

Une introduction géométrique et physique du laplacien

par Jean SIVARDIÈRE

DRF/SPh/Groupe Magnétisme et Diffusion par Interactions Hyperfines
Centre d'Études Nucléaires de Grenoble
85 X-38041 Grenoble Cedex, France

RÉSUMÉ

La notion de laplacien d'une fonction scalaire est d'un usage général en physique : gravitation, électromagnétisme, hydrodynamique, diffusion, conduction de la chaleur,... Dans cet article, nous en donnons une présentation géométrique et physique bien adaptée à l'enseignement.

COURBURE ET LAPLACIEN

1. Considérons tout d'abord une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe Γ , et un point M non singulier de Γ . Nous allons supposer que la tangente en M est horizontale, et placer l'origine en M . Dans le voisinage de M , $f(x)$ peut alors se représenter par le développement de Taylor :

$$f(x) = \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} x^2 + o(x^2)$$

Posons : $\frac{d^2 f}{dx^2} = y''$ et considérons une droite Δ d'ordonnée $y = a$ parallèle à la tangente en M (figure 1a). Ses points d'intersection avec Γ sont donnés par : $\frac{1}{2} y'' x^2 = a$. Si $y'' > 0$, on a deux solutions opposées pour $a > 0$; une solution double $x = 0$ pour $a = 0$; aucune solution réelle pour $a < 0$. Par conséquence Γ est située entièrement d'un même côté de la tangente en M (il en est de même si $y'' < 0$).

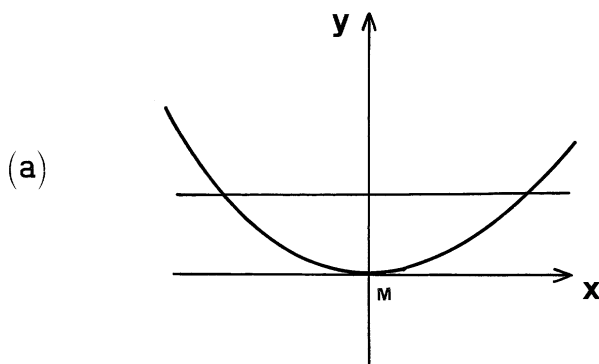


Figure 1a : $y'' > 0$: la courbe Γ est d'un même côté de la tangente en M.

Considérons maintenant un cercle de rayon R centré sur la normale à Γ , passant par M et situé du même côté de la tangente en M que Γ . Un tel cercle a pour équation :

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2$$

Les points d'intersection de ce cercle et de Γ autres que M sont donnés par :

$$x = \pm \frac{2}{y''} \sqrt{1 - y'' R}$$

Ce résultat met en évidence l'existence d'un cercle particulier, dit *cercle osculateur*, dont le rayon $R_c = \frac{1}{y''}$ est appelé *rayon de courbure* de Γ en M, ayant un contact d'ordre élevé avec Γ en M : c'est le cercle tangent à Γ en M qui ressemble le plus à Γ dans le voisinage de M. Son centre C est le *centre de courbure* de Γ en M, $y'' = \frac{1}{R_c}$ est la *courbure* de Γ en M. Notons que si la tangente en M n'est pas horizontale, la courbure est donnée par :

$$R_c = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}}$$

Supposons maintenant que $y'' = 0$. A l'ordre 2, Γ se confond avec la tangente en M. Pour étudier l'intersection de Δ avec Γ , il est nécessaire de pousser à l'ordre 3 le développement de Taylor de $f(x)$. Si la dérivée troisième de $f(x)$ est non nulle, Δ a un point commun avec

Γ quelque soit le signe de a (figure 1b) : M est un point d'inflexion, la tangente en M traverse Γ , la courbure de Γ en M est nulle, le centre de courbure C est à l'infini sur la normale en M à Γ .

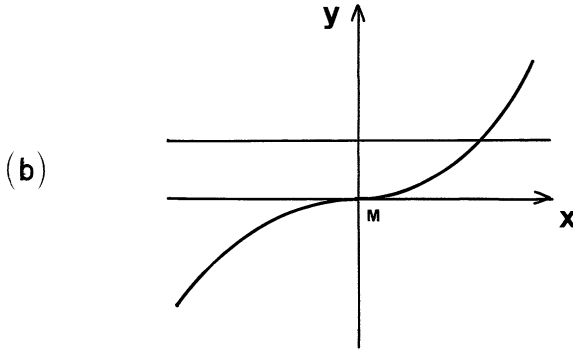


Figure 1b : $y'' = 0$, $y''' > 0$: M est un point d'inflexion, Γ est traversée par la tangente M .

2. Considérons une fonction $z = f(x, y)$ représentée par une surface Σ , et un point M non singulier de Σ . Nous allons supposer que le plan tangent en M à Σ est horizontal, et placer l'origine en M . Dans le voisinage de M , $f(x, y)$ peut se représenter par le développement de Taylor :

$$z = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} x^2 + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} y^2 \right] + 0(x^2, xy, y^2)$$

Posons : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = p$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = s$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = t$ et considérons un plan Π de cote $z = a$ parallèle au plan tangent en M . Les points d'intersection de Σ et Π sont donnés par :

$$\frac{1}{2} [r x^2 + 2 s xy + t y^2] = a$$

Si le discriminant $D = s^2 - rt$ de la forme quadratique entre crochets est négatif, cette forme a un signe constant, positif par exemple si les dérivées r et t sont positives. Π coupe alors Σ suivant une ellipse si $a > 0$. Si $a = 0$, le seul point commun à Π et Σ est M . Si $a < 0$, Π et Σ n'ont pas d'intersection. Dans le voisinage de M , Σ est située d'un même côté du plan tangent en M : on dit que Σ est convexe en M , et que M est un *point elliptique* (figure 2a).

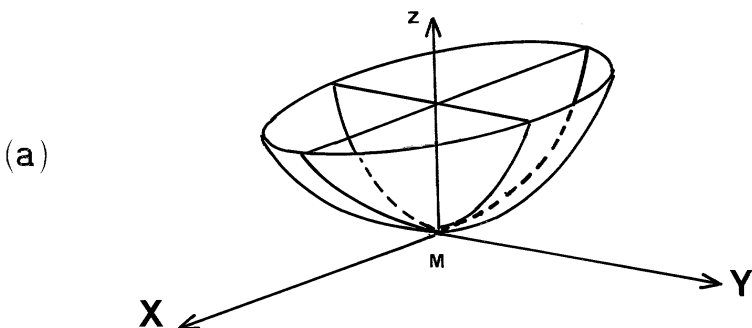


Figure 2a : M est un point elliptique : la surface est d'un même côté du plan tangent en M.

MX et MY sont les directions principales du plan tangent.

Si D est positif, le plan tangent ($a = 0$) coupe Σ suivant deux droites appelées *directions asymptotiques du plan tangent* ; les plans voisins ($a > 0$ et $a < 0$) suivant deux hyperboles conjuguées dont les asymptotes sont parallèles aux deux droites ci-dessus. Σ est traversée par le plan tangent en M : on dit que M est un *point col ou selle* de Σ , ou encore un *point hyperbolique* (figure 2b). Enfin si $D = 0$, le plan tangent coupe Σ suivant une droite double et les plans $a > 0$ en général suivant deux droites parallèles à cette droite double, les plans $a < 0$ n'ayant pas d'intersection avec Σ . Σ est située d'un même côté du plan tangent, M est appelé *point parabolique* (figure 2c).

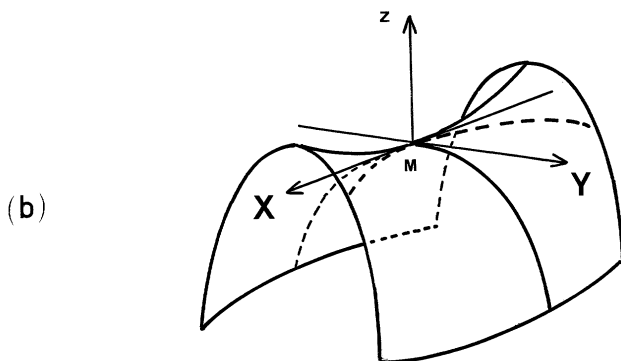


Figure 2b : M est un point hyperbolique : la surface est traversée par le plan tangent en M (une branche de la section est représentée en tirets).

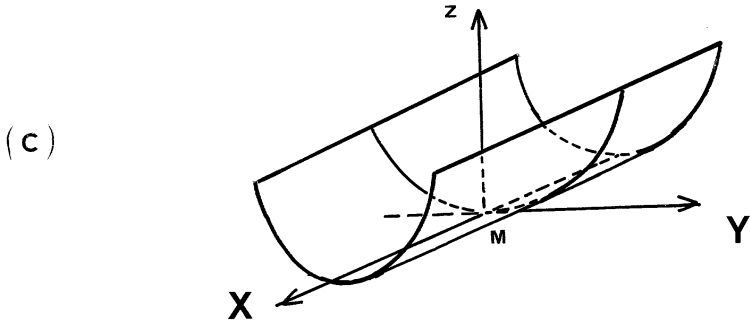


Figure 2c : M est un point hyperbolique : les deux directions asymptotiques du plan tangent en M sont confondues.

Coupons la surface Σ par le plan normal Oxz . La section a pour équation :

$$z = \frac{1}{2} rx^2 + O(x^2)$$

et pour rayon de courbure $R_x = \frac{1}{r}$. De même la section par le plan normal Oyz a pour rayon de courbure $R_y = \frac{1}{t}$. Plus généralement coupons Σ par un plan normal Opz faisant un angle θ avec Oxz . En posant $x = \rho \cos\theta$, $y = \rho \sin\theta$, on voit que la section a pour équation :

$$z = \frac{1}{2} \frac{\rho^2}{R} + o(\rho^2)$$

avec :

$$\frac{1}{R}(\theta) = r \cos^2\theta + 2s \cos\theta \sin\theta + t \sin^2\theta$$

On en déduit que si on coupe Σ par deux plans normaux perpendiculaires (θ et $\theta + \pi/2$), le produit des courbures des deux sections dépend de θ mais leur somme, appelée *courbure moyenne* de Σ en M, est constante et égale à $r + t$. Cette quantité est le laplacien $\Delta f = r + t$ de la fonction $f(x, y)$ en M.

On vérifie également que la quantité $\frac{1}{R}(\theta)$ est extrémale pour :

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2s}{r-t}$$

Supposons que $\frac{1}{R}$ soit maximale, et égale à $\frac{1}{R_1}$, pour $\theta = \alpha$: cette quantité est alors minimale, et égale à $\frac{1}{R_2}$, pour $\theta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Les directions α et $\alpha + \frac{\pi}{2}$ sont les *directions principales du plan tangent* en M, ce sont les axes de symétrie des sections de Σ par des plans horizontaux voisins du plan tangent. R_1 et R_2 sont les *rayons de courbure principaux*. On a bien sûr :

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = r + t = \Delta f$$

Calculons la quantité $\frac{1}{R_1 R_2}$, appelée *courbure totale* de Σ en M.

$\frac{1}{R}$ peut s'écrire :

$$\frac{1}{R} = \frac{r+t}{2} + \left(\frac{r-t}{2} + s \operatorname{tg} 2\theta \right) \operatorname{Cos} 2\theta$$

Or :

$$\operatorname{Cos} 2\theta = \pm \sqrt{\frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 2\theta}}$$

d'où :

$$\frac{1}{R_{1,2}} = \frac{r+t}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(r-t)^2 + 4s^2}$$

et :

$$\frac{1}{R_1 R_2} = rt - s^2$$

Considérons le tenseur symétrique $t_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ de la forme quadratique donnant z au deuxième ordre au voisinage de M. Nous voyons que $\frac{1}{R_1}$ et $\frac{1}{R_2}$ ne sont autres que les valeurs propres de ce tenseur. La courbure moyenne $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ en est la trace, la courbure totale en est le déterminant. Dans le repère formé par les directions principales, que nous notons OX et OY, on a :

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\partial^2 f}{\partial X^2} \text{ et } \frac{1}{R_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial Y^2}$$

Puisque $\frac{1}{R_1 R_2} = -D$, on en déduit que : $\frac{\partial^2 f}{\partial X \partial Y} = 0$. Le tenseur t_{ij} est donc diagonal dans ce repère et :

$$z = \frac{1}{2} \left(\frac{X^2}{R_1} + \frac{Y^2}{R_2} \right) + 0(X^2, XY, Y^2)$$

comme on peut le vérifier directement. En un point elliptique, R_1 et R_2 ont même signe. Si $R_1 = R_2$, M est un *ombilic* : au voisinage de M , les sections horizontales de Σ sont des cercles. En un point hyperbolique, R_1 et R_2 sont de signes opposés. Si $R_1 = -R_2$, les sections horizontales de Σ sont des hyperboles équilatères et on a un *point col symétrique*, analogue à un point d'inflexion d'une courbe. En un point parabolique, l'un des deux rayons R_1 ou R_2 est infini.

Nous avons supposé jusqu'ici que le plan tangent en M est horizontal. Si tel n'est pas le cas, on montre que les rayons de courbure principaux sont solutions de l'équation :

$$(rt - s^2) R^2 - \left[t(1 + p^2) + r(1 + q^2) - 2pqs \right] \sqrt{1 + p^2 + q^2} R + (1 + p^2 + q^2)^2 = 0$$

où p et q sont les dérivées premières de f .

3. Si une fonction $f(x)$ est telle que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ sur un intervalle fini,

elle est linéaire et représentée par un segment de droite, de courbure nulle. Considérons alors une corde flexible de masse négligeable, de tension T , tendue entre deux points fixes. En l'absence de force transverse, elle est rectiligne. Si on lui applique la force transverse $F_y(x)$ par unité de longueur, on montre aisément que son équation $y = f(x)$ est, pour de petites déformations, solution de :

$$T \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -F_y(x)$$

Cette «équation de Poisson à une dimension» exprime que plus la force transverse appliquée en point de la corde est grande, plus la courbure de la corde en ce point est forte, la composante transverse de la tension devant compenser $F_y(x)$.

De même, si une fonction $f(x,y)$ satisfait l'équation de Laplace $\Delta f = 0$ - elle est dite *harmonique* -, elle est représentée par une surface

Σ de courbure moyenne nulle en tout point : chaque point de Σ est hyperbolique, et tel que $R_2 = -R_1$. Si Δf est une constante, Σ est une surface de courbure moyenne constante.

Considérons par exemple la surface libre Σ d'un liquide de tension superficielle A . Soit δp la différence entre les pressions qui s'exercent sur chacune de ses deux faces au voisinage d'un point M . R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux de Σ en M , on a la relation de Laplace :

$$\delta p = A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$$

Soit alors une lame mince liquide Σ s'appuyant sur un contour fermé : $\delta p = 2A \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)$. Si la lame baigne dans l'air, $\delta p = 0$: Σ a alors une courbure moyenne nulle, et si son équation est : $z = f(x, y)$, f est une fonction harmonique. On a une propriété analogue pour une membrane élastique de masse négligeable tendue sur un cadre rigide.

Considérons également une goutte liquide immergée dans un liquide différent de même densité et s'appuyant sur un cadre rigide. On montre aisément que la pression de part et d'autre de la surface de séparation est constante. Par suite Σ a une courbure moyenne constante, et Δf est constant. Il en est de même pour une membrane élastique tendue sur un cadre rigide et uniformément chargée. Si la membrane est soumise à une pression $p(x, y)$, la fonction $f(x, y)$ qui la décrit satisfait alors l'équation de Poisson : $\Delta f = p(x, y)$. Plus la pression en un point est forte, plus la courbure moyenne de la membrane est forte.

VALEUR MOYENNE D'UNE FONCTION ET LAPLACIEN

1. Considérons une fonction $y = f(x)$, et étudions sa valeur moyenne dans le voisinage d'un point M non singulier. On peut définir cette valeur moyenne arithmétique de $f(x)$ aux bornes d'un petit intervalle $[x - R, x + R]$:

$$\langle f \rangle_{\text{bornes}} = \frac{f(x - R) + f(x + R)}{2}$$

ou comme une moyenne sur cet intervalle :

$$\langle f \rangle_{\text{intervalle}} = \frac{1}{2R} \int_{-R}^{+R} f(x+r) dr$$

En utilisant un développement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre 2, on obtient aisément :

$$\langle f \rangle_{\text{bornes}} = f(M) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f}{dx^2} R^2$$

$$\langle f \rangle_{\text{intervalle}} = f(M) + \frac{1}{6} \frac{d^2 f}{dx^2} R^2$$

On voit que $\langle f \rangle > f(M)$ si la courbe représentant $f(x)$ est convexe en M, et $\langle f \rangle = f(M)$ si M en est un point d'inflexion. Enfin si $\frac{d^2 f}{dx^2} = 0$ en tout point de l'intervalle, $f(x)$ ne présente pas d'extremum sur l'intervalle, mais seulement aux bornes de cet intervalle.

2. Généralisons les remarques précédentes à une fonction continue $f(x,y)$, suivant une idée de Maxwell, en calculant sa valeur moyenne au voisinage d'un point M du plan, sur un cercle de centre M et de rayon R, puis sur le disque limité par ce cercle. $dx = R \cos \theta$ et $dy = R \sin \theta$ étant les coordonnées d'un point P décrivant le cercle, on a :

$$\langle f \rangle_{\text{cercle}} = \left\{ f(M) + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2 \right] \right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[f(M) + \frac{\partial f}{\partial x} R \cos \theta + \dots \right] d\theta$$

D'où :

$$\langle f \rangle_{\text{cercle}} = f(M) + \frac{R^2}{4} \Delta f$$

et de même :

$$\langle f \rangle_{\text{disque}} = f(M) + \frac{R^2}{8} \Delta f$$

La valeur moyenne d'une fonction $f(x,y,z)$ de 3 variables au voisinage d'un point M peut être également évaluée sur une sphère de centre M et de rayon R, dans la boule limitée par cette sphère, ou encore

sur ou dans un cube de côté $2R$, de centre M et de faces parallèles aux plans de coordonnées :

$$\langle f \rangle_{\text{sphère}} = f(M) + \frac{R^2}{6} \Delta f$$

$$\langle f \rangle_{\text{boule}} = f(M) + \frac{R^2}{10} \Delta f$$

$$\langle f \rangle_{\text{surface de cube}} = f(M) + \frac{5}{18} R^2 \Delta f$$

$$\langle f \rangle_{\text{volume de cube}} = f(M) + \frac{R^2}{6} \Delta f$$

soit, d'une manière générale, la formule de Maxwell :

$$\langle f \rangle_M = f(M) + \alpha R^2 \Delta f$$

où R est une dimension caractéristique du voisinage de M et α une constante de l'ordre de grandeur de l'unité. Ainsi le laplacien d'une fonction mesure son «*anomalie locale*», c'est-à-dire l'écart entre sa valeur moyenne au voisinage d'un point et sa valeur en ce point. Si $\langle f \rangle_M > f(M)$, $\Delta f > 0$. Si $\Delta f = 0$, la fonction f est harmonique et elle satisfait le théorème de la moyenne : $\langle f \rangle_M = f(M)$.

3. Revenons au cas d'une fonction $f(x,y)$ de 2 variables décrivant une surface Σ . Le résultat précédent s'explique bien géométriquement. En effet, plus Δf est grand, plus la courbure moyenne de Σ en M est grande, et par suite plus $\langle f \rangle_M$ diffère de $f(M)$.

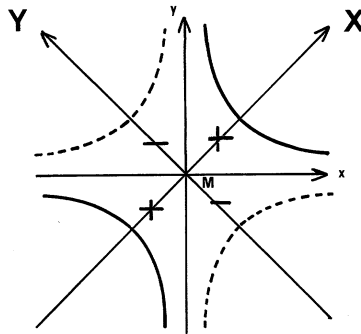


Figure 3 : Voisinage d'un point M où $\Delta f = 0$: les sections de Σ par des plans parallèles au plan tangent en M sont des hyperboles équilatères.

Si $f(x,y)$ est harmonique, chaque point M de Σ est un col symétrique. Les sections de Σ par deux plans parallèles au plan tangent équidistants de ce plan sont, comme on l'a vu, des hyperboles équilatères conjuguées, dont les axes de symétrie sont les directions principales du plan tangent. Par symétrie, on voit que : $\langle f \rangle_M = f(M)$ (figure 3).

4. Le gradient de la fonction scalaire $f(x,y)$ est un vecteur de coordonnées $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, et la divergence de ce vecteur n'est autre que le laplacien Δf . Supposons que f présente un minimum au point $M(x,y)$ (figure 4a) : au voisinage de M , les courbes de niveau sont, approximativement, des ellipses de centre M . Le point M est une source du champ vectoriel $\text{grad} f$, et par suite on a en M : $\text{div grad} f = \Delta f > 0$. Ce résultat est en accord avec la formule de Maxwell puisque par hypothèse $\langle f \rangle_M > f(M)$.

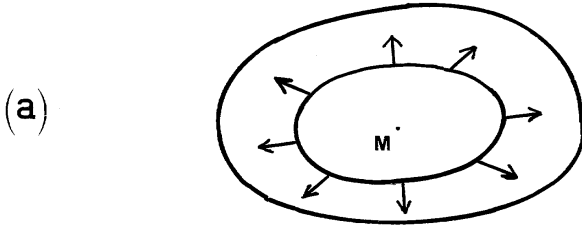


Figure 4a : Voisinage d'un minimum M de la fonction $f(x,y)$: M est une source du champ $\text{grad} f$.

Si M est un col de la fonction f , les courbures de niveau de f au voisinage de M sont, approximativement, des hyperboles de centre M (figure 4b). Le point M est un point de stagnation du champ $\text{grad} f$ et on ne peut rien dire a priori de la divergence de ce champ. Cependant si les courbes de niveau sont des hyperboles équilatères, $\Delta f = 0$ et effectivement, par raison de symétrie, le flux de $\text{grad} f$ à travers un cercle de centre M est nul.

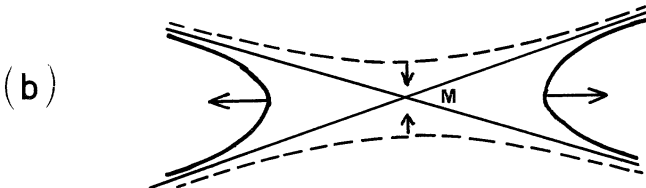


Figure 4b : Voisinage d'un col : M est un point de stagnation de ce champ.

5. Si une fonction est harmonique dans un certain domaine fermé, un raisonnement élémentaire par l'absurde montre qu'elle satisfait le théorème de l'extremum (Gauss) : elle ne présente aucun extremum dans le domaine considéré, un extremum ne se rencontre que sur la frontière du domaine.

D'autre part si f est harmonique, $\frac{\partial f}{\partial x}$ l'est également : $\frac{\partial f}{\partial x}$ ne présente par d'extremum dans le domaine considéré et $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$, donc $|\vec{\text{grad}} f|$, n'y présentent pas de maximum (théorème de Kelvin) : $|\vec{\text{grad}} f|$ peut cependant y présenter un minimum, qui peut être nul.

Considérons le champ vectoriel $\vec{\text{grad}} f$. Son rotationnel est nul, puisqu'il dérive d'un potentiel, donc ses lignes de champ ne sont pas fermées. D'autre part sa divergence est nulle puisque $\Delta f = 0$, donc ses lignes de champ ne présentent pas de points d'arrêt (sources) : elles traversent le domaine (figure 5).

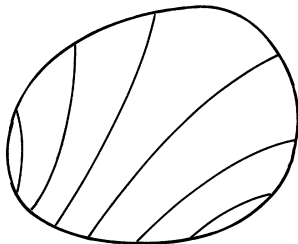


Figure 5 : Lignes du champ du gradient d'une fonction harmonique.

6. Reprenons l'exemple d'une membrane tendue sur un cadre rigide et représentée par l'équation $z = f(x,y)$, $\Delta f = 0$. Elle ne présente ni creux ni bosse en dehors du cadre (si le cadre est plan, elle est plane). L'altitude z d'un point ne peut être extrême que sur le cadre, les lignes de plus grande pente vont d'un point du cadre à un autre et leur pente varie de manière monotone. Si on pose sur la membrane une bille de masse trop faible pour la déformer, cette bille ne peut être en équilibre.

De même si $V(x,y,z)$ est un potentiel électrostatique, on sait que $\Delta V = 0$, et donc que V ne présente pas d'extremum en dehors des charges. Une charge d'épreuve q subit donc une force $\vec{F} = -q \text{ grad } V$ qui n'est jamais nulle, et ne peut donc être en équilibre (théorème d'Earnshaw).

ÉQUATIONS DE LAPLACE ET DE POISSON

1. L'équation de Laplace apparaît dans tout problème où un champ vectoriel $\vec{F}$ a, à la fois, une circulation et un flux conservatifs. On a alors : $\text{rot } \vec{F} = 0$ donc : $\vec{F} = -\text{grad } f$ et : $\text{div } \vec{F} = -\Delta f = 0$. Citons quelques exemples.

En gravitation, le champ $\vec{g}$ dérive d'un potentiel Φ . Dans une région où aucune masse n'est présente, $\text{div } \vec{g} = 0$ d'après le théorème de Gauss donc $\Delta \Phi = 0$. En électrostatique, on a de même en dehors des charges : $\Delta V = 0$. Cette propriété du potentiel reste vraie en électrocinétique puisque la densité de courant est donnée par : $\vec{j} = \gamma \vec{E} = -\gamma \text{grad } V$ d'après la loi d'Ohm (γ est la conductivité du milieu) : $\text{div } \vec{j} = 0$ donc $\Delta V = 0$. On montre en magnétostatique que, loin des courants et des aimants, le champ magnétique dérive d'un potentiel scalaire V^* : $\vec{B} = -\text{grad } V^*$. Comme $\text{div } \vec{B} = 0$ (il n'existe pas de monopole magnétique), $\Delta V^* = 0$.

Considérons le champ des vitesses d'un fluide incompressible en mouvement irrotationnel (pas de tourbillons) : $\vec{v} = -\text{grad } \Phi$ où Φ est le potentiel des vitesses. En dehors des sources, on a l'équation de continuité : $\text{div } \vec{v} = 0$ donc $\Delta \Phi = 0$. Si le fluide est visqueux et mis en mouvement par un gradient de pression, on a : $\vec{v} = -\alpha \text{grad } p$ (loi de Poiseuille). En l'absence de sources, $\text{div } \vec{v} = 0$ et $\Delta p = 0$.

Enfin dans un milieu conducteur de la chaleur, le vecteur $\vec{\delta}$ décrivant le flux de chaleur est donné par la loi de Fourier : $\vec{\delta} = -K \text{grad } T$ où T est la température et K la conductivité thermique du milieu. Dans une situation stationnaire et dans une région où aucune source de chaleur n'est présente, $\text{div } \vec{\delta} = 0$ et par suite : $\Delta T = 0$. L'équation de Laplace intervient de manière analogue dans la théorie de la diffusion.

2. L'équation de Poisson se rencontre dans le cas d'un champ dérivant d'un potentiel, dans une région où le flux n'est pas conservatif en raison de la présence de sources de densité $\rho(x,y,z)$. Alors, à un coefficient près caractéristique du problème, le laplacien du potentiel est égal à ρ . Ainsi en gravitation : $\Delta \phi = 4\pi G \rho$. En électrostatique :

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}. \text{ En hydrodynamique : } \Delta \Phi = -\frac{v}{\rho} \text{ (v est la densité de débit)}$$

massique des sources, ρ la masse volumique du fluide). En conduction de la chaleur : $\Delta T = -\frac{v}{K}$ (v est la densité de débit calorique des sources).

Ces équations de Poisson peuvent s'interpréter dans le point de vue de Maxwell, le laplacien mesurant l'anomalie locale de la fonction considérée. Dans le cas d'une membrane, $\Delta z = p(x,y)$: plus la pression est élevée en un point, plus l'anomalie locale d'altitude est grande. Dans les exemples ci-dessus, la présence d'une source en un point M crée une anomalie locale de potentiel qui est proportionnelle à l'intensité de la source. Ainsi si une charge électrique positive est présente en M , elle crée en ce point une anomalie négative de potentiel. De même une source de chaleur crée dans son voisinage une anomalie négative de température, puisque la température diminue quand on s'en éloigne.

Le laplacien intervient également dans d'autres équations de la physique mathématique. Soit par exemple ϕ le déplacement d'un point d'un milieu élastique par rapport à sa position d'équilibre. La force de rappel, donc l'accélération de M , est proportionnelle à l'anomalie locale de ϕ dans le voisinage de M , d'où la forme de l'équation de propagation des ondes :

$$\Delta \Phi = \frac{1}{a^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

(a est la vitesse de propagation des ondes). De même si T est la température, fonction du temps, dans un milieu isotrope de conductivité thermique K , l'anomalie locale de T est proportionnelle à la vitesse de changement de T , d'où la forme de l'équation de conduction de la chaleur :

$$\Delta T = \frac{1}{K} \frac{\partial T}{\partial t}$$

Si l'anomalie ΔT est positive, le point M est entouré d'une zone plus chaude que lui, donc sa température s'élève. On interprète de même l'équation de la diffusion : T est alors une concentration et K un coefficient de diffusion.

LAPLACIEN ET CONDITION D'EXTREMUM

1. Considérons une corde de masse négligeable, tendue entre deux points d'abscisses x_1 et x_2 ($x_2 - x_1 = L$), et de tension T . Son énergie

élastique U est égale à $T(l - L)$, où l est sa longueur. $y(x)$ étant le déplacement latéral, on a :

$$U = T \left(\int_0^L \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx - L \right) \approx \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx$$

Cette énergie doit être minimale à l'équilibre. L'équation d'Euler exprimant cette condition s'écrit : $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$. La corde à l'équilibre est donc rectiligne. Si la corde est soumise à la force transverse $F_y(x)$, l'énergie est égale à :

$$U = \frac{T}{2} \int_0^L \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 dx + \int_0^L F_y(x) y(x) dx$$

et doit être minimale. L'équation d'Euler n'est autre que l'équation de Poisson :

$$T \frac{d^2y}{dx^2} = -F_y(x)$$

2. Considérons maintenant une membrane élastique tendue sur un cadre rigide (c'est le problème de Plateau). Si le cadre est plan, la membrane est plane. Si on déforme le cadre, la membrane se déforme elle aussi mais, comme on l'a vu, elle ne présente pas de boursofflure : elle reste aussi lisse que possible, chaque point est un col symétrique, la courbure moyenne est nulle. Or l'absence de boursofflure traduit le fait que son énergie élastique $U = AS$ (A est la tension superficielle de la membrane, S son aire) est minimale compte tenu des conditions aux limites imposées par le cadre. La condition $\Delta f = 0$ d'équilibre de la membrane doit donc être l'équation d'Euler exprimant que U est minimale. Effectivement :

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2} dx dy$$

Pour de faibles déformations de la membrane par rapport à un plan horizontal :

$$U = \frac{A}{2} \iint |\vec{\text{grad}} f|^2 dx dy$$

et l'équation d'Euler qui exprime que U , ou S , ou encore la pente quadratique moyenne $\left\{ \left| \vec{\text{grad}} f \right|^2 \right\}$, est minimale n'est autre que : $\Delta f = 0$.

La membrane est dite *surface minima*. Cette notion de surface minima généralise la notion de plus court chemin entre deux points : si on impose à une surface minima une déformation locale, son aire augmente quelle que soit cette déformation (cette propriété n'a pas lieu en un point hyperbolique quelconque d'une surface quelconque bien que R_1 et R_2 soient de signes opposés).

L'équation $\Delta f = 0$ ne caractérise en fait une surface minima que si cette surface s'écarte peu d'un plan. Dans le cas général, une surface minima satisfait l'équation : $r(1 + q^2) - 2pqs + t(1 + p^2) = 0$ comme le montre l'équation, donnée précédemment, qui fournit les rayons de courbure principaux d'une surface en un point où le plan tangent n'est pas horizontal.

Reprenons le problème d'une goutte d'un liquide incompressible immergée dans un liquide de même densité et s'appuyant sur un cadre rigide. Nous avons vu que la surface (fermée) de séparation est à courbure moyenne constante, donc si $z = f(x, y)$ est l'équation de cette surface, Δf est constant. Cette condition de stabilité exprime que l'aire de cette surface est minimale pour les déformations de la goutte à volume constant. La condition $\Delta f = C$ apparaît effectivement comme équation d'Euler quand on minimise S avec la contrainte $\iiint d\tau = \text{constante}$ en utilisant la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Revenons à la membrane tendue sur un cadre rigide et supposons-la soumise à la pression $p(x, y)$. Alors l'énergie du système est :

$$U = AS + \iint f(x, y) p(x, y) dx dy$$

U est minimale si : $\Delta f = p(x, y)$. L'équation de Poisson est donc l'équation d'Euler du système. En particulier si $p(x, y)$ est uniforme, la membrane est une surface de courbure moyenne constante.

3. Considérons plus généralement une fonction scalaire $f(x,y,z)$ et exprimons que l'intégrale dite de Dirichlet :

$$\iiint |\vec{\text{grad}} f|^2 d\tau$$

étendue à un certain volume est minimale. L'équation d'Euler de ce problème est précisément : $\Delta f = 0$. La grandeur physique représentée par f se distribue donc de telle sorte que les variations imposées par les conditions aux limites se répartissent le plus régulièrement possible dans l'espace : l'anomalie locale est nulle.

Ainsi si V est le potentiel électrostatique, la propriété $\Delta V = 0$ exprime que l'énergie électrostatique emmagasinée dans l'espace, soit :

$$\frac{1}{\epsilon_0} \iiint \vec{E}^2 d\tau$$

est minimale. Si Φ est le potentiel des vitesses d'un fluide incompressible irrotationnel, $\Delta \Phi = 0$ exprime que l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} \rho \iiint \vec{v}^2 d\tau$$

est minimale compte-tenu des conditions initiales et des conditions aux limites (théorème de Kelvin).

Les équations de Poisson de l'électrostatique, de l'hydrodynamique,... s'obtiennent également à partir d'un principe variationnel relatif à l'énergie.

Notons, pour terminer, que le laplacien est le seul opérateur différentiel d'ordre 2 invariant à la fois par translation et par rotation. Cette propriété explique qu'il joue un rôle fondamental dans la description des systèmes homogènes et isotropes.

RÉFÉRENCES

J.P. BOURGUIGNON, H.B. LAWSON et C. MARGERIN, Les Surfaces Minima, Pour La Science (janvier 1986).

G. BRUHAT, Cours de Physique Générale, Mécanique (p. 465-467) et Électricité (p. 119), Masson, Paris (1963).

H. LAMB, Hydrodynamics, Dover, New-York (1945).

J.E.Mc DONALD, Am.J. Phys. 33,706 (1965).

H. MARGENEAU et G.M. MURPHY, The Mathematics of Physics and Chemistry, Van Nostrand, New-York (1956).

P.M. MORSE et H. FESHBACH, Methods of Theoretical Physics, Mc Graw Hill, New-York (1953).