

## Des forces de pression considérées comme forces fictives

par Joël SORNETTE

Professeur en Math Spé P au Lycée Turgot, 75003 Paris

Une récente - et trop longue - polémique relative à la définition microscopique du travail et de la chaleur a agité les pages du B.U.P. Il n'est pas dans mes intentions de la relancer ici mais d'aborder un point de vue qui a été oublié dans ce débat, à savoir que si les forces de pressions sont bien réelles au contact des parois d'un récipient, elles ne sont au sein d'un fluide que des forces fictives au même titre que les forces d'inertie ou que la poussée d'un réacteur.

### 1. POSITION DU PROBLÈME

Soit au sein d'un fluide un volume  $\Omega$  limité par une surface  $\Sigma$ , éventuellement mobile et déformable mais contenant une masse fixe. Considérons comme système l'ensemble des molécules contenues à l'instant  $t$  à l'intérieur de  $\Omega$ , représentées dans la figure 1 par des croix (les molécules extérieures au système y sont représentées par des ronds). A l'instant  $t + dt$ , à cause des phénomènes de diffusion à travers  $\Sigma$ , certaines molécules initialement intérieures à  $\Omega$  en sont sorties et par compensation des molécules initialement extérieures à  $\Omega$  y sont entrées. Si  $dt$  est assez petit, on peut dessiner arbitrairement - comme sur la figure 2 - une frontière entre le système (le contenu initial de  $\Omega$ , c'est-à-dire les croix) et l'extérieur du système (les ronds).

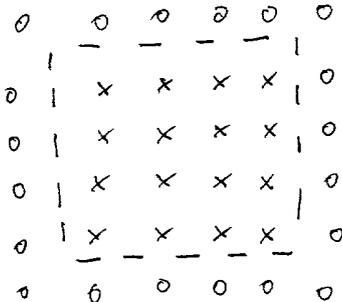


Figure 1

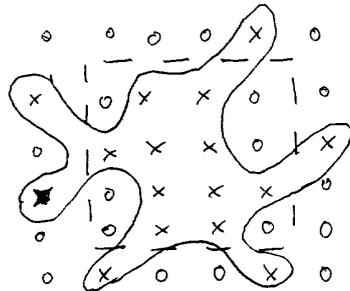


Figure 2

Mais l'on conçoit aisément que très rapidement, toute tentative pour tracer une telle frontière sera vouée à l'échec.

Or les lois de la physique ne sont simples que pour un système fermé, c'est-à-dire, non un système de masse fixe, mais un système de composition fixe, c'est-à-dire formé des mêmes molécules (ou des mêmes noyaux et électrons en cas de réaction chimique). Il faut donc adapter les lois physiques à la situation qui vient d'être décrite.

## 2. FORCES DE PRESSION

Le système S sera le contenu à l'instant t du volume de contrôle  $\Omega$ . Une molécule sera repérée par un indice i :

$i \in S$  désignera une molécule du système,

$i \in \Omega$  désignera une molécule contenue dans le volume de contrôle,

$i \in E$  désignera une molécule entrant dans  $\Omega$  entre t et t + dt,

$i \in Q$  désignera une molécule quittant  $\Omega$  entre t et t + dt.

$\vec{V}_i(t)$ ,  $\vec{V}_i(t + dt)$  désignent les vitesses aux instants t et t + dt de la molécule i et  $\vec{F}_i$  la force s'appliquant à cette même molécule à l'instant t.

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au système S peut s'écrire, pour un dt infiniment petit :

$$\sum_{i \in S} m_i \vec{V}_i(t + dt) - \sum_{i \in S} m_i \vec{V}_i(t) = \sum_{i \in S} \vec{F}_i dt$$

Par définition de S, on a  $\sum_{i \in S} m_i \vec{V}_i(t) = \sum_{i \in \Omega} m_i \vec{V}_i(t)$  ; de même :

$$\sum_{i \in S} \vec{F}_i = \sum_{i \in \Omega} \vec{F}_i \quad .$$

Par contre à l'instant t + dt, S est formé des molécules contenues dans  $\Omega$  (déduction faite de celles qui y sont entrées) et de celles qui en sont sorties :

$$\sum_{i \in S} m_i \vec{V}_i(t + dt) = \sum_{i \in \Omega} \dots - \sum_{i \in E} \dots + \sum_{i \in Q} \dots$$

On en déduit :

$$\sum_{i \in \Omega} m_i \vec{V}_i(t+dt) - \sum_{i \in \Omega} m_i \vec{V}_i(t) = \sum_{i \in \Omega} \vec{F}_i dt + \sum_{i \in E} m_i \vec{V}_i(t+dt) - \sum_{i \in Q} m_i \vec{V}_i(t+dt)$$

qu'on peut abrégé en :

$$\frac{1}{dt} [\vec{p}_\Omega(t+dt) - \vec{p}_\Omega(t)] = \vec{F}_\Omega + \frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in E} m_i \vec{V}_i(t+dt) - \sum_{i \in Q} m_i \vec{V}_i(t+dt) \right]$$

Par un raccourci audacieux mais classique, on peut appliquer au système ouvert qu'est l'intérieur de  $\Omega$ , les lois des systèmes fermés à condition d'ajouter à la force réelle  $\vec{F}_\Omega$  (essentiellement les forces de Van der Waals), une force fictive  $\frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in E} m_i \vec{V}_i(t+dt) - \sum_{i \in Q} m_i \vec{V}_i(t+dt) \right]$  qui gère les échanges de matière à travers la surface du volume de contrôle.

On reconnaît ici la démarche qui définit la poussée d'un réacteur ou d'une fusée (il s'agit foncièrement de la même problématique) et de façon plus éloignée celle qui introduit les forces d'inertie dans un référentiel non galiléen.

Poursuivons ; les molécules qui entrent ou sortent de  $\Omega$  le font en traversant la surface  $\Sigma$  ; découpons celle-ci en éléments  $d\Sigma$ . La contribution  $d\vec{F}$  à la force fictive des molécules entrant ou sortant à travers  $d\Sigma$  a la même expression, à ceci près qu'il faut limiter les sommes à ces seules molécules. Comme les molécules qui entrent ont forcément une vitesse dirigée vers l'intérieur et celles qui sortent une vitesse dirigée vers l'extérieur, il est clair que  $d\vec{F}$  est dirigé vers l'intérieur du volume de contrôle. En l'absence de viscosité, la symétrie locale de révolution impose à  $d\vec{F}$  d'être normal à  $d\Sigma$  et un simple raisonnement d'extensivité montre que  $d\vec{F}$  est proportionnel à l'aire de  $d\Sigma$ . On peut donc définir la pression cinétique par :

$$d\vec{F} = -p_{\text{cin}} d\vec{\Sigma}$$

A ce terme, il faut ajouter la pression qui rend compte des forces de Van der Waals entre molécules intérieures et extérieures à  $\Omega$  au voisinage de  $\Sigma$  puisque ces forces sont à court rayon d'action, mais ceci n'est pas le propos de cet article.

Insistons à ce stade sur le fait que la pression cinétique ne résulte nullement d'une force réelle appliquée à une quelconque molécule du système et qu'inversement, si l'on ne parle que des forces réelles appliquées aux molécules du système ouvert qu'est le volume de contrôle, on raisonne faussement.

### 3. ÉTUDE ÉNERGÉTIQUE

Appliquons le raisonnement précédent au théorème de l'énergie cinétique. On désignera par  $K_i$  et  $P_i$  l'énergie cinétique de la molécule  $i$  et la puissance de la force qui s'y applique ( $P_i = \vec{F}_i \cdot \vec{V}_i$ ). On obtient sans difficulté :

$$\sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 (t + dt) - \sum_{i \in \Omega} \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 (t) = \sum_{i \in \Omega} P_i dt + \sum_{i \in E} \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 (t + dt) - \sum_{i \in Q} \frac{1}{2} m_i \vec{V}_i^2 (t + dt)$$

qu'on peut abréger en :

$$\frac{1}{dt} [K_{\Omega}(t + dt) - K_{\Omega}(t)] = P_{\Omega} + \frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in E} \dots - \sum_{i \in Q} \dots \right]$$

Là encore, il apparaît un terme supplémentaire qui gère les échanges de matière à travers  $\Sigma$ , qui est somme des contributions des surfaces élémentaires  $d\Sigma$  en lesquelles on peut découper  $\Sigma$ .

Imposons de plus, non seulement que la masse globale de  $\Omega$  soit constante, mais que le bilan massique soit localement équilibré, c'est-à-dire que chaque  $d\Sigma$  se déplace à une vitesse  $\vec{V}$  telle que la masse entrante et la masse sortante de  $d\Sigma$  pendant  $dt$  soient égales.

En notant  $i \in dE$  et  $i \in dQ$  les molécules concernées et pour, chacune d'entre elles, en introduisant la vitesse relative  $\vec{v}_i$  telle que  $\vec{V}_i = \vec{V} + \vec{v}_i$ , la contribution de  $d\Sigma$  au terme supplémentaire peut s'écrire :

$$\frac{1}{dt} \cdot \frac{\vec{V}}{2} \left[ \sum_{i \in dE} m_i - \sum_{i \in dQ} m_i \right] + \frac{\vec{V}}{dt} \cdot \left[ \sum_{i \in dE} m_i \vec{v}_i - \sum_{i \in dQ} m_i \vec{v}_i \right] + \frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in dE} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 - \sum_{i \in dQ} \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 \right]$$

Le premier terme est nul puisque le bilan massique est localement équilibré. Puisque cet équilibre local entraîne aussi que :

$$-p_{cin} d\vec{\Sigma} = \frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in dE} m_i - \sum_{i \in dQ} m_i \right] \cdot \vec{V} + \frac{1}{dt} \cdot \left[ \sum_{i \in dE} m_i \vec{v}_i - \sum_{i \in dQ} m_i \vec{v}_i \right] = \frac{1}{dt} \left[ \sum_{i \in dE} m_i \vec{v}_i - \sum_{i \in dQ} m_i \vec{v}_i \right]$$

on reconnaît dans le second terme du bilan énergétique :

$$-p_{cin} d\vec{\Sigma} \cdot \vec{V}$$

c'est-à-dire la puissance qu'aurait une force réelle  $-p_{cin} d\vec{\Sigma}$  appliquée à une surface mobile à la vitesse  $\vec{V}$ .

Le troisième terme qui n'est pas forcément nul, et qui doit figurer dans le bilan, résulte des échanges à travers  $\Sigma$  et ne peut pas être réduit à une puissance mécanique d'une quelconque force, fût-elle fictive. Cet échange énergétique doit donc être considéré comme un échange de chaleur.

A titre anecdotique, on retrouve cette distorsion entre une puissance effective et la puissance calculée avec une force fictive lorsqu'on utilise la formulation volumique des forces de pression  $-\vec{\nabla}_p$ . En effet, le théorème du gradient permet d'écrire :

$$-\iint_{\Sigma} p d\vec{\Sigma} = -\iiint_{\Omega} \vec{\nabla}_p d\Omega$$

c'est-à-dire qu'on peut remplacer la force surfacique  $-p d\vec{\Sigma}$  par la force volumique  $-\vec{\nabla}_p d\Omega$ .

Mais il serait faux d'en déduire que la puissance volumique des forces de pression est  $-(\vec{\nabla}_p) \cdot \vec{v}$ , car le théorème de Green-Ostrogradski conduit à :

$$\iint_{\Sigma} -p d\vec{\Sigma} \cdot \vec{v} = \iiint_{\Omega} -\vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) d\Omega$$

soit une puissance volumique :  $-\vec{\nabla} \cdot (p\vec{v}) = -(\vec{\nabla}p) \cdot \vec{v} - p(\vec{\nabla} \cdot \vec{v})$ .

Pour en revenir à notre sujet, définir la puissance des forces de pression par  $-p d\vec{\Sigma} \cdot \vec{v}$  est en toute rigueur fautif puisque cette définition sous-entend la réalité des forces de pression donc passe sous silence le

caractère foncièrement ouvert d'un volume de contrôle et conduit à oublier le terme d'échange.

#### 4. EN GUISE DE CONCLUSION

Les difficultés à établir un bilan correct de quantité de mouvement ou d'énergie proviennent ici du choix délibéré d'étudier une portion de fluide sans aucun contact avec les parois du récipient qui le contient.

Dès lors qu'on étudiera la totalité du fluide contenu dans un récipient, les difficultés disparaissent : le système est fermé, il n'y a plus d'échange de matière et les forces de pression reprennent leur réalité en tant que moyenne temporelle des forces qu'exercent les parois sur les molécules qui les heurtent.