

Un modèle électronique simple et exact de l'oscillateur paramétrique

par F. X. BALLY

100, rue de la Chapelle, 75018 Paris

et P. BOISSÉ

École Normale Supérieure, 24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05

L'oscillateur paramétrique est un des systèmes non linéaires les plus simples ; à ce titre il est souvent mis en avant pour illustrer les phénomènes spectaculaires à la fois très riches et complexes qui caractérisent ce domaine de la Physique. Rappelons qu'un oscillateur est dit «paramétrique» lorsque l'on peut agir sur lui de manière à modifier périodiquement sa fréquence propre. L'étude de l'oscillateur paramétrique n'a rien d'un exercice purement académique. En effet, on rencontre fréquemment de tels systèmes : un pendule simple de longueur variable, une balançoire... sont des exemples classiques (voir les références [1], [2] et [3] pour d'autres exemples). De plus ses propriétés ont été mise à profit dans de nombreuses applications dont l'amplificateur paramétrique (voir réf. [2] et [4]).

Dans ce qui suit nous proposons un modèle électronique de l'oscillateur paramétrique ; il s'agit d'un système simple construit autour d'un circuit multiplieur. Son avantage vis-à-vis du montage classique utilisant une diode varicap (réf. [1]) réside dans le fait qu'il obéit exactement à l'équation paramétrique (dite «de Hill» lorsque l'excitation est périodique ou «de Mathieu» lorsque celle-ci est de plus sinusoïdale). Notre montage permet donc une étude expérimentale quantitative des principales caractéristiques de l'oscillateur paramétrique (en particulier de l'existence de seuils d'instabilité en présence d'amortissement).

Les mesures peuvent être confrontées aux résultats analytiques. Malheureusement ces derniers ne sont facilement accessibles que pour des conditions assez restrictives ; ceci nous amène à proposer en conclusion une étude numérique de l'équation régissant l'oscillateur paramétrique.

1. PRÉSENTATION DU MODÈLE

La figure 1 montre les divers éléments du circuit ; M désigne le multiplieur (on trouvera quelques précisions et références sur ce type de composant dans [5]).

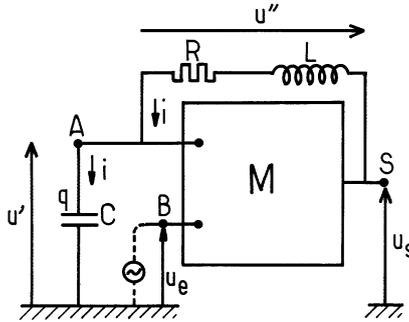


Figure 1

Avec les notations indiquées on peut écrire :

$$u'' = Ri + L \frac{di}{dt}, u' = \frac{q}{C}, i = \frac{dq}{dt}.$$

D'autre part :

$$u_s = k u_e u' = u' + u''.$$

où k est une constante caractéristique de M.

La charge q obéit donc à l'équation :

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} (1 - k u_e) = 0; \quad (1)$$

si u_e varie de manière sinusoïdale ($u_e = u_{e0} \cos((2\omega_0 + \varepsilon)t + \varphi)$ avec par exemple $\varphi = \pi$ pour simplifier les notations utilisées par la suite) on aboutit bien à l'équation classique dite de Mathieu :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\lambda \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 [1 + h \cos(2\omega t)] q = 0 \quad (2)$$

avec $\lambda = \frac{R}{2L}$, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $h = k u_{e0}$ et $2\omega = 2\omega_0 + \varepsilon$.

L'excitation (u_e) est fournie par un générateur auxiliaire (continu ou alternatif) relié au point B. Comme on le voit, cette tension permet de commander la valeur de la pulsation propre du circuit : tout se passe comme si la capacité C était pilotée par u_e (on aurait le même effet en imposant à l'épaisseur e du condensateur une variation de la forme $e = e_0 (1 - k u_e)$; cf. [1]).

Deux remarques :

a) classiquement, on rencontre en étudiant la réponse de circuits électriques du type «RLC» des équations linéaires à coefficients constants ; cette fois, on a affaire à une équation à coefficients non constants qui, du point de vue de la classification mathématique, demeure linéaire (si $q_1(t)$ et $q_2(t)$ sont solutions, $a q_1(t) + b q_2(t)$ l'est également). En fait, ce qui amène à parler de phénomène non linéaire lorsqu'on évoque l'oscillateur paramétrique c'est la relation entre l'excitation (ou tension «d'entrée» u_e) et la réponse (tension de «sortie»),

b) il n'y a pas de différence essentielle entre l'équation avec amortissement ($R \neq 0$) et sans amortissement ($R = 0$) ; en effet le changement de variable :

$$q' = qe^{\lambda t}$$

permet de se ramener à ce dernier cas (voir [6]).

2. ÉTUDE EXPÉRIMENTALE

2.1. Tension u_e constante

Lorsque u_e ne varie pas, le circuit se comporte comme un RLC classique de pulsation propre ω telle que :

$$\omega^2 = \frac{1 - k u_e}{LC} \quad (3)$$

Pour s'en assurer, il suffit de placer une source de tension (v_e) entre le condensateur et la masse puis de chercher la résonance (cela revient à introduire au second membre de (1) le terme $(k u_e - 1)v_e$).

On vérifie ainsi aisément la relation (3), k étant par ailleurs déterminé en mesurant la tension u_s après qu'une source de tension continue ait été placée sur chaque entrée de M .

2.2. Résonance paramétrique : domaine d'instabilité

On introduit une tension sinusoïdale u_e de fréquence $f_e = (2\omega_0 + \varepsilon)/2\pi$ voisine de $2f_0$ ($f_0 = \omega_0/2\pi$) et pour diverses valeurs de l'amplitude u_{e0} , on cherche l'intervalle de fréquence $[f_1(u_{e0}), f_2(u_{e0})]$ pour lequel la résonance paramétrique a lieu. L'observation a lieu à l'oscilloscope en A : en dehors de l'intervalle $[f_1, f_2]$ le signal est très faible et l'apparition de l'instabilité lorsque $f_e \approx f_1$ ou f_2 est très nette. Notons que l'amplitude des oscillations, une fois celles-ci établies, n'est en rien déterminée par l'équation (1) ; la théorie indique seulement que pour $f_1 < f_e < f_2$ l'amplitude de u' diverge exponentiellement (cf. 2.4). En pratique, il n'en est bien sûr pas ainsi : M n'effectue rigoureusement la multiplication des signaux u_e et u' que dans certaines limites et ce sont ces imperfections (non linéarités de u_s vis à vis de u' ou u_e) qui imposent finalement l'amplitude de signal résonant.

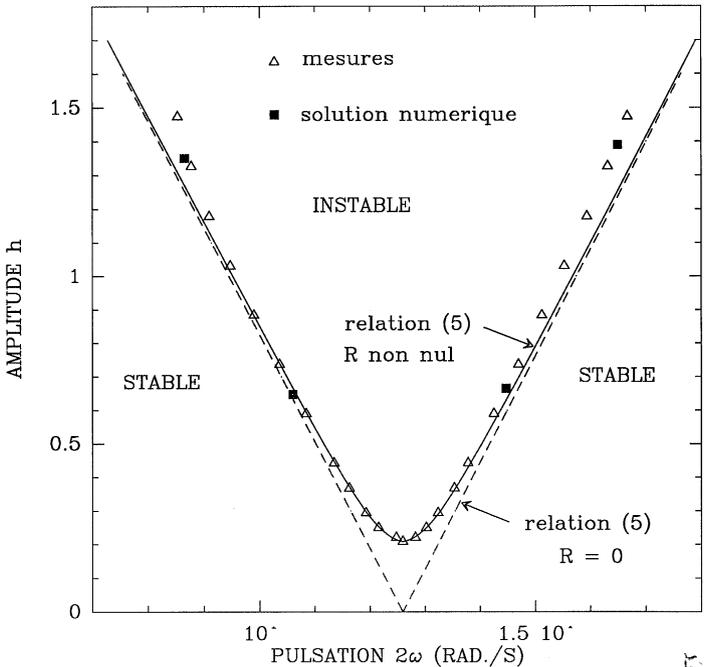


Figure 2

Les résultats présentés dans la figure 2 ont été obtenus avec $L = 0,5$ H (boîte AOIP), $C = 53,8$ nF et $R \approx 310 \Omega$ ce qui correspond à $f_0 \approx 1$ kHz, fréquence suffisamment basse pour que le multiplicateur n'introduise aucun déphasage notable. La valeur relativement élevée du coefficient de qualité, $Q \approx 10$, permet d'observer des oscillations bien sinusoïdales. En fait, R varie légèrement avec la fréquence et est donc mal connue a priori (d'autant que le courant parcourant la bobine n'est pas purement sinusoïdal ; toutefois, on a vérifié qu'ici $(\Delta R/R) / (\Delta f/f) < 20 \%$). On pourra donc, dans une certaine mesure, considérer R comme un paramètre libre lors de l'ajustement des résultats expérimentaux aux prédictions théoriques.

La théorie (références [7] et [8]) prévoit l'existence de résonances autour des fréquences $2f_0$, f_0 , $2f_0/3$ etc. La plus forte a lieu à $f_e \approx 2f_0$ et c'est celle que nous étudions ici. Dans les conditions suivantes :

$$h = k u_{e0} \ll 1, \varepsilon \ll \omega_0 \text{ et } \lambda \ll \omega_0 \quad (4)$$

on peut montrer que le domaine d'instabilité est défini par :

$$2\omega_0 - \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} < 2\pi f_e < 2\omega_e + \sqrt{\left(\frac{h\omega_0}{2}\right)^2 - 4\lambda^2} \quad (5)$$

Sur la figure 2 on a reporté les prédictions correspondant à ces relations ainsi que le résultat des mesures. Aux faibles valeurs de h , un excellent accord est obtenu pour $R = 330 \Omega$, valeur voisine de celle mesurée. Lorsque $h > 0,5$, des écarts systématiques apparaissent ce qui n'a rien de surprenant puisque les conditions (4) ne sont plus satisfaites (voir 3. à ce sujet).

2.3. Importance de l'amortissement

Sur la figure 2 est également représenté le domaine d'instabilité lorsque $\lambda = 0$ (cette condition est irréalisable en pratique car la bobine possède une résistance non nulle). Il apparaît que, à la fréquence $2f_0$, la présence d'amortissement se traduit par l'existence d'un seuil pour l'amplitude de la tension excitatrice (u_{e0s} ou $h_s = k u_{e0s}$). De (5) on déduit aisément :

$$h_s = \frac{4\lambda}{\omega_0} = \frac{2R}{L\omega_0} = \frac{2}{Q} \quad (6)$$

Cette effet de seuil illustre très clairement le caractère non linéaire de l'oscillateur paramétrique. Sur le modèle proposé, il est facile d'étudier la dépendance de h_s vis à vis de l'amortissement en introduisant une résistance extérieure ajustable (R_e) en série avec la bobine (de résistance R_L : au total $R = R_e + R_L$). Pour des valeurs croissantes de R_e il suffit de déterminer (à la fréquence $2f_0$) la valeur u_{eos} au delà de laquelle les oscillations apparaissent.

La figure 3, obtenue avec $L = 0,5$ H, $C = 0,054$ μ F et $R_L \approx 200$ Ω , montre un accord remarquable avec l'expression (6) même lorsque h approche l'unité (l'ajustement représenté donne $R_L = 240$ Ω).

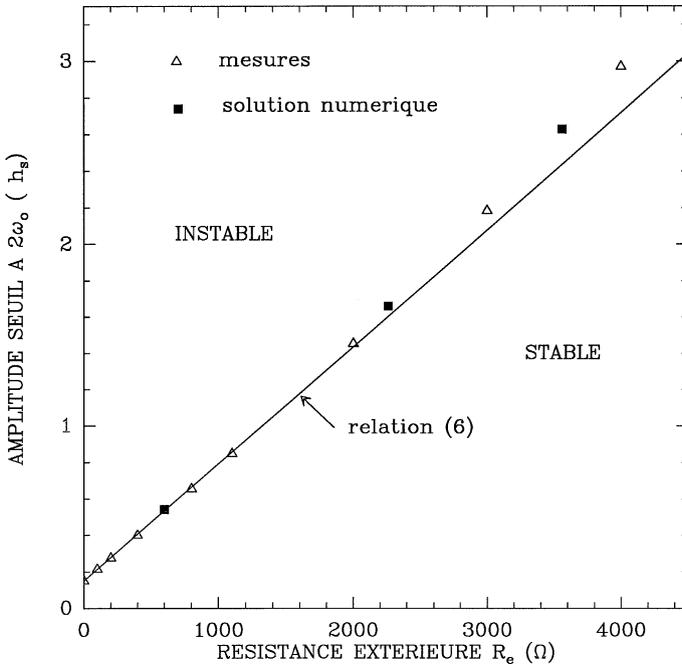


Figure 3

2.4. Taux de croissance des oscillations

La théorie prévoit que, sous les conditions (4), la solution asymptotique est de la forme :

$$u' = e^{\mu t} \cos(\omega t + \psi)$$

avec

$$\mu = s - \lambda \quad \text{et} \quad s^2 = \frac{1}{4} \left[\left(\frac{h\omega_0}{2} \right)^2 - \varepsilon^2 \right]. \quad (7)$$

Les relations (5) définissant le domaine d'instabilité traduisent simplement la condition $\mu > 0$. On s'attend donc à observer, dès que (5) est satisfaite, une oscillation d'amplitude exponentiellement croissante jusqu'à ce que les effets de saturation se manifestent.

Le démarrage de l'oscillation peut être observé relativement facilement. La figure 4 représente l'allure du signal u' observé à l'oscilloscope (en mode mémoire) lorsque l'amplitude du signal d'excitation passe brusquement de 0 à une valeur de u_{e0} pour laquelle le point de coordonnées (ω, h) se situe dans le domaine instable. Un tel enregistrement permet de vérifier que la croissance des oscillations est exponentielle et d'en mesurer le temps caractéristique. On peut déduire également de la figure 4 que lorsque la condition d'instabilité n'est plus satisfaite (par exemple en imposant $u_{e0} = 0$: c'est la fin du train de sinusoides) les oscillations s'amortissent exponentiellement avec un autre temps caractéristique.

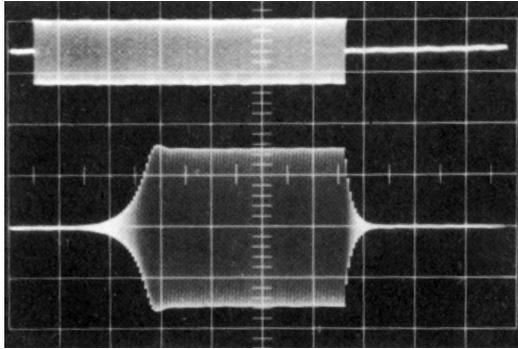


Figure 4

Si l'on dispose d'un générateur modulable en amplitude (ou en fréquence : il suffit de passer alternativement du domaine d'instabilité à celui de stabilité) on peut envisager d'observer le phénomène de manière répétée. Cependant, il n'est pas possible de bien stabiliser la figure observée ; cela est dû au caractère aléatoire de la tension initiale u'_0 qui permet le démarrage de l'oscillateur (si l'on avait strictement $u' = 0$ en permanence, l'oscillation ne pourrait se développer).

Pour plusieurs valeurs de la fréquence (donc de ε) nous avons mesuré μ (en reportant pour chaque enregistrement la valeur des maxima successifs dans un diagramme Log (amplitude) - temps) et représenté sa variation avec f (figure 5 ; les conditions expérimentales sont celles de la figure 3 avec une valeur de h constante : $h = 0,24$). On constate bien une diminution de μ (augmentation du temps de montée) lorsque la fréquence d'excitation s'éloigne de la fréquence de résonance. La montée devient très lente lorsqu'on atteint les limites du domaine d'instabilité (points A et B), fait que l'on avait déjà pu observer en déterminant les intervalles $[f_1, f_2]$ (on effectue ici une coupe à $h =$ constante sur la figure 2). Sans être excellent, l'accord reste satisfaisant compte tenu des incertitudes inhérentes à ce type de mesure (imprécision des relevés sur l'écran de l'oscilloscope).

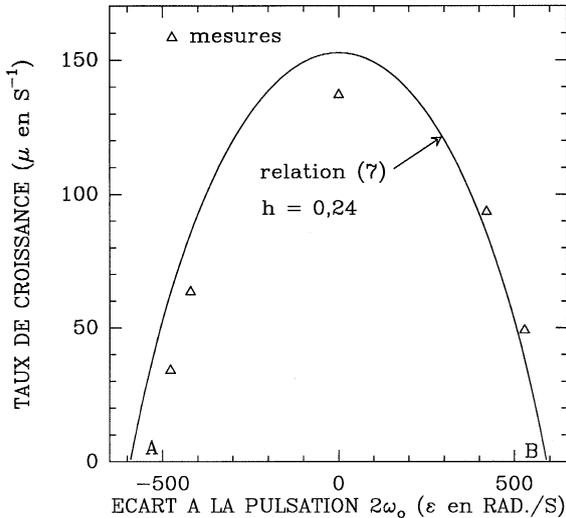


Figure 5

3. SOLUTION NUMÉRIQUE DE L'ÉQUATION DE MATHIEU

Comme illustré par les figures 2 et 3, le dispositif que nous avons présenté permet d'explorer le comportement de l'oscillateur paramétrique dans une vaste région de l'espace (h, ω) . Pour vérifier que le modèle proposé reste adéquat hors du domaine de validité des relations (5), (6) et (7) il nous faudrait disposer d'une solution exacte. Deux possibilités nous sont offertes :

- a) recourir à des méthodes analytiques fournissant une solution générale,
 b) résoudre numériquement l'équation (1).

Cette seconde approche n'est pas sans intérêt : en effet, les microordinateurs couramment disponibles possèdent une puissance de calcul suffisante pour la mettre en œuvre avec succès. De plus, la relative simplicité de l'équation (1) conduit à une programmation aisée et rapide ; au contraire, la théorie complète s'avère difficile d'accès au non spécialiste (voir à ce sujet la référence [9]). Enfin, l'existence d'une solution simple pour les faibles valeurs de h fournit un point de repère commode pour valider la méthode employée et effectuer des tests de précision.

Dans un premier temps, il est commode de réécrire l'équation (1) sous la forme adimensionnée suivante (en utilisant la période $T_0 = 2\pi/\omega_0$ comme unité de temps) :

$$\frac{d^2y}{d\tau^2} + 2\Lambda \frac{dy}{d\tau} + 4\pi^2 [1 + h \cos(4\pi r \tau)] y = 0 \quad (8)$$

avec

$$\Lambda = \lambda T_0, \tau = \frac{t}{T_0} \text{ et } r = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Ainsi, les relations (5) et (6) deviennent respectivement :

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{16} - \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} < r < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{16} - \frac{\Lambda^2}{4\pi^2}} \text{ et } h_s = 2 \frac{\Lambda}{\pi}$$

Nous avons utilisé une méthode de Runge-Kutta (voir référence [10]) : celle-ci consiste à calculer de proche en proche les valeurs de $(d^2y/d\tau^2)_n$, $(dy/d\tau)_n$ et y_n aux instants successifs $\tau = \tau_0 + n \delta\tau$. Les conditions initiales doivent être spécifiées ; la valeur y_0 n'a aucune importance : les valeurs ultérieures de y sont simplement rapportées à celle-ci (on choisit donc $y_0 = 1$). Quant au choix de $(dy/d\tau)_0$, il influe sur la forme de la solution mais pas sur le comportement asymptotique qui seul nous intéresse (en présence d'amortissement, le système a « oublié » ses conditions initiales au bout d'un certain temps). La valeur optimale de $\delta\tau$ peut être obtenue empiriquement en comparant des solutions correspondant à des pas décroissants $\delta\tau = 0,2 ; 0,1 ; 0,05...$ Par ailleurs, l'intervalle d'intégration $\Delta\tau$ - nécessairement limité - doit être

assez grand pour que soit atteint le régime asymptotique ; en examinant la solution elle-même, on voit clairement à partir de quand l'enveloppe des maxima devient exponentielle (croissante ou amortie selon le signe de μ). Pour les cas envisagés, $\delta\tau = 0,05$ est un bon compromis (des valeurs inférieures n'amènent pas de correction significative à la solution) et $\Delta\tau \approx 50$ s'avère suffisant.

Les points reportés sur les figures 2 et 3 ont été obtenus en cherchant par essais successifs la valeur minimale de h qui, pour une valeur donnée de ω (c'est-à-dire de r), fournit une solution exponentiellement divergente.

Cette étude numérique nous permet de conclure que le système électrique proposé obéit bien à l'équation classique de l'oscillateur paramétrique même lorsqu'il est fortement amorti et excité loin de sa fréquence de résonance.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. MOREAU - *Résonance paramétrique*, B.U.P. n° 661, p. 565, 1984.
- [2] M. SOUTIF - *Vibrations, propagation, diffusion*, p. 47, Dunod, Paris 1970.
- [3] A.B. PIPPARD - *The Physics of vibration*, Vol. 1, p. 285, Cambridge University Press, 1978.
- [4] J. AUVRAY - *Electronique des signaux analogiques*, p. 250, Dunod, Paris, 1980.
- [5] R. MOREAU - *Construire et utiliser un analyseur de spectre*, B.U.P. n° 675. p. 1151, 1985.
- [6] J.P. MATHIEU - *Vibrations et phénomènes de propagation*, Tome 1, p. 83, Masson, Paris, 1974.
- [7] L. LANDAU et E. LIFCHITZ - *Mécanique*, p. 130, Éd. Mir, Moscou, 1969.
- [8] P. BERGE, Y. POMEAU et Ch. VIDAL - *L'ordre dans le chaos*, p. 30, Hermann, Paris, 1984.
- [9] C.S. HSU - *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 17, p. 245, Academic Press, 1977.
- [10] M. ABRAMOVITZ et I.A. STEGUN - *Handbook of mathematical functions*, p. 897, Dover, New York, 1970.