

Résonance paramétrique *Théorie, étude par ordinateur*

par Daniel MAURAS
Lycée Saint-Louis, 75006 Paris

L'équation du pendule simple est facilement intégrable pour des oscillations de faible amplitude puisqu'elle se réduit dans ce cas à l'équation de l'oscillateur harmonique, valable dans de nombreux domaines de la physique : étude d'un circuit oscillant LC par exemple.

Sa simplicité réside dans le fait que la constante élastique ne dépend pas du temps.

Dès que la constante élastique devient fonction du temps, selon une loi quelconque, l'équation :

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = 0$$

ne peut plus être résolue par quadrature à l'aide des fonctions connues.

Dans le cas particulier où $\omega^2(t)$ est une fonction périodique du temps, l'équation porte le nom d'équation de Hill ; $\omega^2(t)$ est souvent mis sous la forme $\omega^2(t) = \omega_0^2 [1 + \varepsilon f(t)]$ avec $f(t)$ périodique de période T .

Si $f(t) = \cos \Omega t$, l'équation devient une équation de Mathieu ; on met parfois $\omega^2(t)$ sous la forme : $\omega^2(t) = \eta + \gamma \cos \Omega t$.

On peut aboutir à des résultats théoriques intéressants pour ces types particuliers d'équation. Il ne s'agit pas là d'une nouveauté : ces équations ont été étudiées vers le dernier quart du XIX^{ème} siècle par Floquet, Van Der Pol, Mathieu...

Dans l'ouvrage *Théorie des Vibrations* de S. Timoshenko édité en 1939, un paragraphe est consacré à la discussion de l'équation du mouvement vibratoire avec caractéristique variable.

En physique, ce type d'équation intervient dans le phénomène de résonance paramétrique. Il m'a semblé intéressant de rappeler certains résultats théoriques et de montrer comment on peut les exploiter à l'ordinateur pour représenter les oscillations en fonction du temps, l'évolution dans le domaine des phases, pour faire l'étude des domaines de stabilité. Un point remarquable et étonnant réside dans la diversité de forme des oscillations mises en jeu pour une équation qui somme toute est linéaire.

1. QUELQUES EXEMPLES

• Le pendule inversé*

La tige OA est de masse négligeable. Dans le référentiel non galiléen en translation verticale de vitesse \dot{y} , m est soumise à son poids $m\vec{g}$ et à la force d'inertie d'entraînement $-m\ddot{y}\vec{e}_y$, due aux oscillations du point de fixation.

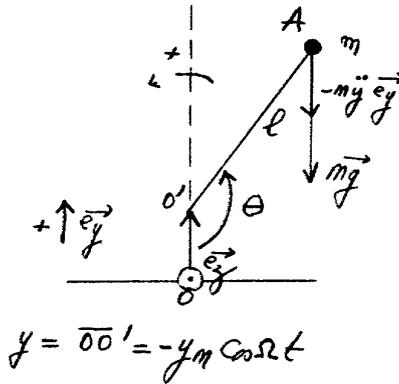


Figure 1

Par application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (O', \vec{e}_z) on obtient l'équation du mouvement :

$$ml^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl \sin \theta - m\ddot{y}l \sin \theta$$

* Voir un calcul approché dans l'épreuve de physique du concours d'entrée à l'E.N.S. de Paris, groupe A en 1988. Les énoncés sont édités par l'U.d.P. (N.D.L.R.).

Tout se passe comme si on avait remplacé g par $g + \ddot{y}$.

Avec $\omega_0^2 = \frac{g}{l}$, l'équation s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{y_m}{g} \Omega^2 \cos \Omega t \right) \sin \theta = 0$$

En posant $\alpha = \pi - \theta$ et en linéarisant en α :

$$\ddot{\alpha} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{y_m}{g} \Omega^2 \cos \Omega t \right) \alpha \approx 0$$

Il s'agit d'une équation de Mathieu.

• Le circuit oscillant R, L, C

La capacité est supposée fonction du temps par suite du mouvement d'une plaque.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C(t)} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} \quad L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C(t)} = 0$$

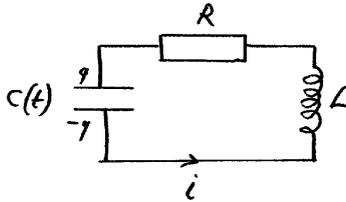


Figure 2

Soit le changement de variable $x = q \exp\left(\frac{R}{2L} t\right)$.

On exprime q , \dot{q} , \ddot{q} en fonction de x , $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$ et t , on reporte dans l'équation en q . Après simplification par $\exp\left(\frac{-R}{2L} t\right)$ on aboutit à :

$$\ddot{x} + x \left(\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2} \right) = 0$$

Si : $C(t) = \frac{\epsilon_0 S}{e(t)}$ avec $e(t) = e_0 (1 + \cos \Omega t)$ et $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$

$$C(t) = \frac{C_0}{1 + \cos \Omega t}$$

$$\ddot{x} + x \left(\frac{1}{LC_0} - \frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC_0} \cos \Omega t \right) = 0$$

Si $C = C_0$ et dans l'hypothèse d'un mouvement pseudo-périodique $\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0} - \frac{R^2}{4L^2}$ représente le carré de la pseudo-pulsation. On peut alors écrire :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{1}{LC_0 \omega_0^2} \cos \Omega t \right) x = 0$$

Il s'agit là encore d'une équation de Mathieu.

• **Le circuit oscillant L, C**

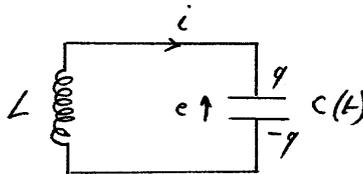


Figure 3

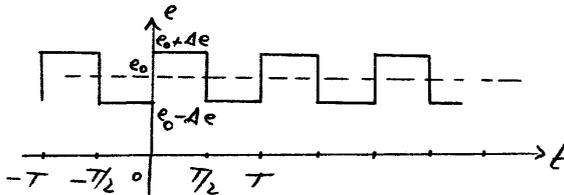


Figure 4

$$L \frac{di}{dt} + \frac{q}{C(t)} = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e_0 + \epsilon \Delta e} \quad \epsilon = +1 \text{ si } 0 < t < \frac{T}{2} \text{ et } -1 \text{ si } -\frac{T}{2} < t < 0$$

$$C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e_0}$$

$$C = \frac{C_0}{1 + \epsilon \frac{\Delta e}{e_0}} \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \left(1 + \epsilon \frac{\Delta e}{e_0} \right) q = 0$$

Soit $\Omega^2 = \omega_0^2 \frac{\Delta e}{e_0}$. L'équation devient :

$$\ddot{q} + (\omega_0^2 + \epsilon \Omega^2) q = 0$$

ou $\ddot{q} + \omega_1^2 q = 0$ si $0 < t < \frac{T}{2}$ avec $\omega_1^2 = \omega_0^2 + \Omega^2$

$\ddot{q} + \omega_2^2 q = 0$ si $-\frac{T}{2} < t < 0$ avec $\omega_2^2 = \omega_0^2 - \Omega^2$

L'équation différentielle est de la forme :

$$\ddot{q} + \omega^2(t) q = 0 \text{ avec } \omega(t + T) = \omega(t)$$

Remarque : si $\Delta e \ll e_0 \quad \Omega \ll \omega_0 \quad \omega_1 \approx \omega_0 + \frac{\Omega^2}{2 \omega_0}$

$$\omega_2 \approx \omega_0 - \frac{\Omega^2}{2 \omega_0}$$

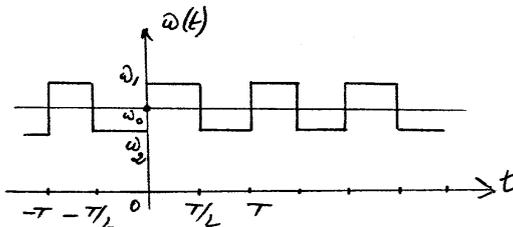


Figure 5

2. RÉOLUTION

On se place dans le cas précédent. L'espace vectoriel des solutions est de dimension 2.

Soit 2 solutions indépendantes $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

$$\ddot{q}_1 + \omega^2(t) q_1(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\ddot{q}_2 + \omega^2(t) q_2(t) = 0 \quad \forall t$$

$$\omega(t + T) = \omega(t)$$

$$\Rightarrow q_1(t + T) \text{ et } q_2(t + T)$$

sont également solutions.

Toute solution peut s'exprimer en fonction des 2 solutions indépendantes par une application linéaire dans l'espace vectoriel des solutions.

$$\begin{pmatrix} q_1(t + T) \\ q_2(t + T) \end{pmatrix} = (A) \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix}$$

(A) est la matrice de l'application, diagonalisable dans la base des vecteurs propres.

Soit $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de (A) et \vec{u}_1, \vec{u}_2 les vecteurs propres correspondants, $q_1^*(t), q_2^*(t)$ les composantes du vecteur $(q_1(t), q_2(t))$ dans la base \vec{u}_1, \vec{u}_2 .

$$\begin{pmatrix} q_1^*(t + T) \\ q_2^*(t + T) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \end{pmatrix}$$

$$q_1^*(t + T) = \mu_1 q_1^*(t)$$

$$q_2^*(t + T) = \mu_2 q_2^*(t)$$

Posons :

$$M_1(t) = q_1^*(t) \mu_1^{-\frac{t}{T}}$$

$$M_2(t) = q_2^*(t) \mu_2^{-\frac{t}{T}}$$

$$M_1(t + T) = \mu_1^{-1} \cdot \mu_1^{-\frac{t}{T}} q_1^*(t + T) = \mu_1^{-\frac{t}{T}} q_1^*(t) = M_1(t)$$

et de même $M_2(t + T) = M_2(t) \forall t$.

$M_1(t)$ et $M_2(t)$ sont des fonctions périodiques de période T . La quantité $\dot{q}_1^* q_2^* - \dot{q}_2^* q_1^*$ s'appelle le Wronskien de l'équation différentielle linéaire. Montrons qu'elle est constante.

$$\ddot{q}_1^* + \omega^2 q_1^* = 0 \quad \times q_2^*$$

$$\ddot{q}_2^* + \omega^2 q_2^* = 0 \quad \times q_1^*$$

$$\ddot{q}_1^* q_2^* - \ddot{q}_2^* q_1^* + \omega^2 (q_1^* q_2^* - q_1^* q_2^*) = 0$$

$$\frac{d}{dt} (\dot{q}_1^* q_2^* - \dot{q}_2^* q_1^*) = 0$$

$$\dot{q}_1^* q_2^* - \dot{q}_2^* q_1^* = \text{cste}/\text{à } t.$$

Entre t et $t + T$, on a la même constante :

$$(\dot{q}_1^* q_2^* - \dot{q}_2^* q_1^*)_t = (\dot{q}_1^* q_2^* - \dot{q}_2^* q_1^*)_{t+T}$$

or
$$\dot{q}_i^*(t+T) = \mu_i q_i^*(t) \quad i = 1, 2$$

En reportant, on obtient $\mu_1 \mu_2 = 1$, or l'équation aux valeurs propres de la matrice :

$$(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

s'écrit :

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} - \mu & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \mu \end{pmatrix} = 0$$

soit :

$$(a_{11} - \mu)(a_{22} - \mu) - a_{12} a_{21} = 0$$

$$\mu^2 - \text{trace}A \cdot \mu + \det A = 0$$

Comme $\det A = \mu_1 \mu_2$, $\det A = 1$

La trace se conserve par changement de base :

$$\mu_1 + \mu_2 = \text{trace}A = 2N \quad \text{par définition de } N.$$

$$\mu^2 - 2N\mu + 1 = 0 \quad \text{équation aux valeurs propres.}$$

$$\begin{aligned} \text{Les racines sont } \mu_1 &= N + \sqrt{N^2 - 1} \\ \mu_2 &= N - \sqrt{N^2 - 1} \end{aligned}$$

Les a_{ij} sont réels, N aussi mais $N \in \mathbb{R}$ (> 0 , < 0 ou nul).

Si $|N| > 1$ μ_1, μ_2 réels > 0 et de mêmes signes mais l'une des 2 racines est supérieure à l'unité en valeur absolue, l'autre inférieure.

$$\mu_1, \mu_2 \text{ de mêmes signes, } |\mu_1| > 1, |\mu_2| < 1$$

$$\text{Si } |N| = 1 \quad \mu_1 = \mu_2 = \pm 1 \quad (+1 \text{ si } N = 1 \text{ et } -1 \text{ si } N = -1)$$

$$\text{Si } |N| < 1 \quad \mu_1 \text{ et } \mu_2 \text{ complexes}$$

$$\mu_1 = \mu_2^* = N + i\sqrt{1 - N^2}$$

$$\text{or} \quad |\mu_1| = 1 \Rightarrow \mu_1 = e^{i\theta} \quad \mu_2 = e^{-i\theta}$$

$q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont des fonctions linéaires de $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$. Pour les déterminer, il faut obtenir les vecteurs propres \vec{u}_1 (associé à μ_1) et \vec{u}_2 (associé à μ_2) et en déduire la matrice de changement de base S .

$$\text{Si } \vec{u}_1 = (\alpha_1, \beta_1) \text{ et } \vec{u}_2 = (\alpha_2, \beta_2)$$

$$\begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \end{pmatrix} = (S) \begin{pmatrix} q_1^*(t) \\ q_2^*(t) \end{pmatrix} \text{ avec } (S) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{pmatrix}$$

Ceci montre que q_1^* et q_2^* obéissent aux mêmes équations que q_1 et q_2 .

Il n'est cependant pas nécessaire de faire ce calcul pour conclure sur la stabilité des oscillations.

• Étude de la stabilité

$q(t)$ est une combinaison linéaire de $q_1(t)$ et $q_2(t)$.

$q(t) = Aq_1(t) + Bq_2(t)$ où A et B sont des constantes définies par les conditions initiales ; $q(t)$ comme $q_1(t)$ et $q_2(t)$ est combinaison linéaire de $q_1^*(t)$ et $q_2^*(t)$.

En conséquence :

si $|N| > 1$ $\lim_{t \rightarrow \infty} |q| \rightarrow \infty$ comme $(\mu_1)^{\frac{t}{T}}$ car chaque fois que t augmente de T , q_1^* est multipliée par μ_1 et q_2^* par μ_2 (et du fait que $|\mu_1| > 1$).

Remarquons que si μ_1 est < 0 , le terme divergent change de signe quand t devient $t + T$.

Indiquons qu'il s'agit d'une divergence exponentielle en $\exp\left[\frac{\ln \mu_1}{T} t\right]$

Dans ce cas, on dit qu'il y a instabilité des oscillations et **résonance paramétrique**.

Si $|N| = 1$ $q(t)$ est une fonction périodique de période T si $N = 1$ et de période $2T$ si $N = -1$ (car $(-1)^{\frac{t}{T}}$ change de signe quand t augmente de T). Dans ce cas, il y a quasi stabilité.

Si $|N| < 1$ $q(t)$ est une combinaison linéaire de $M_1(t) e^{i \frac{\theta t}{T}}$ et $M_2(t) e^{-i \frac{\theta t}{T}}$ or $q(t)$ étant réelle, $q(t)$ est combinaison linéaire de $M(t) \cos \theta \frac{t}{T}$ et $M(t) \sin \theta \frac{t}{T}$ avec $M(t)$ périodique, combinaison linéaire de $M_1(t)$ et $M_2(t)$, de période T .

Il s'agit d'une fonction bipériodique mettant en jeu les périodes T et $\delta = 2\pi \frac{T}{\theta}$.

Il y a périodicité si $\frac{\delta}{T}$ est rationnel mais absence de périodicité si $\frac{\delta}{T}$ est irrationnel.

• **Détermination de A**

Déterminons la matrice A pour pouvoir évaluer N et dégager la condition de résonance paramétrique. Il faut injecter les conditions de continuité :

- i continue, dans L, donc dans le circuit,
- q continue dans C.

On étudie le domaine $-T/2, +T/2$.

$$\text{si :} \quad -\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \quad q = A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t$$

$$i = \dot{q} = \omega_2 (-A \sin \omega_2 t + B \cos \omega_2 t)$$

$$\text{et si :} \quad 0 \leq t \leq +\frac{T}{2} \quad q = C \cos \omega_1 t + D \sin \omega_1 t$$

$$i = \omega_1 (-C \sin \omega_1 t + D \cos \omega_1 t)$$

$$q \text{ continue à } t = 0 \Rightarrow A = C$$

$$i \text{ continue à } t = 0 \Rightarrow \omega_2 B = \omega_1 D$$

D'où la solution générale :

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \quad q = A \cos \omega_2 t + B \sin \omega_2 t$$

$$i = \omega_2 (-A \sin \omega_2 t + B \cos \omega_2 t)$$

$$0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad q = A \cos \omega_1 t + \frac{\omega_2}{\omega_1} B \sin \omega_1 t$$

$$i = \omega_1 (-A \sin \omega_1 t + \frac{\omega_2}{\omega_1} B \cos \omega_1 t)$$

et deux solutions indépendantes :

q_1 correspondant aux conditions initiales à $t = 0$:

$$q = q_0 = 1C, i = i_0 = 0A$$

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \quad q_1 = \cos \omega_2 t$$

$$0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad q_1 = \cos \omega_1 t$$

q_2 correspondant aux conditions initiales à $t = 0$:

$$q = q_0 = 0C \text{ et } i = i_0 = 1A$$

$$-\frac{T}{2} \leq t \leq 0 \quad q_2 = \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 t$$

$$0 \leq t \leq \frac{T}{2} \quad q_2 = \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 t$$

Toute solution est combinaison linéaire de ces 2 solutions entre $-T/2$ et $T/2$.

$$q_1 \left(t + \frac{T}{2} \right) = \cos \omega_2 \left(t + \frac{T}{2} \right) = \cos \omega_2 \frac{T}{2} \cdot q_1(t) - \omega_2 \sin \omega_2 \frac{T}{2} \cdot q_2(t)$$

$$q_2 \left(t + \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} \cdot q_1(t) + \cos \omega_2 \frac{T}{2} \cdot q_2(t)$$

Ce résultat n'est valable que à $t = -T/2$, d'où :

$$\begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 \frac{T}{2} & -\omega_2 \sin \omega_2 \frac{T}{2} \\ \frac{1}{\omega_2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} & \cos \omega_2 \frac{T}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \left(-\frac{T}{2} \right) \\ q_2 \left(-\frac{T}{2} \right) \end{pmatrix}$$

Par un calcul analogue entre $t = 0$ et $T/2$

$$\begin{pmatrix} q_1 \left(\frac{T}{2} \right) \\ q_2 \left(\frac{T}{2} \right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 \frac{T}{2} & -\omega_1 \sin \omega_1 \frac{T}{2} \\ \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \frac{T}{2} & \cos \omega_1 \frac{T}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1(0) \\ q_2(0) \end{pmatrix}$$

Comme $q_i(t)$ est continue en $t = 0$: (A) = $A_1 A_2$

$$(A) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 \frac{T}{2} \cos \omega_2 \frac{T}{2} - \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} & - \left(\omega_2 \cos \omega_1 \frac{T}{2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} + \omega_1 \sin \omega_1 \frac{T}{2} \cos \omega_2 \frac{T}{2} \right) \\ \frac{1}{\omega_1} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \cos \omega_2 \frac{T}{2} + \frac{1}{\omega_2} \cos \omega_1 \frac{T}{2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} & \cos \omega_1 \frac{T}{2} \cos \omega_2 \frac{T}{2} - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \sin \omega_2 \frac{T}{2} \end{pmatrix}$$

La demi-trace est :

$$N = \cos \omega_1 \frac{T}{2} \cos \omega_2 \frac{T}{2} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \sin \omega_2 \frac{T}{2}$$

On peut trouver N plus simplement sans rechercher la matrice A , en recherchant l'équation aux valeurs propres μ .

On sait qu'il existe 2 solutions indépendantes $q_1^*(t)$, $q_2^*(t)$ qui dans la base des vecteurs propres de A possèdent la propriété :

$$q_i^*(t+T) = \mu_i q_i^*(t) \quad i = 1,2 \quad \forall t$$

Pour la dérivée, c'ad pour l'intensité on a la même propriété :

$$\dot{q}_i^*(t+T) = \mu_i \dot{q}_i^*(t)$$

On a de ce fait :

$$A \cos \omega_2 \frac{T}{2} - B \sin \omega_2 \frac{T}{2} = \frac{1}{\mu} \left(A \cos \omega_1 \frac{T}{2} + B \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \right)$$

$$\omega_2 \left(A \sin \omega_2 \frac{T}{2} + B \cos \omega_2 \frac{T}{2} \right) = \frac{1}{\mu} \omega_1 \left(-A \sin \omega_1 \frac{T}{2} + B \frac{\omega_2}{\omega_1} \cos \omega_1 \frac{T}{2} \right)$$

ce qui conduit au système d'équations linéaires homogènes en A et B :

$$A \left(\cos \omega_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{\mu} \cos \omega_1 \frac{T}{2} \right) - B \left(\sin \omega_2 \frac{T}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_2 \frac{T}{2} \right) = 0$$

$$A \left(\sin \omega_2 \frac{T}{2} + \frac{1}{\mu} \frac{\omega_1}{\omega_2} \sin \omega_1 \frac{T}{2} \right) + B \left(\cos \omega_2 \frac{T}{2} - \frac{1}{\mu} \cos \omega_1 \frac{T}{2} \right) = 0$$

Il n'admet de solutions non nulles en A et B que si son déterminant est nul. Le calcul, pénible, conduit à l'équation aux valeurs propres en μ :

$$\mu^2 - 2\mu N + 1 = 0$$

avec l'expression de N déjà obtenue précédemment.

• Condition de résonance paramétrique

Soit :
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Elle s'écrit :

$$\left| \cos \pi \frac{\omega_1}{\omega} \cos \pi \frac{\omega_2}{\omega} - \frac{\omega_1^2 + \omega_2^2}{2\omega_1 \omega_2} \sin \pi \frac{\omega_1}{\omega} \sin \pi \frac{\omega_2}{\omega} \right| > 1$$

soit :

$$x = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2$$

et de ce fait :

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right)^2 = x + y, \quad \left(\frac{\omega_2}{\omega}\right)^2 = x - y$$

Si $x > y$ c'ad $\omega_0 > \Omega$ (en général, c'est le cas), la condition s'écrit :

$$(i) \quad \left| \cos \pi \sqrt{x+y} \cos \pi \sqrt{x-y} - \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}} \sin \pi \sqrt{x+y} \sin \pi \sqrt{x-y} \right| > 1$$

si $x < y$ $\sqrt{x-y} = \pm i \sqrt{y-x}$ et alors la condition s'écrit :

$$(ii) \quad \left| \cos \pi \sqrt{x+y} \operatorname{ch} \pi \sqrt{y-x} - \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}} \sin \pi \sqrt{x+y} \operatorname{sh} \pi \sqrt{y-x} \right| > 1$$

Il s'agit donc de tracer des courbes représentatives de fonctions implicites $f(x,y) = \pm 1$ pour obtenir les domaines de stabilité. On peut le faire par programmation.

Cependant on peut obtenir des renseignements quand $\Omega \ll \omega_0$ ($y \rightarrow 0$).

(i) devient :

$$\left| \cos^2 \pi \sqrt{x} - \sin^2 \pi \sqrt{x} \right| = 1$$

ou :

$$\left| \cos^2 2 \pi \sqrt{x} \right| = 1$$

Si $N = +1$ $\cos 2 \pi \sqrt{x} = 1$ (solution périodique de période T en $q(t)$)
alors $2 \pi \sqrt{x} = 2 p \pi$ $p \in \mathbb{N}$:

$$\sqrt{x} = p$$

ou :

$$\frac{\omega_0}{\omega} = 0, 1, 2, 3, \dots$$

La solution nulle est à rejeter : physiquement on ne peut avoir

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC_0}} = 0$$

Si $N = -1$ $\cos 2 \pi \sqrt{x} = -1$

$$\sqrt{x} = p + \frac{1}{2}$$

ou :

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$$

En conséquence si $\Omega < \omega_0$, la résonance paramétrique se produit pour $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

Physiquement, on peut comprendre que l'effet de résonance paramétrique est le plus efficace quand $\omega = 2 \omega_0$ c'est à dire quand la fréquence de l'excitation est double de la fréquence propre.

3. POUR UNE EXPLICATION PHYSIQUE DU PHÉNOMÈNE

Soit la restriction $\Delta e \ll e_0$ - Si $\Delta e = 0$, alors $\omega(t) = \omega_0 \forall t$ et $q(t) = Q \cos \omega_0 t$. On conserve cette forme quand $\Delta e \neq 0$ mais en supposant que $Q(t)$ varie lentement.

Pour faire varier la distance e , un opérateur va fournir de l'énergie pour écarter les plaques (qui sous l'action des forces électrostatiques exercées par l'armature fixe sur l'armature mobile, tendent à se rapprocher).

L'opérateur applique la force minimale donc $\vec{F}_{op} = -\vec{F}_{el}$ si $p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$ est la pression électrostatique :

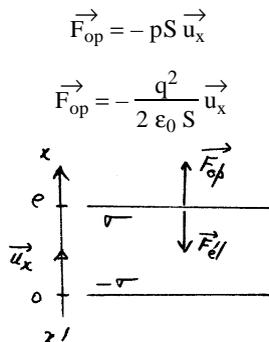


Figure 6

L'opérateur va, pour fournir de l'énergie et faciliter ainsi la résonance paramétrique, appliquer la force \vec{F}_{op} au moment où q est extrémale et quand les armatures s'écartent. L'armature mobile est bloquée pendant la durée $T/2$ à partir de $t = 0$ et débloquée à $T/2$.

Sur la figure 7 on a représenté les variations de $e(t)$ et $q(t)$ pour $T = \frac{T_0}{2}$ ou $\omega = 2 \omega_0$ càd $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{1}{2}$

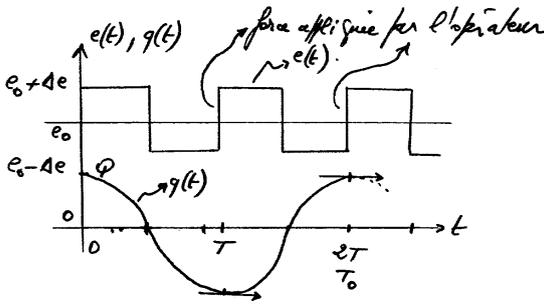


Figure 7 : $q(t) = Q(t) \cos \omega_0 t$
 La force exercée par l'opérateur fournit du travail à $t = 0, T, 2T, \dots$

L'énergie fournie sur une période T est :

$$W_{op}(T) = \left| F_{op_{max}} \cdot 2 \Delta e \right| = \frac{Q^2}{2 \epsilon_0 S} \cdot 2 \Delta e = \frac{Q^2}{C_0} \cdot \frac{\Delta e}{e_0}$$

or $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ d'où $\frac{\delta C}{C_0} = -\frac{2 \Delta e}{e_0}$, δC variation de C entre les positions extrêmes de l'armature.

$$W_{op}(T) = \frac{Q^2}{2 C_0^2} |\delta C|$$

L'énergie emmagasinée dans le circuit à t est :

$$E = \frac{1}{2} L i^2 + \frac{q^2}{2C}$$

$$i = \dot{q} = -Q \omega_0 \sin \omega_0 t$$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}$$

$$E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C_0} \sin^2 \omega_0 t + \frac{Q^2}{2C} \cos^2 \omega_0 t$$

Lors des discontinuités de C, on prend $C = C_0$

$$E(nT) = \frac{Q^2 (nT)}{2 C_0}$$

$$W_{op}(T) = \delta E = E((n+1)T) - E(nT) = \frac{\delta Q^2}{2 C_0} = \frac{Q^2}{2 C_0^2} |\delta C|$$

d'où :

$$\frac{\delta Q^2}{Q^2} = \frac{|\delta C|}{C_0}$$

et :

$$Q(t) = Q_0 \exp \frac{|\delta C|}{2 C_0} t$$

Il y a effectivement amplification de $Q(t)$.

On peut refaire le raisonnement pour $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{p}{2}$, $p = 1, 2, \dots$ ou

$$T = p \frac{T_0}{2}$$

Si $p = 2$ $T = T_0$:

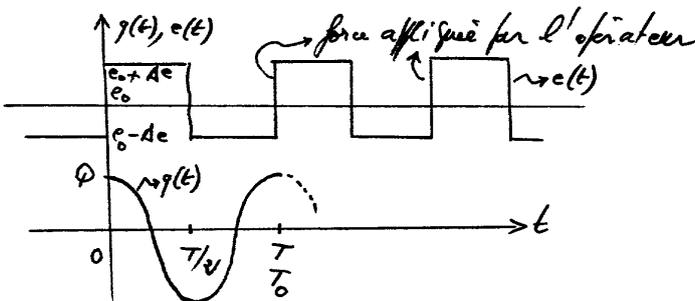


Figure 8

Si $p = 3$ $T = \frac{3}{2} T_0$ ou $T_0 = \frac{2}{3} T$

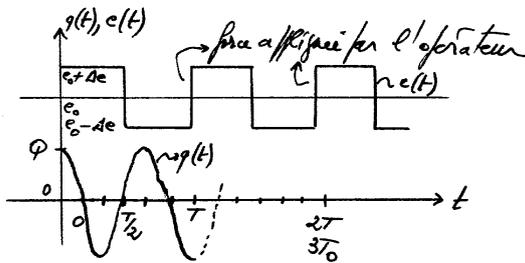


Figure 9

Et ainsi de suite : on voit que pour plus d'oscillations de $q(t)$, l'opérateur fournit seulement du travail à $0, T, 2T, \dots$; il semble donc que le cas $2T = T_0$ soit le plus efficace.

On peut montrer que la résonance paramétrique ne se produit que pour $\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{p}{2}$ par des considérations physiques simples.

Supposons que $e = e_0 + a \sin (\omega t + \varphi)$ plutôt que selon une succession de créneaux.

Sur une période T , l'énergie fournie par l'opérateur est

$$W_{op}(T) = \int_0^T F_{op} \cdot de$$

avec $F_{op} = \frac{q^2}{2 \epsilon_0 S} = \frac{q^2}{2 C_0 e_0} = \frac{Q^2 \cos^2 \omega_0 t}{2 C_0 e_0} = \frac{Q^2}{4 C_0 e_0} (1 + \cos 2 \omega_0 t)$

$$\begin{aligned} W_{op}(T) &= \frac{Q^2}{4 C_0 e_0} \cdot \frac{2 \pi a}{T} \int_0^T (1 + \cos 2 \omega_0 t) \cos (\omega t + \varphi) dt \\ &= \frac{\pi Q^2 a}{4 C_0 e_0 T} \int_0^T \left\{ \cos [(2\omega_0 - \omega) t - \varphi] + \cos [(2 \omega_0 + \omega) t - \varphi] \right\} dt \end{aligned}$$

La seconde intégrale est toujours nulle mais la première ne l'est que si $\omega \neq 2 \omega_0$.

Si $\omega = 2\omega_0$ $W_{op}(T) = \frac{\pi Q^2 a}{4 C_0 e_0} \sin \varphi$ est positif ou négatif selon la valeur de φ .

Si φ est bien choisi l'opérateur peut apporter à chaque période T plus d'énergie qu'il en est consommée par effet Joule et il y a résonance paramétrique.

Si on a une suite de créneaux pour $e(t)$, on peut décomposer cette fonction en série de Fourier.

$$e(t) = e_0 \sum_{p=1}^{\infty} a_p \sin(\omega_p t + \varphi_p)$$

$$\text{avec } \omega_p = p\omega \quad p \in \mathbb{N}$$

Le même calcul que précédemment montre que l'opérateur ne peut fournir de l'énergie que si :

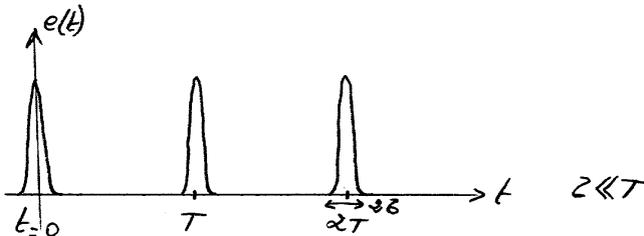
$$2\omega_0 = \omega_p = p\omega$$

$$\frac{\omega_0}{\omega} = \frac{p}{2} \quad p = 1, 2, \dots$$

On retrouve le résultat déjà obtenu.

Remarquons qu'il ne dépend pas de l'expression de a_p : il suffit que $e(t)$ varie à la période T , sans être forcément une suite de créneaux ou sinusoïdale.

On peut imaginer que $e(t)$ soit une succession de brefs aller et retour de période T et que l'opérateur n'applique une force qu'au moment où $e(t)$ augmente.



4. LA PROGRAMMATION DU PHÉNOMÈNE

• Résultats graphiques

1. Circuit L, C dont l'armature mobile se déplace selon une fonction créneau :

A - Un 1^{er} programme (non donné pour raison de place) fournit le tracé de l'amplitude en fonction du temps d'une part et celui de la trajectoire dans l'espace des phases (vitesse en fonction de l'amplitude).

La résolution de l'équation différentielle est effectuée selon la méthode de Runge-Kutta.

La fonction créneau se définit facilement en utilisant l'opérateur booléen `odd()`.

On peut trouver le fichier G640C350. EGA et le fichier graphe. Lib. Le 1^{er} permet d'utiliser une carte EGA. L'ordinateur utilisé est muni d'une carte VGA. Le fichier modulog G640C350. EGA a été modifié pour travailler en résolution 640 x 480.

Ces fichiers inclus de Modulog se trouvent dans tous les lycées ayant des classes préparatoires. Pour améliorer la vitesse d'exécution, on peut remplacer la routine du tracé d'un pixel par une routine in line ou en assembleur.

Le schéma 1 donne l'exemple d'une trajectoire dans l'espace des phases dans le cas de l'instabilité ; on a une suite de portions d'ellipses de plus en plus grandes.

Le schéma 2 le donne dans le cas d'oscillations stables. Selon les valeurs respectives de x et y , dans l'espace des phases, on peut avoir des portions de trajectoires en forme d'ellipse ($x > y$) en forme de droite ($x = y$) parallèle à l'axe des amplitudes ou en forme de branche d'hyperbole ($x < y$).

B - Un 2^e programme (non donné pour raison de place) permet le tracé de zones de stabilité et d'oscillations instables.

Le schéma 3 fournit les courbes $f(x,y)$ pour $N = \pm 1$. On a instabilité au voisinage de l'axe des abscisses pour $x = 0,25 ; 1 ; 2,25 ; 4 ; 6,25 ; \dots$ On en déduit les zones d'instabilité par continuité pour les valeurs de $y > 0$.

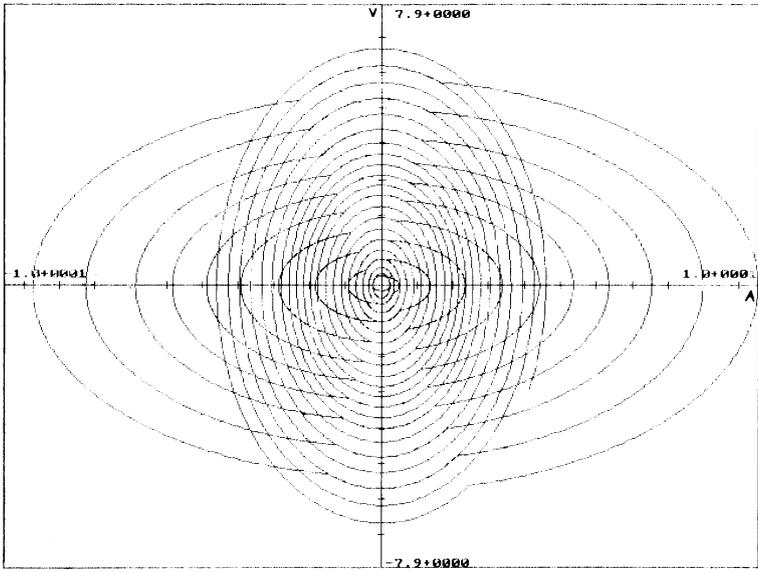


Schéma 1 : $x = 1,2$ $y = 0,8789$
 Trajectoire dans l'espace des phases.
 Cas d'oscillations instables.

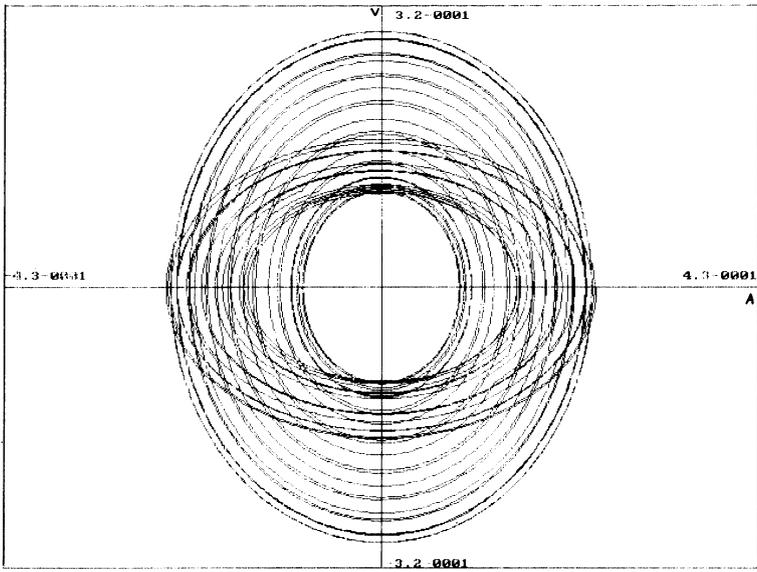


Schéma 2 : $x = 1$ $y = 0,5$
 Trajectoire dans l'espace des phases.
 Cas d'oscillations stables.

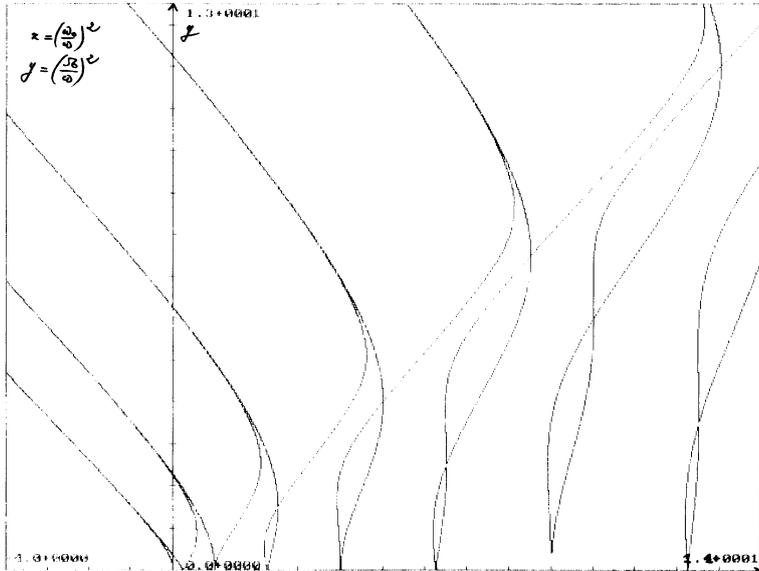


Schéma 3 : $x = 1,2$ $y = 0,8789$
Zone de stabilité de l'oscillateur paramétrique.

Le tracé des courbes $f(x,y)$, implicites, est exécuté le plus simplement possible : pour chaque pixel, en abscisse, on parcourt la colonne de pixels à cette abscisse. Quand $f(x,y)$ change de signe, on porte le point. Le tracé peut être long avec un ordinateur lent. Il est préférable de disposer d'un coprocesseur arithmétique. En turbo-Pascal 6.0, dans ces conditions, le type réel le plus rapide est le type double.

2. Circuit dont l'armature mobile se déplace selon une loi sinusoïdale

L'équation de l'oscillateur est du type $\frac{d^2y}{d\theta^2} + (\eta + \gamma \cos 2\theta) y = 0$ en utilisant une variable temps réduit.

Le programme n'est pas fourni.

Dans ce cas, la diversité des courbes est assez remarquable.

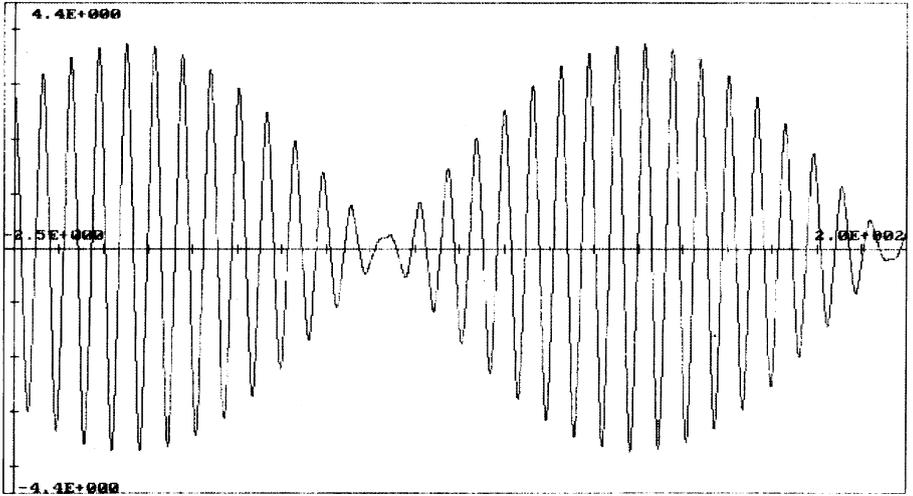


Schéma 1 : amplitude en fonction du temps.
 $\eta = 0,5 \gamma = 0,943$

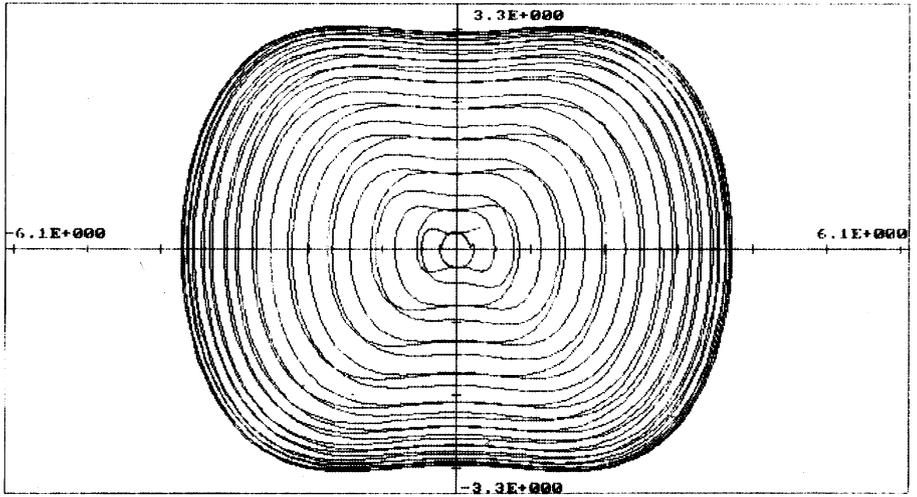


Schéma 1 : trajectoire de l'espace des phases.
 $\eta = 0,5 \gamma = 0,943$

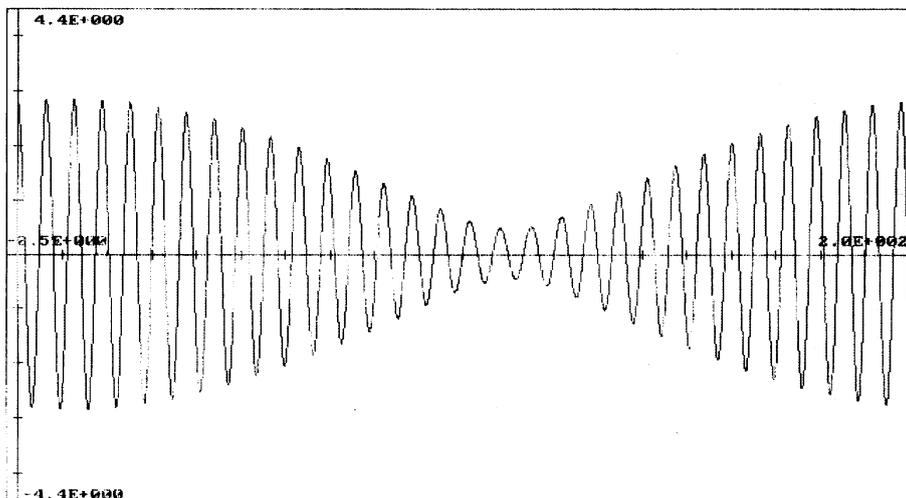


Schéma 2 : amplitude en fonction du temps.
 $\eta = 0,9 \gamma = 0,183$

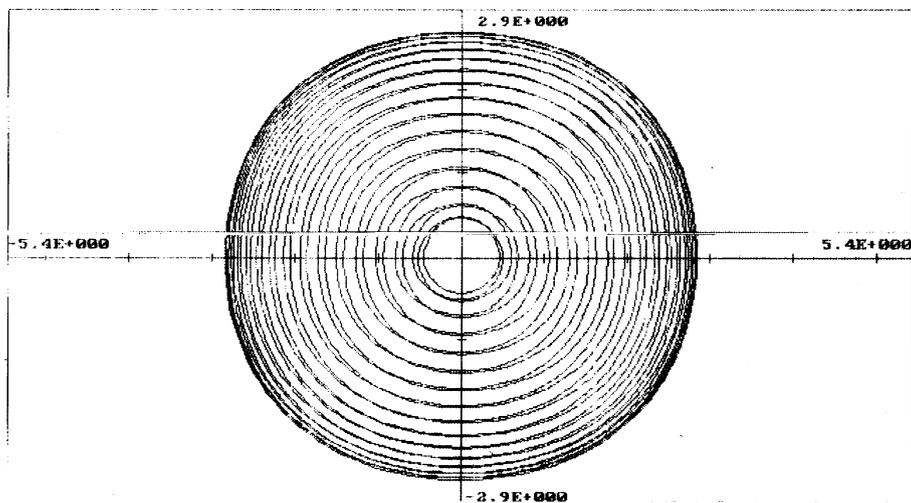


Schéma 2 : trajectoire de l'espace des phases.
 $\eta = 0,9 \gamma = 0,183$

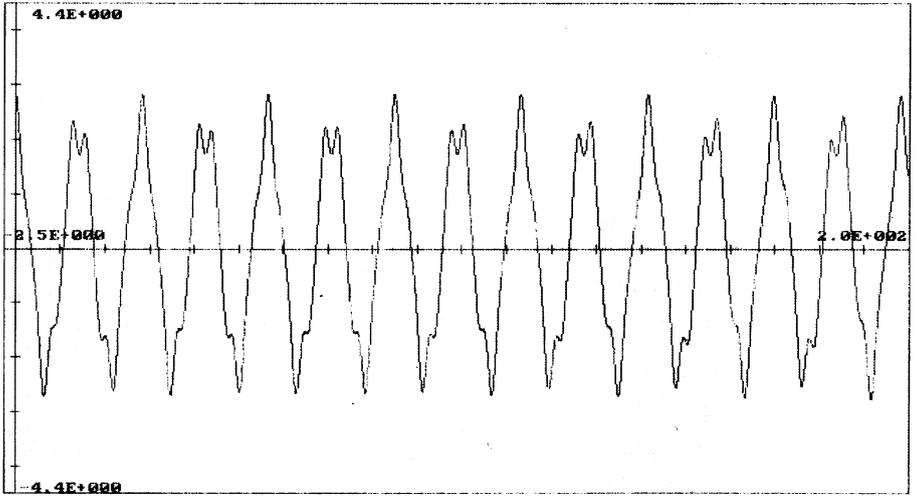


Schéma 3 : amplitude en fonction du temps.

$$\eta = 0,1 \quad \gamma = 0,8$$

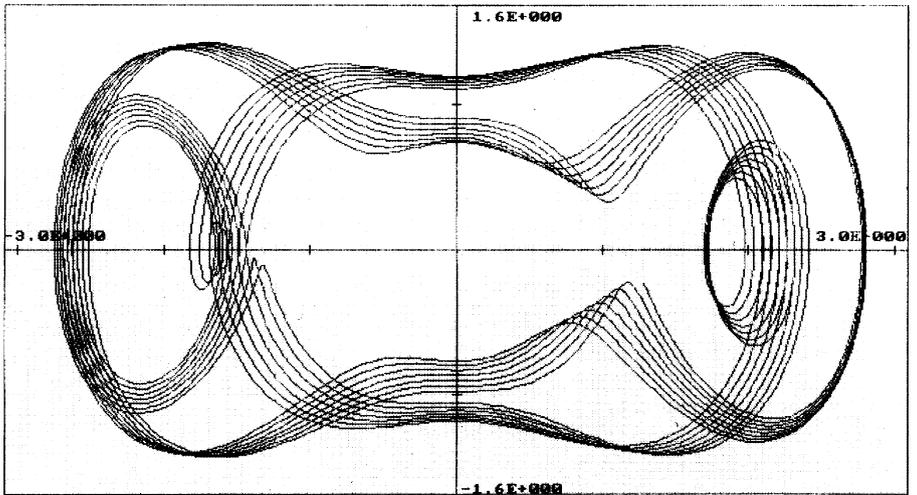


Schéma 3 : Trajectoire de l'espace des phases.

$$\eta = 0,1 \quad \gamma = 0,8$$

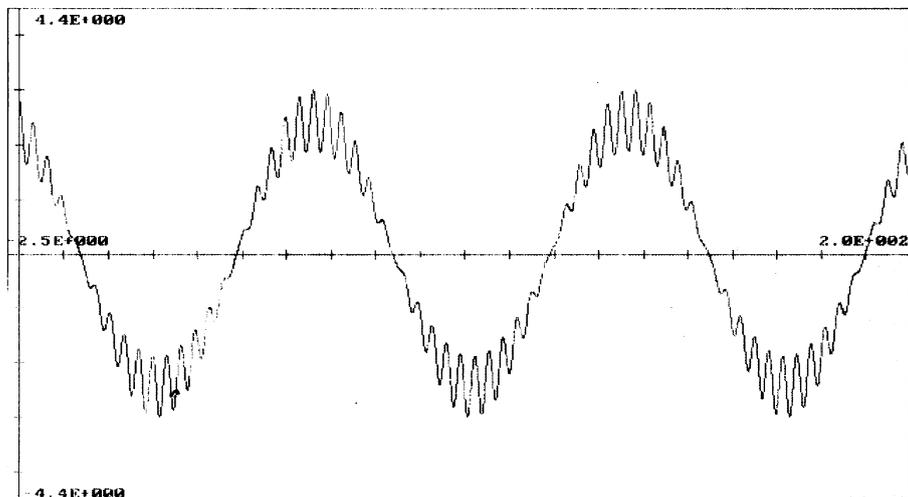


Schéma 4 : amplitude en fonction du temps.
 $\eta = -0,1$ $\gamma = 0,937$

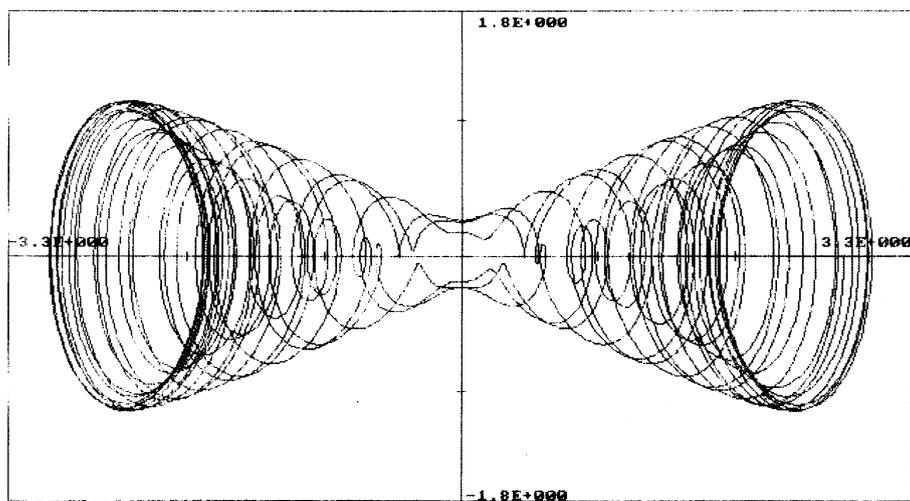


Schéma 4 : Trajectoire de l'espace des phases.
 $\eta = -0,1$ $\gamma = 0,937$

BIBLIOGRAPHIE

J.P. MATHIEU - Vibrations et phénomènes de propagation, tome 1, Oscillateurs, Masson, 1974.

V. ARNOLD - Méthodes mathématiques de la mécanique classique, Éditions de Moscou, 1976.

S. TIMOSHENKO - Théorie de vibrations, Librairie Polytechnique Ch. Beranger, 1976.

LANDAU et LIFCHITZ - Mécanique, tome 1, Éditions de la Paix, Moscou.

P. BERGÉ, Y. PONEAU et Ch. VIDAL - L'ordre dans le chaos, Hermann, 1984.

T.W. KIBBLE - Mécanique classique, Édiscience, 1972.