2 L}{\lambda} \frac{1}{L} \int_0^L I(x) \, dx$$

$$\text{donc : } \Phi = \Phi_0 + \frac{2\pi n_2 L}{\lambda} I_m = \Phi_0 + \frac{2\pi n_2 L}{\lambda \beta} I_s \quad (I_s = \beta I_m)$$

$$\Phi = \Phi_0 + \gamma I_s \quad \Phi_0 = \frac{2\pi n_0 L}{\lambda} \quad \gamma = \frac{2\pi n_2 L}{\lambda \beta}$$

2. D'après ce qui précède $I_s = \frac{\Phi - \Phi_0}{\gamma} = \tau I_e$ donc : $\tau = \frac{\Phi - \Phi_0}{\gamma I_e}$ droite de
pente : $\frac{1}{\gamma I_e}$ (droite D) ; par ailleurs τ est donné par :
$$\tau(\Phi) = \frac{1}{1 + K \sin^2 \Phi} \text{ (courbe C)}$$

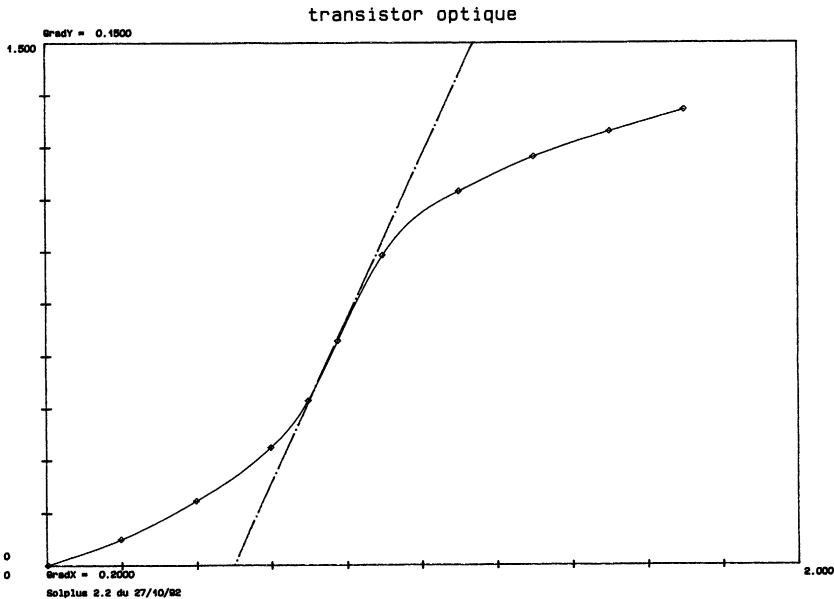
τ donné par l'intersection.

C. Transistor optique et mémoire optique

1. a.

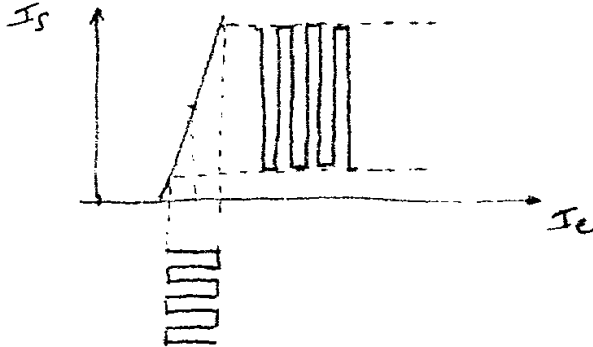
$I_e \text{ (kW.cm}^{-2}\text{)}$	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ	0,425	0,470	0,570	0,665	0,89	0,99	0,97	0,90	0,83	0,77
$I_s \text{ (kW.cm}^{-2}\text{)}$	0,085	0,188	0,342	0,466	0,712	0,891	1,067	1,17	1,245	1,309

b.



2. Graphiquement $I_0 \approx 0,78 \text{ kW.cm}^{-2}$.

3. a. Localement, au voisinage de I_0 , on peut assimiler la courbe à une droite, tangente à cette courbe au point d'inflexion. La pente de cette droite est supérieure à 1, la partie modulée est amplifiée.



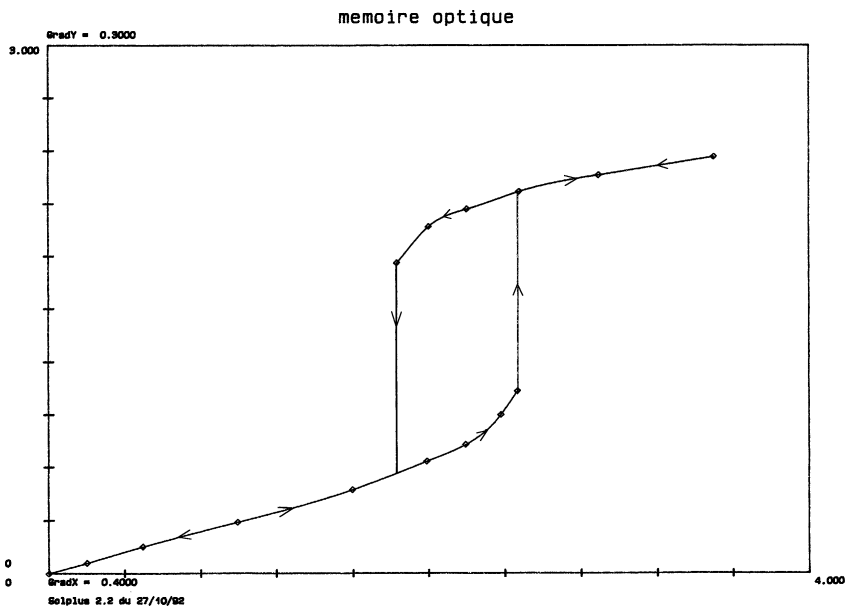
- b. Seule la partie modulée est amplifiée. Le système est passif il ne peut jouer le rôle d'amplificateur.

Mémoire optique

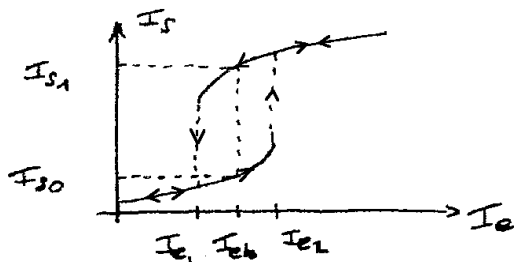
1. $I_{e_1} = 1,83 \text{ kW.cm}^{-2}$ $I_{e_2} = 2,47 \text{ kW.cm}^{-2}$.

2.

$I_e \text{ (kW.cm}^{-2}\text{)}$	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{e_1}	2,0	2,2	I_{e_2}	2,9	3,5
$\tau \text{ (} I_e \text{ croissant)}$	0,31	0,30	0,295	0,30	0,31	0,32	0,33	0,42	0,78	0,675
$\tau \text{ (} I_e \text{ décroissant)}$					0,965	0,985	0,94	0,87		
$I_s \text{ (kW.cm}^{-2}\text{)}$ $I_e \text{ (croissant)}$	0,062	0,15	0,295	0,48	0,566	0,64	0,726	1,037	2,26	2,363
$I_s \text{ (kW.cm}^{-2}\text{)}$ $I_e \text{ (décroissant)}$					1,761	1,97	2,068	2,149		



3. a.



$I_s = I_{s_0}$, pour basculer, il faut franchir I_{e_2} . Au retour le système reste sur la branche du haut en $I_s = I_{s_1}$, pour $I_e = I_{e_b}$ hauteur minimale de l'impulsion :

$$I_{e_2} - I_{e_b} = \frac{I_{e_2} - I_{e_1}}{2}.$$

b. Un signal d'écriture qui a disparu a laissé une trace, la valeur de I_s à I_{s_1} .

Pour effacer (retour à I_{s_0}) il faut diminuer l'intensité du laser de maintien en-dessous de I_{e_1} puis revenir à I_{e_0} .

- c. Temps de commutation, pas de lois des nœuds en optique → intégration traitement parallèle des données.