Sur la prétendue équation de conservation de l'énergie électromagnétique R + T = 1

par Luc DETTWILLER
Lycée Blaise Pascal, 63000 Clermont-Ferrand

RÉSUMÉ

On envisage les expressions des facteurs de réflexion et de transmission R et T sous incidence normale sur un dioptre plan séparant deux milieux linéaires locaux homogènes et isotropes, quand ces milieux sont absorbants ; paradoxalement on ne vérifie plus :

$$R + T = 1\ !$$

D'autre part, on souligne que l'interprétation énergétique traditionnelle de R + T = 1 suppose, paradoxalement, que le vecteur de Poynting moyen dans le milieu d'entrée est la somme des vecteurs de Poynting moyens des ondes incidente et réfléchie, ce qui n'est pas vrai puisque ces ondes sont cohérentes entre elles ! On montre alors que l'on peut prévoir R + T = 1 en considérant, non pas une onde plane sous incidence normale, mais un faisceau de rayons parallèles, de dimensions finies, sous incidence très légèrement oblique ; pour cela il faut supposer en plus qu'il n'y a pas d'absorption dans le milieu d'entrée (où les faisceaux incident et réfléchi se chevauchent), ce qui résoud les deux paradoxes. Dans ce cas seulement R a une signification physique. Dans le cas général où les deux milieux sont absorbants, on vérifie par le calcul que les vecteurs de Poynting moyens dans les milieux d'entrée et de sortie sont égaux sur le dioptre.

Quand on étudie la réflexion d'une onde plane monochromatique homogène progressive, sous incidence normale sur un dioptre plan séparant deux milieux d'admittances Y_1 et Y_2, on trouve les relations suivantes entre les champs électriques des ondes incidente réfléchie et transmise (en représentation complexe) :

$$\vec{E}_r = r\,\vec{E}_i \quad \text{et} \quad \vec{E}_t = t\,\vec{E}_i \text{ sur le dioptre}$$

avec
$$r = \frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2} \qquad t = \frac{2\,Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

où Y_1 et Y_2 sont les admittances des milieux d'entrée et de sortie respectivement.

Rappelons que, dans le cas d'une onde plane monochromatique progressive, l'équation de Maxwell - Faraday $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ donne $\vec{B} = \dfrac{\vec{k}}{\omega} \wedge \vec{E}$, $\vec{k} = k\,\vec{u}$ et ω étant le vecteur d'onde et la pulsation ; comme en relation de dispersion est $k^2 = \omega^2\ \varepsilon\ (\omega)\ \mu\ (\omega)$, on en déduit :

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\vec{u} \wedge \vec{E}$$

où ε est la permittivité diélectrique du milieu et μ sa perméabilité magnétique. On remarque que la quantité $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$, qui est homogène à $\dfrac{\|\vec{H}\|}{\|\vec{E}\|}$, est aussi homogène à une admittance. De plus, elle répond à la «définition» générale d'une admittance, à savoir le «rapport» «réponse» sur «excitation», si on admet que - symboliquement - $\vec{H}$ soit la «réponse» à «l'excitation» $\vec{E}$ dans un milieu donné. Pour toutes ces raisons, on note Y la quantité $\sqrt{\dfrac{\varepsilon}{\mu}}$ et on l'appelle «admittance d'un milieu (pour une onde plane monochromatique progressive)». Notons au passage que, pour des matériaux non magnétiques, $\mu = \mu_0$ donc $Y_1 = n_1 \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ et $Y_2 = n_2 \sqrt{\dfrac{\varepsilon_0}{\mu_0}}$ où n_1 et n_2 sont les indices des deux milieux, ε_0 la permittivité diélectrique du vide et μ_0 la perméabilité magnétique du vide ; on retrouve alors des formules, moins générales mais bien connues des opticiens :

$$r = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \qquad t = \frac{2\,n_1}{n_1 + n_2}$$

Or, pour une onde plane monochromatique homogène progressive dans un milieu d'admittance Y, le vecteurs de Poynting moyen s'écrit :

$$<\vec{R}> = \frac{1}{2}\,\Re_e\,(\vec{E}^* \wedge \vec{H})$$

mais $\vec{H} = Y\,\vec{u} \wedge \vec{E}$, où $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dirigeant l'onde ; or $\vec{u}\,.\,\vec{E} = 0$, et en plus l'onde est homogène donc $\vec{u}$ est réel et $\vec{u}^*\,.\,\vec{E}^* = \vec{u}\,.\,\vec{E}^* = 0$

d'où
$$<\overrightarrow{R}> = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y\right) \|\overrightarrow{E}\|^2 \ \overrightarrow{u}$$

Les flux (moyens) des ondes incidente, réfléchie et transmise par unité de surface du dioptre sont donc, respectivement :

$$\Phi_i = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_1\right) \|\overrightarrow{E_i}\|^2$$
$$\Phi_r = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_1\right) \|\overrightarrow{E_r}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_1\right) |r|^2 \ \|\overrightarrow{E_i}\|^2$$
$$\Phi_t = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_2\right) \|\overrightarrow{E_t}\|^2 = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_2\right) |t|^2 \ \|\overrightarrow{E_i}\|^2$$

d'où les facteurs de réflexion et de transmission dans les cas où les milieux sont non absorbants (donc Y_1 et Y_2 sont réels) :

$$R = \frac{\Phi_r}{\Phi_i} = |r|^2 = \left(\frac{Y_1 - Y_2}{Y_1 + Y_2}\right)^2$$
$$T = \frac{\Phi_t}{\Phi_i} = \frac{Y_2}{Y_1} \ |t|^2 = \frac{4\, Y_2 \,.\, Y_1}{\left(Y_1 + Y_2\right)^2}$$

Et on vérifie bien que R + T = 1, i.e. $\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t$; on interprète cela rapidement comme l'expression de la conservation de l'énergie électromagnétique (il n'y a pas de dissipation par absorption).

Le but de cet article est de montrer que cette interprétation énergétique n'est pas toujours valable, et doit être maniée avec précaution à cause de deux faits : l'absorption dans les milieux d'entrée et de sortie, et les interférences entre l'onde incidente et l'onde réfléchie. On comprendra finalement que R ne peut avoir de sens physique que si le milieu d'entrée n'est pas obsorbant.

1. POSITION D'UN PARADOXE

Considérons maintenant le cas - réaliste - où les milieux sont absorbants : Y_1 et Y_2 sont complexes.

Alors : $R = \dfrac{\Phi_r}{\Phi_i} = |r|^2$ reste valable !

(ce résultat peut être intéressant pour expliquer la couleur de métaux comme l'or et le cuivre par réflexion ; sachant que leur conductivité varie avec la pulsation ω en $\sigma = \dfrac{\sigma_0}{1 - i\omega\tau'}$ que leur indice n est tel que $n^2 = 1 + i\,\dfrac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ et que leur perméabilité magnétique est $\mu = \mu_0$, on en déduit la dépendance de R en ω ; quant à l'expression de T, elle se généralise par :

$$T = \frac{\Re_e\, Y_2}{\Re_e\, Y_1}\;|\,t\,|^{\,2}$$

En posant $Y_1 = Y'_1 + iY''_1$ et $Y_2 = Y'_2 + iY''_2$ où Y'_1, Y''_1, Y'_2 et Y''_2 sont réels, le calcul de R + T donne :

$$R + T = \frac{\left(Y'_1 - Y'_2\right)^2 + \left(Y''_1 - Y''_2\right)^2}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2} + \frac{Y'_2}{Y'_1} \times 4\,\frac{Y'^{\,2}_1 + Y''^{\,2}_1}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2}$$

$$= \frac{\left(Y'_1 + Y'_2\right)^2}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2} + \frac{\left(Y''_1 - Y''_2\right)^2 + 4\,Y'_2\,Y''^{\,2}_1/Y'_1}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2}$$

et le second terme du membre de droite n'étant pas égal à $\left(Y''_1 + Y''_2\right)^2 / \left|Y_1 + Y_2\right|^2$, on ne trouve pas R + T = 1.

D'abord, on n'est même pas sûrs de trouver R + T ≤ 1, il faudrait pour cela $Y'_2\, Y''_1 \leq\ Y''_2\, Y'_1$!!! ...

Ensuite, quand bien même ce serait réalisé, l'absorption dans les milieux (décrite par les constantes complexes) est incapable de justifier une dissipation d'énergie électromagnétique : car il n'y a rien d'autre que ces deux milieux et pas de film absorbant en plus sur le dioptre...

2. PROPOSITIONS DE RÉSOLUTION DE CE PARADOXE

2.1. Idées douteuses

α - Faudrait-il admettre qu'une absorption volumique entraîne forcément une absorption surfacique sur un dioptre ! On ne saurait justifier une telle hypothèse, qui resterait ad hoc.

β - N'oublions pas que la réfraction d'une onde plane homogène à l'interface de deux milieux absorbants différents engendre a priori une onde inhomogène ! Or, pour une telle onde, les propriétés du vecteur de Poynting sont beaucoup plus complexes que celles que nous avons utilisées (en exprimant $<\vec{R}>$) car $\vec{u}$ est complexe donc $\vec{u}^* \cdot \vec{E}^* = 0$ mais $\vec{u} \cdot \vec{E}^*$ est non nul a priori...

Cependant toute notre étude suppose l'incidence normale (dès les expressions de r et t) ; et, dans ce cas, la réfraction d'une onde homogène n'engendre pas d'onde inhomogène.

γ - L'expression du vecteur de Poynting $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$ est-elle valable dans le milieu matériel, en admettant au préalable $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$ dans le vide... ?

En effet, l'équation de continuité de l'énergie électromagnétique dans un milieu matériel doit s'écrire :

$$\operatorname{div} \vec{R} + \frac{\partial \omega}{\partial t} = -\vec{j_l} \cdot \vec{E} - \sigma_d$$

où ω est sa densité, $\vec{jl}$ la densité de courant libre et σ_d la densité de la dissipation de cette énergie. Or, les équations de Maxwell mènent à :

$$\operatorname{div}(\vec{E} \wedge \vec{H}) + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{j_l} \cdot \vec{E}$$

L'assimilation de $\vec{R}$ à $\vec{E} \wedge \vec{H}$ est-elle fondée (compte tenu de celle de $\vec{R}$ à $\vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$ dans le vide) ? NON, a priori... Les problèmes énergétiques dans les milieux matériels sont très ardus ; ils le sont encore encore plus quand les milieux sont absorbants car il y a toujours une dissipation, difficile à estimer fondamentalement, et une irréversibilité corrélativement ! Le problème ne peut être étudié correctement qu'au niveau microscopique et on a pu démontrer que la moyenne spatiale des flux d'énergie est bien décrite par $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{H}$.

2.2. Autre paradoxe, plus général...

L'erreur n'est-elle pas à la base, dans le fait de croire que R + T = 1 est vraiment l'expression d'un bilan d'énergie ? En effet, une telle opinion suppose implicitement l'additivité des vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchie, ce qui n'est pas le cas à cause de la cohérence parfaite caractéristique des ondes monochromatiques...

La conservation de l'énergie électromagnétique, à la traversée du dioptre, exprime l'égalité du flux total incident et du flux transmis. Or, si le flux transmis est bien $\Phi_t = T\,\Phi_i$, le flux total incident N'EST PAS $\Phi_i - \Phi_R = (1 - R)\,\Phi_i$!

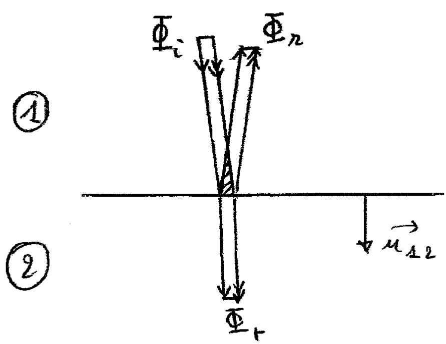
Alors pourquoi a-t-on trouvé R + T = 1 avec des milieux non absorbants ? N'était-ce qu'un heureux hasard... ? En fait non. Et nous allons montrer que la réponse à cette question, en nous fournissant le sens de la relation R + T = 1, nous apportera complètement la solution à ces deux paradoxes.

3. RÉSOLUTION

3.1. Signification du R + T = 1 : bilan énergétique volumique

L'expression d'un bilan énergétique par $\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t$ suppose donc implicitement l'additivité des vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchie. Comme ces ondes sont cohérentes entre elles, ce n'était pas vrai a priori.

Mais cela le devient dans des domaines où ces ondes spatialement séparées : il suffit alors de considérer que l'on n'a pas rigoureusement des ondes planes mais des pinceaux lumineux décrits par des ondes quasi-planes ; et que l'incidence n'est pas exactement normale mais légèrement oblique, donc les pinceaux incident et réfléchi seront toujours séparés assez loin du dioptre (voir figure).



Interprétation de R + T = 1

On a considéré trois sections d'aires sur ces trois pinceaux ; les flux au travers de ces sections sont Φ_i S, Φ_r S et Φ_t S.

Si dans le domaine de l'espace situé à l'intérieur des pinceaux et limité par ces trois sections - domaine qui doit contenir entièrement la zone où le faisceau incident et le faisceau réfléchi se cheveauchent - il n'y a pas de dissipation ni d'apparition d'énergie électromagnétique en moyenne, alors on peut dire à tout instant que :

$$\Phi_i\, S = \Phi_r\, S + \Phi_t\, S,$$

$$\text{i.e } R + T = 1$$

car $<\vec{R}>$ est à flux conservatif.

Ceci est possible car on est en régime harmonique forcé (onde monochromatique) et que le milieu d'entrée 1 n'est ni absorbant, ni amplificateur. Voilà pourquoi on a pu vérifier R + T = 1 si les admittances des milieux 1 et 2 sont réelles.

Mieux : on peut prédire que, si le milieu 1 seulement a une admittance réelle, on doit trouver R + T = 1 car c'est seulement dans le milieu 1 que les sections des pinceaux doivent être à une distance non nulle du dioptre - puisque la zone de chevauchement des pinceaux se trouve dans le milieu 1 -. Le calcule du § 1, le vérifie instantanément (il suffit d'y poser Y''1 = 0).

3.2. **Cas où les deux milieux sont absorbants**

Ce bilan énergétique pour ce domaine de l'espace à trois dimensions, n'est plus possible sans tenir compte de la dissipation d'énergie à l'intérieur de ce domaine (on suppose ici qu'il n'y a pas amplification).

On a alors : $\Phi_i > \Phi_r + \Phi_t$

mais

$$\Phi_i > \frac{1}{2}\left(\Re_e\, Y_1\right)\, \| \vec{E_i} \|^2$$

$$\Phi_r < \frac{1}{2}\left(\Re_e\, Y_1\right)\, | r |^2\, \| \vec{E_i} \|^2$$

$$\Phi_t < \frac{1}{2}\left(\Re_e\, Y_2\right)\, | t |^2\, \| \vec{E_i} \|^2$$

où $\overrightarrow{E_i}$ est le champ de l'onde incidente **à la surface du dioptre ;** il est donc vain de vouloir en déduire :

$$|r|^2 + \frac{\Re_e Y_2}{\Re_e Y_1} |t|^2 < 1$$

(car il faudrait que toutes les inégalités sur les flux soient en sens inverse).

Le seul bilan énergétique que l'on puisse dresser sans tenir compte de dissipations ou d'amplification a lieu sur une surface donnée du dioptre : le flux moyen (incident) sur le dioptre du côté 1 est égal au flux moyen (émergent) sur le dioptre du côté 2.

Or sur le dioptre, du côté 2, on a toujours :

$$<\overrightarrow{R}> = \frac{1}{2}\left(\Re_e Y_2\right) |t|^2 \; ||\overrightarrow{E_i}||^2 \; \overrightarrow{u_{1\,2}}$$

Mais sur le dioptre du côté 1 en tenant compte de la superposition des faisceaux, on a :

$$\begin{aligned} <\overrightarrow{R}> &= \frac{1}{2}\Re_e\left[\left(\overrightarrow{E_i}+\overrightarrow{E_r}\right)^* \wedge \left(\overrightarrow{H_i}+\overrightarrow{H_r}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\Re_e\left[(1+r*)\,\overrightarrow{E_i}^* \wedge Y_1\left\{\overrightarrow{u_{1\,2}}\wedge\overrightarrow{E_i} - \overrightarrow{u_{1\,2}}\wedge r\overrightarrow{E_i}\right\}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left\{\Re_e\left[\,(1+r*)\,(1-r)\,Y_1\right]\right\} \; ||\overrightarrow{E_i}||^2 \; \overrightarrow{\mu_{1\,2}} \end{aligned}$$

Il doit donc y avoir la relation :

$$\Re_e\left[(1+r*)\,(1-r)\,Y_1\right] = \left(\Re_e Y_2\right) |t|^2$$

et c'est bien le cas ; en effet :

$$z = (1+r*)\,(1-r) = 1 - 2i\,\mathrm{Im}\,r - |r|^2 \text{ et } r = \frac{\left(Y'_1 - Y'_2\right) + i\left(Y''_1 - Y''_2\right)}{\left(Y'_1 + Y'_2\right) + i\left(Y''_1 + Y''_2\right)}$$

donc : $\mathrm{Im}\,r = \dfrac{-\left(Y''_1+Y''_2\right)\left(Y'_1-Y'_2\right)+\left(Y''_1-Y''_2\right)\left(Y'_1+Y'_2\right)}{\left|Y_1+Y_2\right|^2} = \dfrac{2\left(Y''_1\,Y'_2 - Y''_2\,Y'_1\right)}{\left|Y_1+Y_2\right|^2}$

d'où : $$z = \left[1 - \frac{\left(Y'_1 - Y'_2\right)^2 + \left(Y''_1 - Y''_2\right)^2}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2}\right] + i\,\frac{4\left(Y''_2\,Y'_1 - Y''_1\,Y'_2\right)}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2}$$

et : $$\Re_e\left(z\,Y_1\right) = Y'_1\left[1 - \frac{\left(Y'_1 - Y'_2\right)^2 + \left(Y''_1 - Y''_2\right)^2}{\left(Y'_1 + Y'_2\right) + \left(Y''_1 + Y''_2\right)^2}\right] - Y''_1\,\frac{4\left(Y''_2\,Y'_1 - Y''_1\,Y'_2\right)}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2}$$

$$= Y'_2\,\frac{4\left(Y'^2_1 + Y''^2_1\right)}{\left|Y_1 + Y_2\right|^2} = \left(\Re_e\,Y_2\right)\left|\frac{2\,Y_1}{Y_1 + Y_2}\right|^2$$

CONCLUSION

Cette étude a montré que le bilan énergétique conduisant à R + T = 1 n'est possible que si le milieu d'entrée est non absorbant. Dans ce cas seulement R peut être défini comme le rapport du flux réfléchi au flux incident, en mesurant ces flux en des endroits où les faisceaux incident et réfléchi sont séparés pour éviter que ces faisceaux y interfèrent. Si le milieu d'entrée était absorbant, les flux mesurés dépendraient de la distance au dioptre, et leur mesure sur le dioptre ne serait pas possible à cause des interférences entre les faisceaux incidents et réfléchis ; donc R perdrait toute signification physique.

Dans le cas ou le milieu d'entrée est non absorbant seulement, et pour l'incidence normale, on peut retenir les relations :

$$R = |\,r\,|^2 \qquad T = \frac{\Re_e\,Y_2}{Y_1}\,|\,t\,|^2$$

pour l'incidence oblique, comme la réfraction avec un milieu absorbant engendre généralement une onde inhomogène, les facteurs R et T donnés par les formules de Fresnel ne sont plus valables a priori et leur expression est beaucoup plus complexe.