A propos de l'inversion de la transformation de Laplace

par J.-L. DEJARDIN
Maître de Conférences
Laboratoire de Physique Théorique, Université de Perpignan,
66860 Perpignan Cedex

INTRODUCTION

L'usage de la transformation de Laplace à la résolution d'équations ou de systèmes différentiels linéaires est bien connu par son côté pratique puisqu'il réduit ces équations ou ces systèmes à un problème d'algèbre linéaire. Rappelons que si f désigne une fonction continue de la variable réelle positive t (par exemple, le temps), l'intégrale de Laplace est définie par :

$$F(p) = L(f) = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\, dt \tag{1}$$

où p est un paramètre réel ou complexe, indépendant de t, tel que : Re(p)>0 de façon à assurer l'existence de F(p) (convergence).

Considérons une équation différentielle linéaire dont la solution inconnue est x(t) et supposons connue l'expression algébrique de sa solution image X(p). La recherche de x(t) se fait alors habituellement au moyen de tableaux de correspondance entre fonctions élémentaires et leurs transformées. Le but de cet article est de montrer qu'il est possible d'accéder à la détermination de l'original x(t) sans faire appel à ces tableaux de correspondance, en utilisant l'intégrale de Mellin-Fourier ou de Bromwich-Wagner. Si cette méthode, appelée aussi inversion de la transformée de Laplace, n'est guère nouvelle et se trouve largement illustrée dans les ouvrages de mathématiques appliquées, je ne l'ai pas rencontrée, à ma connaissance, dans les livres de physique ou de chimie. C'est pourquoi je me propose ici, à titre pédagogique, de rappeler cette technique qui pourra être utilisée dans les enseignements de deuxième cycle de l'Université (licence-maîtrise de physique) à la résolution d'équations ou de systèmes différentiels, principalement en mécanique et en électricité.

INTÉGRALE DE MELLIN-FOURIER

Cette intégrale donne la solution f(t) de l'équation (1) soit :

$$f(t) = \frac{1}{2\,i\pi} \int_{a-i\infty}^{a+i\infty} e^{zt}\,F(z)\,dz \qquad (2)$$

z est une variable du plan complexe : $z = x + iy$

a est une abscisse positive.

Les bornes d'intégration définissent le contour de Bromwich ; tous les points singuliers de F(p) doivent se trouver à gauche de la droite $x = a$. Dans ces conditions, le calcul montre que l'original de F(p) s'obtient en effectuant la somme des résidus affectés à chaque pôle (simple ou multiple) de l'expression complexe $e^{zt}F(z)$. Si m représente le nombre de ces pôles, on peut écrire que :

$$f(t) = \sum_{1}^{m} R_m\,(z = z_m) \qquad (3)$$

A cet effet, il est bon de rappeler les relations qui permettent de trouver les résidus d'une fraction rationnelle telle que : $g(z) = P(z)/Q(z)$.

Si on a affaire à un pôle simple, $z = z_1$, alors le résidu en z_1 vaut :

$$R(z_1) = P(z_1)/Q'(z_1)$$

S'il s'agit d'un pôle multiple d'ordre k, on a :

$$R(z_1) = \frac{1}{(k-1)\,!}\;\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\Big[(z - z_1)^k\,g(z)\Big]_{(z = z_1)}$$

APPLICATIONS

1. Exemple d'une équation différentielle linéaire

Trouver la solution d'un système harmonique soumis à l'action d'une force extérieure sinusoïdale de pulsation Ω différente de la pulsation propre ω_0 du système.

L'équation différentielle qui régit un tel système est de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2\,x = F_0 \sin \Omega t$$

En prenant pour conditions initials $x(0) = \dot{x}(0) = 0$, l'image de $x(t)$ s'écrit, après avoir pris les transformées de Laplace de chacun des termes de l'équation ci-dessus :

$$X(p) = F_0\,\Omega\,\frac{1}{\left(p^2 + \Omega^2\right)\left(p^2 + \omega_0^2\right)}$$

L'expression $e^{tz}\,X(z)$ possède quatre pôles simples qui sont :
$z_1 = i\Omega$; $z_2 = -\,i\Omega$; $z_3 = i\omega_0$; $z_4 = -\,i\omega_0$

Les valeurs des résidus en ces points sont :

$$R(z_1) = \frac{e^{i\Omega t}}{2i\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}\,F_0\,\Omega\ , \qquad R(z_2) = \frac{e^{-\,i\Omega t}}{-\,2i\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}\,F_0\,\Omega\ ,$$

$$R(z_3) = \frac{e^{i\omega_0 t}}{2i\omega_0\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}\,F_0\,\Omega\ , \qquad R(z_4) = \frac{e^{-\,i\omega_0 t}}{-\,2i\omega_0\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}\,F_0\,\Omega\ .$$

La somme des résidus donne :

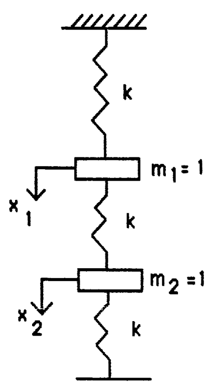
$$x(t) = \frac{F_0\Omega}{\Omega\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}\left(\frac{e^{i\Omega t} - e^{-\,i\Omega t}}{2i}\right) + \frac{F_0\Omega}{\omega_0\left(\Omega^2 - \omega_0^2\right)}\left(\frac{e^{i\omega_0 t} - e^{-\,i\omega_0 t}}{2i}\right)$$

soit :

$$x(t) = \frac{F_0}{\omega_0\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)}\left(\omega_0 \sin\Omega t - \Omega \sin\omega_0 t\right)$$

2. Exemple d'un système différentiel linéaire

Trouver la solution d'un système vibratoire non amorti à deux degrés de liberté représenté par la figure ci-après.



Le système différentiel qui rend compte du mouvement des deux masses m_1 et m_2 est :

$$\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1) - kx_2$$

Supposons que les conditions initiales soient les suivantes :

$$x_1(0) = x_2(0) = x_0 \quad ; \quad \dot{x}_1(0) = v_0 \quad ; \quad \dot{x}_2(0) = -v_0$$

Les transformées de Laplace des 2 équations du système donnent :

$$(p^2 + 2k)X_1(p) - kX_2(p) = px_0 + v_0$$

$$-kX_1(p) + (p^2 + 2k)X_2(p) = px_0 - v_0$$

$$X_1(p) = \frac{(p^2 + 2k)\,(px_0 + v_0) + k(px_0 - v_0)}{(p^2 + k)\,(p^2 + 3k)}$$

$$X_2(p) = \frac{(p^2 + 2k)\,(px_0 - v_0) + k(px_0 + v_0)}{(p^2 + k)\,(p^2 + 3k)}$$

Pour chacune des images X_1 et X_2, il existe quatre pôles simples qui sont :

$$z_1 = i\sqrt{k} \quad ; \quad z_2 = -i\sqrt{k}\,; z_3 = i\sqrt{3k} \quad ; \quad z_4 = -i\sqrt{3k}$$

Calculons les résidus de l'expression $e^{zt}X_1(z)$:

$$R(z_1) = \frac{e^{i\sqrt{k}t}}{2}x_0 \quad ; \quad R(z_2) = \frac{e^{-i\sqrt{k}t}}{2}x_0 \quad ;$$

$$R(z_3) = \frac{e^{i\sqrt{3k}t}}{2i\sqrt{3k}}v_0 \quad ; \quad R(z_4) = -\frac{e^{-i\sqrt{3k}t}}{2i\sqrt{3k}}v_0$$

L'original $x_1(t)$ est égale à :

$$x_1(t) = \frac{v_0}{\sqrt{k3}}\sin\sqrt{3k}t + x_0\cos\sqrt{k}t$$

Avec un raisonnement analogue, l'original $x_2(t)$ est :

$$x_2(t) = x_0\cos\sqrt{k}t - \frac{v_0}{\sqrt{3k}}\sin\sqrt{3k}t$$

CONCLUSION

Les deux exemples précédents montrent la puissance de la technique d'inversion de la transformation de Laplace qui se réduit à un simple calcul de résidus. En outre, on peut remarquer qu'il est inutile d'opérer une décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $e^{zt}X(z)$, ce qui est peut-être un avantage non négligeable pour des systèmes physiques plus complexes que ceux qui viennent d'être étudiés.

BIBLIOGRAPHIE

A. ANGOT, 1961, Compléments de mathématiques à l'usage des ingénieurs de l'Électronique et des Télécommunications. (Éditions de la Revue d'Optique. Collection Technique et Scientifique du C.N.E.T).

R. DELTHEIL, 1955, Compléments de mathématiques générales à l'usage des Physiciens et des Ingénieurs, tome III (J.-B. Baillière et Fils, Éditeurs).