

Une méthode de calcul de l'énergie d'un satellite sur orbite elliptique

par Alioune OUEDRAOGO
I.M.P., Université de Ouagadougou

Dans cet article, un calcul de l'énergie totale d'un satellite sur une orbite elliptique autour de la terre est proposé, utilisant les connaissances d'un étudiant de première année.

1. INTRODUCTION

A partir de la loi de Newton de gravitation [1], [2], il a été établi que les planètes décrivent des orbites elliptiques autour du soleil, qui est un des foyers. De même, les satellites (naturels ou artificiels) peuvent avoir des orbites elliptiques autour des planètes. Le mouvement d'un objet dans un champ de force en $1/r^2$, n'est toutefois pas forcément elliptique, mais peut être parabolique ou hyperbolique. La condition suivante sur l'énergie totale (E) détermine la nature de la trajectoire.

$E < 0$: ellipse

$E = 0$: parabole

$E > 0$: hyperbole

A ce niveau du cours sur les forces centrales, on suppose que le soleil est immobile et que les planètes n'ont pas d'action les unes sur les autres. D'une façon analogue dans ce travail, le mouvement des satellites autour d'une planète comme la terre par exemple, nous supposons que la planète est immobile et que le soleil et les autres planètes n'ont aucun effet ; on traite le problème à deux corps.

Deux raisons nous font revenir sur le sujet :

– la première, est que ce calcul relativement rapide de l'énergie totale (E) d'un satellite sur une orbite elliptique, soumis à la force de gravitation due à la terre, utilise la symétrie de l'ellipse : les rayons de courbure au périhélie B et à l'apogée A sont égaux et les centres de courbure en ces points se situent sur la droite AB,

– la seconde, est que la méthode proposée est accessible aux étudiants de première année des Universités, qui souvent, suivent le cours sur les forces centrales (gravitation) en Mécanique du point, bien avant l'étude des équations différentielles en Mathématiques (celles-ci intervenant dans les solutions proposées dans divers ouvrages [1], [2], [3]).

2. RAPPELS

2.1. Définition

On dit qu'une force est centrale, lorsque sa ligne d'action passe constamment par un point donné appelé pôle.

2.2. Loi de Newton

Si on considère la terre fixe, de centre O_1 , la force d'interaction de gravitation entre les deux corps (ici le satellite et la terre) est :

$$\vec{F} = -G M \frac{m}{r^2} \frac{\vec{r}}{(|\vec{r}|)} \quad \text{avec } \vec{r} \equiv \vec{O_1 S}$$

M : masse de la terre

m : masse du satellite

G est la constante de gravitation :

$$G = 6,6710^{-11} \quad \text{N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{kg}^{-2}$$

La loi de Newton, comme la loi de Coulomb, obéit au principe d'égalité de l'action et de la réaction. Cette force de gravitation est une force centrale toujours attractive et conservative.

D'où les propriétés bien connues pour une particule soumise uniquement à cette force [1], [2], [3], [4] :

- le moment cinétique par rapport au pôle attractif est constant,
- l'énergie mécanique totale est constante,
- la force de gravitation dérive d'une énergie potentielle E_p ; on a alors :

$$\vec{F} = - \text{grad } E_p$$

$$E_p = -G \frac{M m}{r}$$

3. EXPRESSION DU RAYON DE COURBURE EN A

A et B désignent respectivement l'apogée et le périégée de l'orbite elliptique du satellite autour de la terre de centre O_1 .

Si O_1 et O_2 sont les foyers, $2a$ la longueur du grand axe, le milieu O de $O_1 O_2$, est un centre de symétrie de l'ellipse.

Écrivons le principe fondamental de la Dynamique.

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \vec{a}_{\text{Normale}} = -m \frac{V^2}{P} \vec{e}_r \quad (1)$$

Relation vraie lorsque les supports des vecteurs de la base de Frénet $(\vec{T}, \vec{N})$ et ceux des vecteurs de la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ des coordonnées polaires coïncident respectivement. C'est le cas en A et B, où :

$$\vec{N} = -\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{T} = \vec{e}_\theta$$

On constate très souvent une certaine confusion entre les deux systèmes de coordonnées.

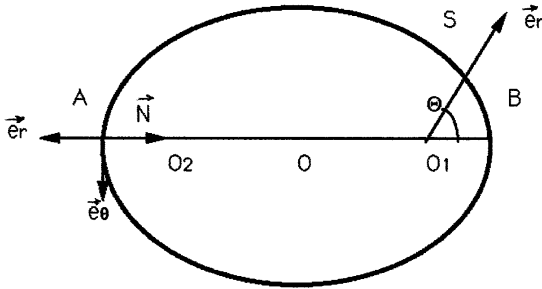


Figure : P : rayon de courbure - $\vec{e}_r$: vecteur unitaire porté par $O_1 S$.

Appliquons (1) respectivement aux points A et B : nous avons les équations suivantes :

$$\frac{m V_A^2}{P_A} = m a_A = G \frac{M m}{r_A^2} \quad (2)$$

$$\frac{m V_B^2}{P_B} = m a_B = G \frac{M m}{r_B^2} \quad (2')$$

On en déduit pour : $P_A = P_B$ (vu les symétries de l'ellipse) la relation ci-dessous :

$$\frac{1}{2} \frac{m}{P_A} (V_A^2 - V_B^2) = \frac{G M m}{2} \left(\frac{1}{r_A^2} - \frac{1}{r_B^2} \right) \quad (3)$$

L'application du théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B donne :

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta E_C = - \int_A^B \frac{G M m}{r^2} dr = G M m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right)$$

D'où :

$$\frac{1}{2} m (V_B^2 - V_A^2) = G M m \left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A} \right) \quad (4)$$

En comparant (3) et (4), on tire l'expression suivante vérifiée par le rayon de courbure (P_A) à l'apogée (et au périégée) de la trajectoire du satellite :

$$\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_A} = \frac{2}{P_A} \quad (5)$$

P_A est égal à la moyenne harmonique des distances r_A et r_S .

4. CALCUL DE L'ÉNERGIE MÉCANIQUE (TOTALE)

Sachant que l'énergie totale (E) du satellite est constante, on peut la calculer à l'apogée A.

$$E = \frac{1}{2} m V_A^2 + E_{P(A)} = C^{ste}$$

$$E = \frac{1}{2} m V_A^2 - \frac{G M m}{r_A}$$

D'après (2) puis (5) il vient que :

$$\frac{1}{2} m V_A^2 = \frac{1}{2} \frac{G M m}{r_A^2} P_A = \frac{G M m}{r_A^2} \frac{r_A r_B}{r_A + r_B} \quad (r)$$

D'où l'expression de l'énergie (E), si on note que : $r_A + r_B = 2a = AB$, grand axe de l'ellipse (voir figure) :

$$E = - \frac{G M m}{2a}$$

Cette quantité est négative. Par ailleurs, on peut montrer qu'elle correspond à l'énergie de transfert (minimale) dans les problèmes de rendez-vous spatiaux, dans le cas de deux orbites circulaires, coplanaires, concentriques, dont les centres coïncident avec celui de la terre et de rayons respectifs, r_A et r_B .

5. CONCLUSION

Ainsi, nous retrouvons la formule connue de l'énergie totale, en fonction de la longueur du grand axe de la trajectoire d'un satellite sur une orbite elliptique autour de la terre ; ce calcul faisant appel à des notions de base de la Mécanique du point : repère local, théorème de l'énergie cinétique... Mais dans le cadre plus général d'un cours, il semble nécessaire d'avoir recours aux équations différentielles, afin d'établir l'équation de la trajectoire, ainsi que les expressions de ses différents paramètres, qui sont fonctions de l'énergie.

Rappelons enfin, qu'il existe des solutions plus simples conduisant à la formule de l'énergie (E). Citons cet exemple :

$$E = E_C + E_p$$

Ce qui entraîne :
$$E = \frac{1}{2} m v^2 - G M m / r$$

Aux extrémums, en faisant $v^2 = C^2 / r^2$, où C est la constante des aires, on a :

$$E = \frac{1}{2} (m C^2 / r^2) - G M m / r$$

On aboutit à l'équation du second degré suivante :

$$r^2 E + G M m r - \frac{1}{2} m C^2 = 0$$

dont les solutions sont r_A et r_B . La somme des racines est égale à : $r_A + r_B = - G M m / E = 2a = AB$ grand axe de l'ellipse. On en déduit alors l'expression de l'énergie :

$$E = - G M m / 2a$$

REMERCIEMENTS

Ils vont à Messieurs Anatoli TYSHKEVITCH de l'Institut Polytechnique de Kramatorsk, Pierre TANGUY de l'Université de Rennes et Christian VIGNON Agrégé de Mécanique au Lycée du Mont-Blanc 74190 PASSY, pour leur disponibilité et leurs encouragements.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Murray R. SPIEGEL. Théorie et applications de la Mécanique générale. Série Schaum. Edisciences S.A., Paris France.
- [2] M. LE BELLAC. Introduction à la Mécanique. Dia Université.
- [3] J. BOUTIGNY. Cours de Physique. Mécanique 1. Mathématiques supérieures. Premier cycle universitaire. Vuibert.
- [4] M. DENIZART, R. JAGUT et G. SOUM. Travaux dirigés de Physique. Première année d'enseignement supérieur. Hachette Université.
- [5] M. MANTION. Problèmes de Mécanique ; rappels de cours, équations différentielles. Armand Colin.
- [6] J. FAGET et J. MAZZASCHI. Travaux dirigés de Physique, tome 2 (M.P.₁ et P.C.₁). Vuibert.