Énergie fournie par une personne qui se déplace sur un escalier mécanique en mouvement

par P. CASTELLANE
Lycée Loritz, 54000 Nancy

Le but de cet article n'est pas tant de résoudre ce problème que de faire un peu de mécanique.

Une solution directe est donnée au paragraphe 5.

Une étude plus complète (et avec quelques détours ! qui peuvent prêter à réflexion et à discussion) permettra de préciser l'important théorème de l'énergie cinétique. Seules les parties délicates seront traitées avec une certaine rigueur, surtout dans les notations qui sont alors nécessairement un peu lourdes.

1. NOTATIONS

La terre (appelée T, le sol en fait partie) est un référentiel galiléen valable ici. L'accélération de la pesanteur est g, la différence de niveau à monter entre 2 étages est H. L'escalier E, de pente α avance vers le haut à la vitesse V par rapport au sol T : $\vec{V} = \vec{V}(E/T)$. La personne de masse m est notée A, sa vitesse par rapport à l'escalier E est v : $\vec{v} = \vec{v}(A/E)$. V et v sont positifs (ou nuls).

L'action d'un corps X sur un corps Y est réduite ici à une force notée $\vec{F}X/Y$.

2. LA PERSONNE MONTE L'ESCALIER QUI EST IMMOBILE (V = 0)

1°) Rappel : énoncé du théorème de l'énergie cinétique (T.E.C.)

La variation d'énergie cinétique galiléenne d'un système quelconque entre 2 instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces intérieures et extérieures appliquées à ce système entre les 2 instants, travaux calculés dans ce référentiel galiléen.

2°) Remarque : le théorème du centre de gravité (qui porte aussi d'autres noms, par exemple théorème de la résultante dynamique, ou du mouvement du centre d'inertie, etc...) et le théorème du moment cinétique, pour un référentiel galiléen, ne font appel qu'aux forces extérieures.

3°) Force extérieure : force exercée sur tout ou partie du système par quelque chose ne faisant pas partie du système.

Force intérieure : force exercée par une partie du système sur une autre partie de ce système.

Il est important de bien précicer le système et de chercher les corps qui exercent des forces.

4°) Application à la personne A sur l'escalier

- Forces extérieures :

– à distance de la part de T : $m\vec{g}$ dont le travail pendant toute la montée est – mg H,

– de contact de la part de E : $\vec{F}_{E/A}$. On néglige l'action de l'air. $\vec{F}_{E/A}$ ne travaille pas : quand elle existe, son «point d'application» (la semelle) est immobile par rapport à T.

- Forces intérieures : elles sont innombrables ; leur travail au cours de la montée est noté Wfi.

- L'énergie cinétique par rapport à T n'a pas varié (v est la même en haut qu'en bas : notre problème est la montée plutôt que la variation de vitesse).

On a donc : $$-\,mg\,H + W_{fi} = 0$$

On considérera que le travail des forces intérieures est l'énergie cherchée : énergie mécaniquement utilisée, soit mg H ici.

Ce travail est effectué au niveau des muscles. Il est en fait la différence entre le travail moteur fourni par les fibres musculaires et le travail de frottement (en fait la somme algébrique puisque le travail de frottement est négatif) qui est transformé en chaleur où il y a des frottements mécaniques. Le travail apparaît au dépend d'énergie chimique.

5°) Complément

De façon générale, les forces intérieures à un solide (donc un système indéformable) ne travaillent pas (voir annexe II). C'est seulement dans les corps déformables qu'il peut y avoir travail de l'ensemble des forces intérieures.
Exemples : ressort, lui appliquer le T.E.C. entre 2 positions où il est immobile, l'une au repos, l'autre étiré ; gaz dans un cylindre fermé par un piston mobile ; moteur électrique ; etc...

Si un système est formé de solides en mouvement, sans interaction à distance entre eux, les contacts entre eux étant sans frottement, le travail des forces intérieures est nul.

3. LA PERSONNE EST IMMOBILE SUR L'ESCALIER EN MOUVEMENT (v = 0)

A ne se déforme pas, donc ses forces intérieures ne travaillent pas. La personne ne dépense pas d'énergie. Le T.E.C. s'écrit :

$$- mg\,H + W\,(\vec{F}E/A) = 0$$

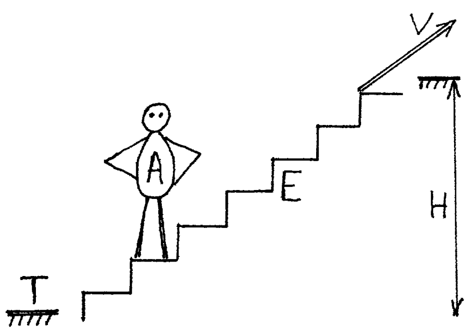

Figure 1

4. LA PERSONNE (v) SUR L'ESCALIER QUI AVANCE (V)

1°) Pour des raisons de continuité du contact de A et de E, mais surtout pour présenter certaines notions peu utilisées ou mal connues, imaginons que A soit un ensemble personne et bicyclette (masse totale m) qui monte à la vitesse v par rapport à un tapis roulant E, lequel monte à la vitesse V par rapport à T.

– Système étudié : A,
– Forces intérieures : elles ne manquent pas,
– Forces extérieures : $\overrightarrow{mg}$, $\overrightarrow{F}$E/rar , $\overrightarrow{F}$E/rav.

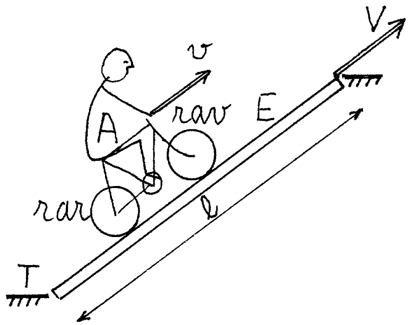

Figure 2

2°) Détermination de ces forces

Les vitesses étant constantes, A est pratiquement en translation rectiligne uniforme par rapport à T. Les forces extérieures qu'il subit sont donc comme en statique :

$$\sum \overrightarrow{F}\text{ext} = m \times \overrightarrow{a}\,(G/T) = \overrightarrow{0} \qquad (1)$$

$$\sum \overrightarrow{m}_G\, \overrightarrow{F}_{ext} = d\, \overrightarrow{\sigma}_G / dt = \overrightarrow{0}$$

Les 3 forces sont concourantes : donc en D intersection de la verticale par G et de la perpendiculaire à E en B qui porte $\overrightarrow{F}$E/rav (voir Annexe I), (voir Figure 3).

D'où le polygone des forces (quelquefois appelé le dynamique), qui traduit la relation (1) : on dessine un vecteur représentant $\overrightarrow{mg}$ et par ses extrémités, on trace des parallèles aux 2 autres forces, donc à BD et à CD, ce qui donne ces actions de E sur les roues.

3°) Rappel : le travail d'un force $\overrightarrow{F}$ appliquée en un point C qui se déplace à la vitesse $\overrightarrow{V}$(C/R) pendant une durée élémentaire dt est $dW = \overrightarrow{F} \times \overrightarrow{V}(C/R) \times dt$.

Avant d'utiliser cette définition pour résoudre notre problème, étudions un cas semblable, plus simple, peu souvent traité.

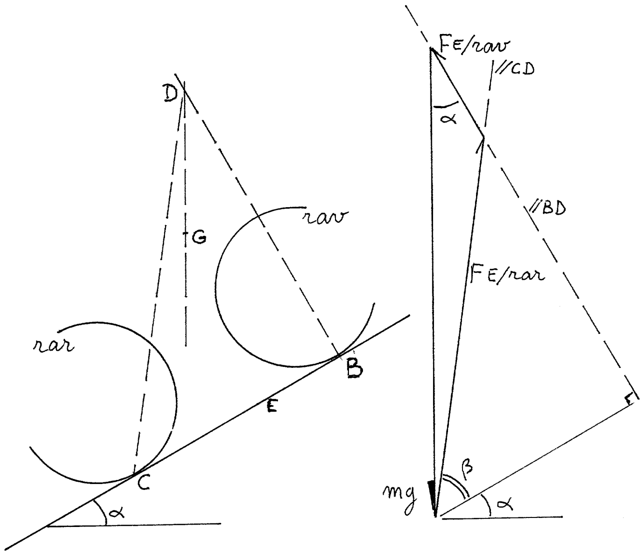

Figure 3

4°) Démarrage d'une automobile à propulsion arrière, sur route horizontale, avec frottement bien sûr au contact pneu-sol, mais sans que les roues patinent.

Le T.E.C. donne :

$$W(\text{poids}) + W(\vec{F}\,T/\text{rar}) + W(\vec{F}\,T/\text{rav}) + W_{fi} = \frac{1}{2}\,mv^2 - 0$$

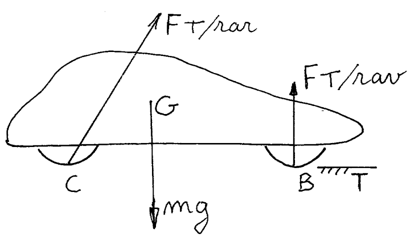

Figure 4

Les 3 premiers travaux écrits sont nuls :

– G se déplace perpendiculairement au poids $m\vec{g}$,

– le point C de la roue arrière, en contact avec le sol a une vitesse nulle si la roue arrière roule sans glisser (point de rebroussement d'une cycloïde). Ici, les forces exercées par le sol ne travaillent pas. C'est évident si on imagine les roues polygonales, et c'est bien dommage car c'est le sol qui fournirait l'énergie ! C'est du moteur que vient l'énergie. De ce point de vue on ne peut pas considérer la voiture comme un solide, les forces intérieures travaillent.

5°) Revenons au cycliste et appliquons lui le T.E.C. ; la terre est le référentiel galiléen choisi :

Travaux : Wfi (c'est l'énergie dépensée cherchée),

poids : – mg H

$\vec{F}$ E/rav est normale à E ; le vecteur vitesse de son point d'application B de la roue avant par rapport à T est $\vec{V}$(B rav/T) = $\vec{V}$(B rav/E) + $\vec{V}$(E/T) = $\vec{0}$ + $\vec{V}$. Il est parallèle à E. Le produit scalaire, donc le travail de cette force est nul.

Pour $\vec{F}$ E/rar, son travail élémentaire est :

dW ($\vec{F}$ E/rar) = $\vec{F}$ E/rar × $\vec{V}$(C rar/T) dt = … = $\vec{F}$ E/rar × $\vec{V}$ × dt

= F E/rar × V × cos β × dt (voir figure 3)

= mg V sin α dt car le polygone des forces montre que F cos β = mg sin α.

L'intégration pendant la durée du mouvement donne : mg V sin α × durée ; la durée est l/(V + v).

Comme l'énergie cinétique est constante,

$$\mathrm{Wfi} - \mathrm{mg\,H} + \mathrm{mg\,V} \sin\alpha \times \frac{l}{V + v} = 0 \text{ avec } l \sin\alpha = H$$

d'où : $$\mathrm{Wfi} = \mathrm{mg\,H} \times \frac{v}{V + v}$$ énergie cherchée.

Cas particuliers :

– si v = 0 on retrouve 3.,

– si V = 0 on retrouve 2.,

– cette relation est valable algébriquement dans le cas de déplacements quelconques en comptant H positif si la personne arrive en haut, et les vitesses positives si elles sont vers le haut.

5. AUTRE DÉMONSTRATION

L'escalier E est un référentiel galiléen (translation rectiligne uniforme par rapport à T).

Le travail des forces intérieures à un système est indépendant du référentiel (voir Annexe III).

On applique le T.E.C. à la personne A dans le référentiel E :

$$W(\text{poids}) + W(\vec{F}\,E/rav) + W(\vec{F}\,E/rar) + Wfi = 0 \quad (v \text{ départ} = v \text{ arrivée})$$

Les forces exercées par E sur les roues ne travaillent pas car les roues roulent sans glisser $(\vec{V}\,(C\ rar/E) = \vec{0})$

$$W(\text{poids}) = \int_{\text{arrivée}}^{\text{départ}} m\,\vec{g}\cdot\vec{v}\,dt$$

G se déplace à $\vec{v}$ par rapport à E.

Calcul algébrique :
d et a : abscisses des points de départ et d'arrivée par rapport à T.

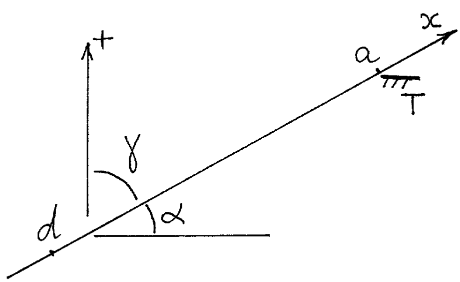

Figure 5

Mouvement de A par rapport à T :

$$x = (V + v)\,t + x_0 \qquad V \text{ et } v \text{ algébriques}$$

$$a = (V + v)\,t_a + x_0 \qquad d = (V + v)\,t_d + x_0$$

d'où là durée du mouvement : $t_a - t_d = \dfrac{a - d}{V + v}$

$$W(\text{poids}) = -\,mg\,v\cos\gamma \times \frac{a-d}{V+v} \qquad g > 0$$

$$(a - d)\cos\gamma = (a - d)\sin\alpha = H \qquad (> 0 \text{ si A part du bas})$$

$$Wfi = -\,W(\text{poids})$$

$$Wfi = mg\,H\,\frac{v}{V+v}$$

résultat qui aurait pu être obtenu directement en ramarquant que $H\,\dfrac{v}{V + v}$ est la hauteur dont monte A par rapport à E.

Annexe I

Étude d'une roue libre, légère, appartenant à un véhicule beaucoup plus lourd

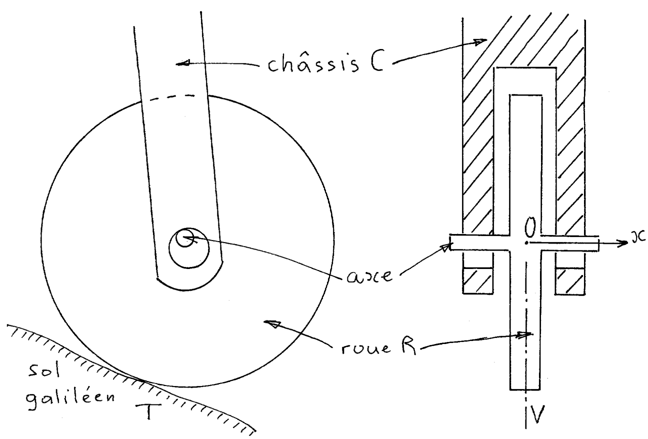

Figure 6

La roue R est soumise à 3 forces (ramenées à son plan de symétrie vertical V). On se place dans le cas où il n'y a pas de frottement au contact axe-châssis : les actions en ce point sont normales, donc passent par l'axe Ox, comme le poids de la roue si celle-ci est équilibrée, O centre de gravité.

1°) Théorème du centre de gravité :

$$\sum \vec{F}\,ext/R = m \times \vec{a}\,(O/T)$$

On suppose mg << F C/R et ma << F C/R ; on en déduit donc $\vec{F}\,C/R = -\,\vec{F}\,T/R$.

2°) Théorème du moment cinétique au centre de gravité, en projection sur Ox. Le moment par rapport à O du poids de la roue et celui de F C/R sont nuls. Celui de F T/R est donc égal à la dérivée du moment cinétique σ de R en O. Comme la roue est légère, son moment d'inertie par rapport à O est pris nul ; σ est donc nul. Il s'en suit que F T/R passe par O.

L'action du sol sur la roue est pratiquement dirigée vers l'axe, comme s'il n'y avait pas de frottement au contact du sol. Il n'en est pas de même si la roue est motrice, ou freinée ou insuffisamment légère

Annexe II

Travail des forces intérieures

Ces forces sont 2 à 2 directement opposées (action et réaction). P_i et P_j sont 2 points du système considéré : $\vec{F}\,j/i = -\,\vec{F}\,i/j$.

Par rapport à un référentiel R, les déplacements élémentaires de ces points sont $d\vec{P_i}$ et $d\vec{P_j}$ et le travail de ces forces est :

$$dW = \vec{F}\,j/i \times d\vec{P_i} + \vec{F}\,i/j \times d\,\vec{P_j}$$

$$dW = \vec{F}\,i/j \times (d\,\vec{P_j} - d\,\vec{P_i}) = \vec{F}\,i/j \times d\,\overrightarrow{P_i P_j}$$

Dans un solide, les distances des points sont invariables donc globalement les forces intérieures ne travaillent pas.

Annexe III
Le travail des forces intérieures à un système S est indépendant du référentiel

Le référentiel R' est en mouvement (d'entraînement) quelconque par rapport au référentiel R. P_i et P_j sont 2 points de S. Le travail élémentaire d'une des 2 forces d'interaction calculé dans R est :

$$\left(dW\,(\overrightarrow{F}i/j)\right)_R = \overrightarrow{Fi}/j \times \overrightarrow{V}(P_j/R)\ dt$$

$$= \left[\ \overrightarrow{Fi}/j \times \overrightarrow{V}(P_j/R') + \overrightarrow{Fi}/j \times \overrightarrow{V}(j\ \mathrm{de}\ R'/R)\right] dt$$

car d'après la loi de composition des vitesses, la vitesse d'entraînement est la vitesse du point de R' où est P_j ; dans l'expression $\overrightarrow{V}$(j de R'/R), P_j est lié à R'.

Si on somme à toutes les forces intérieures à S, on obtient $\left(dW\,(\overrightarrow{F}S/S)\right)_R = \left(dW\,(\overrightarrow{F}S/S)\right)_{R'} + O$ car ce qui provient du deuxième terme est constitué de l'ensemble des travaux de forces intérieures à un solide, vu que tous ces points sont liés à un référentiel.