Sujet du concours général

SESSION DE 1992

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

DURÉE : 5 heures

Matériel fourni au candidat : *3 feuilles de papier millimétré*

OPTIQUE NON LINÉAIRE – BISTABILITÉ OPTIQUE

On se propose dans le problème d'analyser les origines de comportements non linéaires de la matière éclairée par une lumière puissante et d'en décrire l'application à la réalisation de systèmes bistables qui peuvent constituer les éléments essentiels de mémoires optiques.

Dans tout le problème, on néglige le poids des particules devant les autres forces auxquelles elles sont soumises. Tous les mouvements sont étudiés dans un référentiel galiléen.

La partie III peut être traitée sans avoir résolu les parties I et II.

Données numériques :

Constante de Planck........................ $h = 6{,}63 \times 10^{-34}$ J . s ;
Permittivité du vide .... $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ F . m^{-1} ;
Vitesse de la lumière dans le vide........... $c = 3{,}00 \times 10^{8}$ m . s^{-1} ;
Charge du proton .... $e = 1{,}60 \times 10^{-19}$ C ;
Masse de l'électron.......................... $m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg.

I. ORIGINE DE L'EXISTENCE DE L'INDICE DE RÉFRACTION D'UN MATÉRIAU

A. Modèle d'atome hors équilibre.

Pour interpréter les interactions de la lumière avec les atomes dans la matière, nous adopterons un modèle approché dit modèle de l'électron élastiquement lié qui permet de dégager les principales propriétés nécessaires à la suite de l'étude.

Dans le cadre de ce modèle, on considère le mouvement sur un axe Ox d'origine O d'un seul électron atomique, assimilé à un point matériel P de charge $-e$, de masse m, d'abscisse x. En absence de champ électrique, et lorsqu'on l'écarte de sa position d'équilibre, ce point est soumis à l'unique force :

$$\vec{F} = -m\,\omega_0^2\,x\,\vec{i}.$$

$\vec{i}$ désigne un vecteur unitaire de l'axe Ox et ω_0 est une constante dont on précisera l'unité.

1. Établir l'équation différentielle du mouvement de P.

2. *a.* A l'instant $t = 0$, le point P est écarté de sa position d'équilibre d'une quantité x_0 et abandonné sans vitesse initiale. Déterminer l'expression de l'abscisse x de P en fonction du temps.

   b. Quelle est l'énergie potentielle du point P à l'abscisse x ?

   c. Exprimer son énergie totale en fonction de m, x_0 et ω_0.

B. Freinage dû au rayonnement.

On admettra qu'une charge ponctuelle q animée d'un mouvement rectiligne sinusoïdal de pulsation ω, d'amplitude x_m, émet de la lumière de pulsation ω. On peut alors démontrer que la puissance perdue à cause de ce rayonnement est :

$$P_u = \frac{q^2\,\omega^4\,x_m^2}{12\pi\,\varepsilon_0\,c^3} \quad \text{où c est la vitesse de la lumière dans le vide.}$$

À l'instant $t = 0$, le point P est à nouveau écarté de sa position d'équilibre d'une quantité x_0 et abandonné sans vitesse initiale.

1. Quelle est l'énergie W_0 de l'oscillateur à $t = 0$?

2. Comment évolue l'énergie de l'oscillateur au cours du temps ? Décrire qualitativement le mouvement.

3. On pourra considérer qu'à chaque instant, l'oscillateur est assimilable à un oscillateur quasi sinusoïdal et que l'expression de l'énergie W établie à la question I.A.2.*c.* est encore valable. Démontrer que l'énergie W du point P est de la forme :

$$W = W_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

On exprimera τ en fonction de e, m, c, ω_0 et ε_0. Faire l'application numérique.

4. On souhaite démontrer que ce rayonnement peut être pris en compte en ajoutant à la force de rappel une force de freinage dont l'expression est :

$\vec{F}_r = -\,m\gamma\,\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse du point P et γ une grandeur positive.

a. En quelle unité s'exprime γ ?

b. Écrire la nouvelle équation différentielle du mouvement.

5. La solution est de la forme : $x(t) = A\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\cos(\Omega t + \varphi)$.

a. Établir la relation qui existe entre Ω, ω_0, et γ.

b. Calculer $\tan\varphi$ en fonction de γ et Ω.

6. On supposera dans toute la suite que $\omega_0 \gg \gamma$.

a. Montrer que l'abscisse $x(t)$ est approximativement donnée par : $x(t) \approx x_0\exp\left(-\frac{\gamma t}{2}\right)\cos(\omega_0 t)$.

b. Représenter l'allure de $x(t)$.

c. Calculer dans ce cas l'énergie totale de l'oscillateur en fonction du temps.

d. Comment doit-on choisir γ pour que ce résultat coïncide avec celui de la question I.B.3. obtenu par un bilan énergétique ? Interpréter physiquement l'approximation $\omega_0 \gg \gamma$.

C. **Action d'une onde sinusoïdale sur un matériau.**

On suppose maintenant que le point P est soumis à la force de rappel et à la force de freinage introduites précédemment. Dans la région de l'espace où se déplace P, il existe un champ électrique sinusoïdal parallèle à l'axe Ox dont l'expression est :

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\,\vec{i}.$$

1. Écrire l'équation différentielle qui régit le déplacement $x(t)$.

2. On étudie le régime sinusoïdal forcé ; la solution est notée $x(t) = X \cos(\omega t + \psi)$.

   a. En utilisant la construction de Fresnel, montrer que l'amplitude X peut se mettre sous la forme :

   $$X(\omega) = \frac{e\,E_0}{m}\, g(\omega) \quad \text{où } g(\omega) \text{ est une fonction que l'on précisera.}$$

   b. Exprimer $\sin\psi$ et $\cos\psi$ en fonction de ω, ω_0, γ et $g(\omega)$.

3. On note $x(t)$ sous la forme : $x(t) = -E_0\,[X'(\omega)\cos(\omega t) - X''(\omega)\sin(\omega t)]$.

   a. Préciser les fonctions $X'(\omega)$ et $X''(\omega)$. Que vaut $X'(\omega_0)$?

   b. Représenter $X'(\omega)$ dans le cas limite $\gamma = 0$. À quelle situation physique ce cas correspondrait-il ?

   c. En déduire l'allure de $X'(\omega)$ quand $\gamma \neq 0$.

   d. Donner une expression approchée de $X'(\omega)$ quand $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$.

D. **Indice de réfraction.**

1. À l'échelle macroscopique, la lumière ne se propage pas dans un matériau à la même vitesse que dans le vide. Si on désigne par n l'indice de réfraction du matériau, quelle est la vitesse de la lumière dans celui-ci ?

2. Un matériau contenant N atomes par unité de volume, est éclairé par une onde lumineuse de longueur d'onde dans le vide λ, de pulsation ω. On admettra que dans cette situation, un seul électron par atome est concerné par les échanges d'énergie avec l'onde lumineuse. Le modèle développé en I.A., I.B., I.C. est alors applicable. L'onde lumineuse peut être décrite par la propagation d'un champ électrique et d'un champ magnétique sinusoïdaux de pulsation $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$. À un endroit donné, un atome est donc soumis à un champ électrique de la forme $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t)\,\vec{i}$ et rayonne à son tour de la lumière de pulsation ω (voir I.B.). L'existence de l'indice n est attribuée aux diffusions successives de l'onde lumineuse par les atomes ou les molécules du milieu.

   On peut alors démontrer que pour un milieu de faible densité électronique N, et pour des pulsations telles que $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$, $n(\omega)$ est donné par la relation :

   $$n(\omega) = 1 + \frac{e\,N\,X'(\omega)}{2\,\varepsilon_0} \quad \text{où } X'(\omega) \text{ a été calculée en I.C.3.}d.$$

   n dépend donc de la longueur d'onde de la lumière. Comment s'appelle ce phénomène ? Décrire brièvement une expérience qui met cela en évidence.

3. Tracer l'allure de n en fonction de ω pour $\omega < \omega_0$ et $|\omega - \omega_0| \gg \gamma$.

4. Comment varie n avec la longueur d'onde dans le domaine considéré ? Cela vous paraît-il compatible avec l'expérience ?

II. L'EFFET KERR OPTIQUE : UN EFFET NON LINÉAIRE

Le modèle d'une force de rappel linéaire (I.A.) est correct tant que les déplacements ne sont pas trop importants, c'est-à-dire que les champs électriques appliqués aux atomes ne sont pas trop forts. On peut aujourd'hui sortir de ces limites avec des sources laser pour entrer dans le domaine de l'optique non linéaire. La force de rappel n'est plus proportionnelle au déplacement. Pour un matériau isotrope,

$$\vec{F} = -(m\,\omega_0^2\,x + m\,D\,x^3)\,\vec{i}$$

où D est une constante caractéristique du matériau et de l'électron mis en jeu. ***Dans la suite, on supposera que*** $\omega < \omega_0$ ***et que*** $|\omega - \omega_0|$ ***est suffisamment grand devant*** γ ***pour que l'on puisse négliger le terme de freinage dû au rayonnement dans l'équation du mouvement.***

1. Écrire alors l'équation du mouvement du point P soumis au champ électrique de la question I.C.

2. Le déplacement $x(t)$ est décomposé en deux termes :

$$x(t) = x_\ell(t) + x_{n\ell}(t).$$

   $x_\ell(t)$ représente la solution pour $D = 0$, c'est-à-dire la solution obtenue I.C.2. (approximation d'un milieu linéaire). $x_{n\ell}(t)$ représente une perturbation due au comportement non linéaire du milieu. Écrire l'équation différentielle qui relie $x_\ell(t)$, $x_{n\ell}(t)$, et leurs dérivées.

3. Cette équation ne peut être résolue analytiquement de façon exacte. Montrer qu'en supposant $|x_\ell(t)| \gg |x_{n\ell}(t)|$ la perturbation non linéaire vérifie l'équation :

$$\ddot{x}_{n\ell} + \omega_0^2\,x_{n\ell} = A(\omega)\cos\omega t + B(\omega)\cos 3\omega t$$

   où les deux points désignent la dérivée seconde par rapport au temps. Préciser les fonctions $A(\omega)$ et $B(\omega)$. On rappelle la formule $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$.

4. La solution de l'équation approchée précédente ***en régime sinusoïdal forcé*** est la somme des deux solutions $x_{n\ell_1}(t)$ et $x_{n\ell_3}(t)$ obtenues respectivement avec le ***premier terme*** du second membre ***seul*** et le ***deuxième terme*** du second membre ***seul***. Calculer $x_{n\ell_1}(t)$ et $x_{n\ell_3}(t)$.

5. En se rappelant qu'une charge oscillante rayonne de l'énergie, cf. I.B., quelles sont les longueurs d'onde susceptibles d'être rayonnées par les atomes en présence d'effets non linéaires ?

6. On supposera dans la suite que les conditions expérimentales sont telles que seule la contribution $x_{n\ell_1}(t)$ est à prendre en compte. L'éclairement du matériau (puissance par unité de surface, unité $kW.m^{-2}$) appelé intensité dans la suite par abus de langage, et noté I, est proportionnel à E_0^2. Montrer que pour un matériau non linéaire, l'indice de réfraction dépend de I et peut se mettre sous la forme :

$$n = n_0 + n_2\,I \quad \text{(effet Kerr optique)}$$

   où n_0 et n_2 dépendent de ω. Quel est le signe de n_2 dans le domaine de pulsations considéré ?

III. EFFETS NON LINÉAIRES DANS UNE CAVITÉ OPTIQUE

A. Étude de la transmission de la cavité en intensité.

Une cavité optique est formée de deux miroirs partiellement réfléchissants dont les coefficients de réflexion et de transmission sont respectivement r' et t'. Cela signifie qu'une onde incidente d'amplitude A donne naissance à une onde réfléchie d'amplitude $r'.A$ et à une onde transmise d'amplitude $t'.A$. De plus $|r'| < 1$ et $|t'| < 1$.

On envoie sur cette cavité une onde lumineuse de longueur d'onde dans le vide λ et de pulsation ω sous incidence normale. Les deux miroirs donnent naissance à une multitude d'ondes réfléchies et d'ondes transmises (voir fig. 1 page suivante). La vibration incidente (en $x = 0$) est notée : $f(t) = a\cos\omega t$. On appelle intensité d'entrée la quantité $I_e = a^2$.

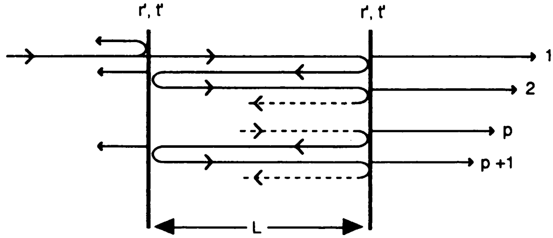


Figure 1

1. Le retard de phase dû à la propagation sur une longueur L dans le milieu d'indice n est noté ϕ. Exprimer ϕ en fonction de λ, n, L, puis en fonction de ω, n, L et c.

2. Donner une condition sur ϕ pour que les ondes successivement transmises par la cavité interfèrent constructivement. Pour une longueur L fixée, quelles sont les longueurs d'onde qui donneront un maximum de transmission ?

3. Les coefficients de réflexion et de transmission pour l'intensité sont respectivement $R = r'^2$ et $T = t'^2$. Les miroirs sont supposés sans pertes de sorte que $R + T = 1$. Le calcul précis de l'amplitude résultante A_s en sortie de la cavité ($x = L$), et de l'intensité associée $I_s = A_s^2$ donne alors :

$$\tau(\phi) = \frac{I_s}{I_e} = \frac{1}{1 + K\sin^2\phi} \qquad \text{avec} \quad K = \frac{4R}{(1-R)^2}.$$

Comment varie K si R varie de 0 à 1 ? Interpréter pour $R = 0$ et $R = 1$.

4. Quelle est la période de $\tau(\phi)$? Montrer que ce résultat confirme la réponse à la question III.A.2. Préciser la valeur des maxima et des minima de $\tau(\phi)$ sans faire de calcul de dérivée. Tracer l'allure de $\tau(\phi)$ pour $R = 0{,}3$ et pour $R = 0{,}9$. Comment choisir K pour que la cavité agisse en transmission comme un filtre de fréquence ? Dans ces conditions, définir et calculer en fonction de R le facteur de qualité Q de la cavité.

B. Étude d'une cavité avec un milieu présentant de l'effet Kerr optique.

La cavité est maintenant remplie d'un milieu présentant de l'effet Kerr optique (voir partie II) c'est-à-dire un milieu dont l'indice dépend de l'intensité I de la lumière qui s'y propage sous la forme : $n = n_0 + n_2 I$.

1. Pourquoi l'intensité de la lumière varie-t-elle d'un point à un autre à l'intérieur de la cavité ? On définit l'intensité moyenne dans la cavité par :

$$I_m = \frac{1}{L}\int_0^L I(x)\,dx.$$

En admettant que l'intensité de sortie I_s est reliée à l'intensité moyenne I_m par la relation $I_s = \beta I_m$ où β est une constante, montrer que le retard de phase ϕ défini en III.A.1. s'écrit $\phi = \phi_0 + \gamma I_s$. Préciser ϕ_0 en fonction de n_0, L, λ, ainsi que γ en fonction de n_2, L, λ, β.

2. Montrer que τ peut se déduire graphiquement à partir de l'intersection d'une courbe C que l'on précisera et d'une droite D dont la pente dépend de l'intensité d'entrée I_e.

C. **Transistor optique et mémoire optique.**

La courbe à laquelle on fait référence dans la question précédente est donnée en annexe pour $R = 0{,}3$. De façon à simplifier l'exploitation des courbes, on supposera dans la suite que $\gamma = 1\ cm^2 . kW^{-1}$.

Transistor optique.

1. On choisit $\phi_0 = 2{,}2$ rad.

   a. En utilisant une résolution graphique (voir document-réponse 2), compléter le tableau ci-dessous (voir document-réponse 1).

I_e (kW.cm^{-2})	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ										
I_s (kW.cm^{-2})..........										

   b. Tracer la courbe I_s (ordonnée) fonction de I_e (abscisse) avec des échelles identiques sur les deux axes : 10 cm pour 1 kW.cm^{-2} .

2. Déterminer la valeur numérique de l'intensité d'entrée I_0 pour laquelle la courbe précédente possède un point d'inflexion.

3. On envoie alors sur ce système de la lumière dont l'intensité est modulée en fonction du temps (voir fig. 2). On supposera que I_e reste voisine de la valeur I_0 définie dans la question précédente.

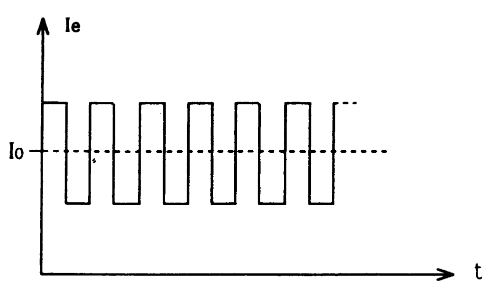


Figure 2

   a. Montrer que la partie modulée du signal lumineux est amplifiée.
   Faire un schéma qualitatif.

   b. A-t-on globalement fabriqué un amplificateur de lumière ?
   Dire pourquoi ***en une phrase.***

Mémoire optique.

On choisit maintenant $\phi_0 = 1{,}25$ rad.

1. Déterminer les deux valeurs I_{e_1} et I_{e_2} de I_e entre lesquelles la construction graphique conduit à plusieurs valeurs possibles de τ. Dans une telle situation, on admettra que :
   - les points d'intersection tels que la pente de la droite D est plus petite que celle de la courbe C correspondent à des états instables ; le système ne peut donc s'y maintenir ;
   - le système évolue d'un état stable vers l'état stable le plus proche.

   En déduire que pour des intensités d'entrée comprises entre I_{e_1} et I_{e_2} la valeur de I_s a deux valeurs différentes suivant que I_e est croissant ou décroissant. Le système présente donc une certaine mémoire.

2. Compléter le tableau ci-dessous et tracer la courbe I_s (ordonnée) fonction de I_e (abscisse) avec des échelles identiques sur les deux axes : 5 cm pour 1 kW . cm^{-2} (voir document-réponse 1).

I_e (kW . cm^{-2})...................	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{e_1}	2,0	2,2	I_{e_2}	2,9	3,5
τ (I_e croissant)										
τ (I_e décroissant)										
I_s (kW . cm^{-2}) (I_e croissant)										
I_s (kW . cm^{-2}) (I_e décroissant)										

3. L'intensité d'entrée est maintenue à la valeur $I_{eb} = \dfrac{(I_{e_1} + I_{e_2})}{2}$. Il y a donc deux valeurs possibles pour l'intensité de sortie I_{s_1} et $I_{s_0} < I_{s_1}$. On suppose qu'initialement on maintient $I_s = I_{s_0}$ à l'aide d'une source laser. À l'aide d'un laser moins puissant, on envoie une impulsion lumineuse sur le système.

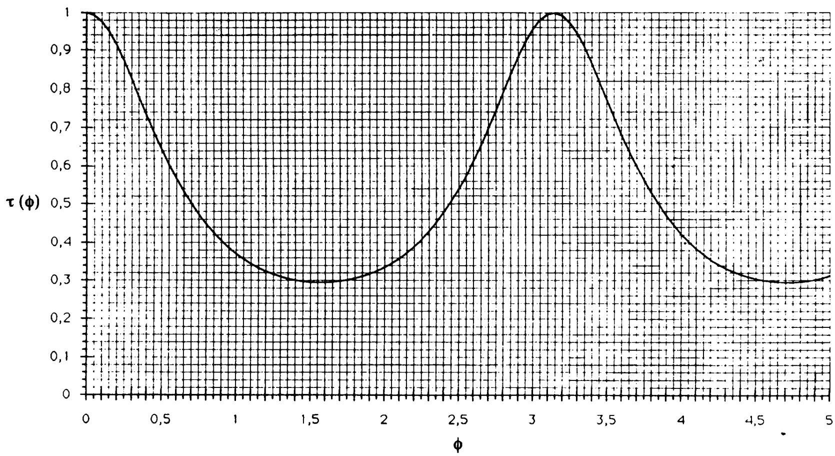
   a. Quelle doit être l'intensité minimale de cette impulsion pour que l'intensité I_s bascule à la valeur I_{s_1} ?

   b. Expliquer en quoi on a réalisé une mémoire optique. Comment faire pour effacer la mémoire ?

   c. Voyez-vous des raisons pour lesquelles on aurait intérêt à utiliser ce type de dispositif à la place des mémoires électroniques ?

Annexe

(Document à conserver)



DOCUMENT-RÉPONSE 1

I_e (kW.cm^{-2})	0,2	0,4	0,6	0,7	0,8	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7
τ										
I_s (kW.cm^{-2})										

I_e (kW . cm^{-2})	0,2	0,5	1,0	1,6	I_{e_1}	2,0	2,2	I_{e_2}	2,9	3,5
τ (I_e croissant)										
τ (I_e décroissant)										
I_s (kW . cm^{-2}) (I_e croissant)										
I_s (kW . cm^{-2}) (I_e décroissant)										

DOCUMENT-RÉPONSE 2