Problèmes thermiques périodiques en régime établi

par J.C. CHAMPOUSSIN
Laboratoire de Machines Thermiques
École Centrale de Lyon, B.P. 163, 69131 Écully Cedex

RÉSUMÉ

La présente étude porte sur la forme et l'unicité de la solution des problèmes thermiques linéaires à conditions de surface périodiques, en régime établi. On montre que la périodicité de la cause implique la périodicité de la solution, laquelle devient, lorsque $t \rightarrow \infty$ indépendante de la condition initiale. Cette propriété sera ensuite utilisée pour démontrer l'unicité de la solution des problèmes thermiques en régime périodique établi.

NOMENCLATURE

a	diffusivité thermique
k	constante entière
n	entier positif, ou normale
p	période
$\mathscr{t}$	température solution du système I
t	temps
u	température solution du système II
v	température solution du système III
w	température créée par la cause $\overline{\phi}$, équations (2) et (3)
x	point du solide.

<u>Symboles grecs</u>

α	constante
θ	température instantanée en régime établi, équations (2) et (3)
λ	conductivité thermique

τ temps défini par l'équation (4)

ϕ fonction périodique caractérisant les conditions de surface

$\bar{\phi}$ moyenne de la fonction ϕ sur une période

$\tilde{\varphi}$ composante fluctuante de ϕ

Ω domaine

$\bar{\Omega}$ domaine et sa frontière

$\partial \Omega$ frontière du domaine

Opérateurs

$\mathscr{L}$ opérateur représentant l'équation de la chaleur

$\mathscr{N}$ opérateur représentant les conditions de surface

Δ opérateur laplacien

∇ opérateur nabla

Indices

0 condition initiale

$i = 1,2$ milieux solides

$j = 1,2,3,4$ conditions de surface de première à quatrième espèce.

INTRODUCTION

La solution des problèmes thermiques linéaires en régime établi, et à conditions de surface périodiques, n'est habituellement donnée que pour des cas particuliers, les plus classiques correspondant à des conditions sinusoïdale ou en créneau et à des formes de solides cylindrique ou parallélipipédique. Le système d'équations obtenu est alors résolu en admettant a priori que la solution est également périodique [1 à 4].

Considérant le cas plus général d'une condition périodique, appliquée sur la surface d'un solide de forme quelconque, nous montrons qu'il en est bien ainsi. Ce résultat sera ensuite utilisé dans la démonstration de l'unicité de la solution des problèmes thermiques à conditions de surface périodiques.

1. **Périodicité de la solution**

La température à l'intérieur d'un corps solide, isotrope et homogène, soumis à des conditions de surface périodiques en fonction du temps, satisfait au système d'équations :

$$
\text{où I}\begin{cases}
\mathcal{L}(\vartheta) = 0 & (X, t) \in \Omega \times]0, \infty[\\
\mathcal{N}_j(\vartheta) = \phi(X, t),\ j = [1, 2, 3]\ ; & (X, t) \\
\phi(X, t) = \phi(X, t + np) & (X, t)
\end{cases}
\left.\vphantom{\begin{matrix}a\\b\end{matrix}}\right\} \in \partial\Omega \times]0, \infty[
$$

$$
\vartheta(X, 0) = \vartheta_0(X) \qquad (X, t) \in \overline{\Omega} \times [0]
$$

Dans ces équations qui s'appliquent également à tout milieu siège d'un transfert de chaleur par conduction, p désigne la période du phénomène, ϑ désigne la température à l'instant t, en un point X de coordonnées x_1, x_2, x_3 d'un domaine Ω borné par sa frontière $\partial\Omega$. Les opérateurs linéaires :

$$
\mathcal{L}(\vartheta) \equiv \left(\Delta - \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\right)\vartheta \quad \text{et}\ \mathcal{N}_j(\vartheta),\ \left(\mathcal{N}_1(\vartheta) \equiv \vartheta,\ \mathcal{N}_2(\vartheta) \equiv \frac{\partial\vartheta}{\partial n},\ \mathcal{N}_3(\vartheta) \equiv \quad + a\frac{\partial\vartheta}{\partial n}\right)\mathrm{re}^{-}
$$

présentent respectivement l'équation de la chaleur sans sources et les conditions aux limites spatio-temporelles associées. On exclut bien entendu les problèmes qui n'ont pas de sens physique, par exemple si la valeur moyenne sur une période, du flux thermique à travers la frontière, n'est pas nulle.

L'hypothèse de linéarité permet de décomposer le problème général en séparant condition initiale et conditions de surface. Posons pour cela :

$$
\vartheta = u + v \tag{1}
$$

u et v satisfaisant respectivement les systèmes II et III suivants :

$$
\text{II}\begin{cases}
\vartheta(u) = 0 \\
\vartheta(u) = 0 \\
\\
u(X, 0) = \vartheta_0(X)
\end{cases}
\qquad
\text{III}\begin{cases}
\mathcal{L}(v) = 0 \\
\mathcal{N}(v) = \phi(X, t) \\
\phi(X, t) = \phi(X, t + np) \\
v(X, 0) = 0
\end{cases}
$$

Dans le système III, la condition périodique de surface ϕ (X,t) peut s'écrire :

$$\phi\,(X, t) = \bar{\phi}\,(X) + \phi\,(X, t) \tag{2}$$

où $\bar{\phi}\,(X)$ désigne la valeur de la moyenne de la fonction ϕ sur une période et $\phi\,(X, t)$ sa composante fluctuante. On définit alors la correspondance entre les termes de la condition de surface (ou cause du phénomène) et les températures créées, de la manières suivante :

$$\begin{array}{ccccc} \phi\,(X, t) & = & \bar{\phi}\,(X) & + & \phi\,(X, t) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ v\,(X, t) & = & w\,(X, t) & + & \theta\,(X, t) \end{array} \qquad \begin{array}{r} (2) \\ \\ (3) \end{array}$$

En utilisant le théorème de DUHAMEL [5] pour la résolution du système linéaire III, et en ne considérant que l'effet θ dû à la cause variable ϕ, on obtient :

$$\theta\,(X, t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial\,\phi}\left\{\theta\left(X, \tau, \tilde{\phi}\,(t-\tau)\right)\right\}\frac{d\tilde{\phi}}{d\tau}\,d\tau \tag{4}$$

d'où, d'après (1), (3) et (4), la solution générale du système I :

$$\mathscr{L}\,(X, t) = u\,(X, t) + w\,(X, t) + \int_0^t \frac{\partial\,\phi}{\partial\,\tilde{\phi}}\,\frac{d\tilde{\phi}}{d\tau}\,d\tau \tag{5}$$

En régime établi, c'est-à-dire pour $t \to \infty$, l'opérateur $\mathscr{L}$ relatif à u dans le système II se réduit à l'opérateur Δ. La solution correspondante au nouveau système prend donc des valeurs finies u(X) constantes en chaque point. De même le terme w relatif à la cause $\bar{\phi}\,(X)$ tend lui aussi vers une limite w(X). Cette température w(X) a une signification physique précise. Elle correspond, pour t grand, à l'effet créé par la valeur moyenne $\bar{\phi}\,(X)$ de la cause ϕ (X, t) imposée sur la frontière.

Quant au terme fluctuant θ, sa variation est définie par l'équation (4). Or, aux instants successifs t + np, on a par hypothèse, même valeur de $\tilde{\phi}\,(t)$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial\,\tilde{\phi}}\left\{\theta\left(X, \tau, \tilde{\phi}\,(t+np-\tau)\right)\right\} = \frac{\partial}{\partial\,\tilde{\phi}}\left\{\theta\left(X, \tau, \tilde{\phi}\,(t-\tau)\right)\right\} \tag{6}$$

et
$$\frac{d}{d\tau}\left(\tilde{\phi}\,(t+np-\tau)\right)=\frac{d}{d\tau}\left(\tilde{\phi}\,(t-\tau)\right) \tag{7}$$

de sorte que la fonction ϕ représentée par l'intégrale (4) du produit de deux fonctions périodiques, est elle-même une fonction périodique. Ainsi, pour $t \to \infty$, la température $\mathscr{E}$ en un point, donnée par (5), est bien une fonction périodique du temps et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

1. Sous les hypothèses de linéarité précédentes, si des causes périodiques de la forme (2) sont appliquées sur la surface d'un solide de diffusivité constante, en régime établi, la température $\mathscr{E}$ en chaque point du solide est périodique, quelle que soit la condition initiale.

2. La fluctuation θ de la température $\mathscr{E}$ autour de sa valeur moyenne est indépendante à la fois de la condition initiale et de la valeur moyenne $\overline{\phi}$ (X) de la cause.

2. Remarques sur le résultat

Dans les applications thermocinétiques, il est fréquent de ne s'intéresser qu'à la fluctuation θ (X,t) de la température. On est alors amené à considérer la résolution du système IV ci-dessous au lieu du système I initial :

$$\text{IV}\begin{cases}\mathscr{L}\,(\theta)=0 & (X,t)\ \in\ \Omega\times[0,p]\\ \mathscr{L}\,(\theta)=\tilde{\phi}\,(X,t) & (X,t)\\ \phi\,(X,t)=\tilde{\phi}\,(X,t+np) & (X,t)\end{cases}\ \ \Big\}\in\partial\,\Omega\times[0,p]$$
$$\theta\,(X,t)=\theta\,(X,t+np) \qquad (X,t)\ \in\ \overline{\Omega}\times[0,p]$$

Dans ce système, la condition initiale est remplacée par la condition de périodicité de la solution.

Dans la démonstration précédente, on a supposé que la période fondamentale p est indépendante du point X, choisi sur la frontière. Le résultat obtenu semble pouvoir s'appliquer également pour des conditions de surfaces sinusoïdales dont les périodes sur des portions finies de la frontière sont des multiples de l'une d'elles. Ainsi pour un mur dont les faces planes sont soumises à deux causes sinusoïdales de fréquences ω_1 et ω_2 telles que $\omega_1 = k\omega_2$, où k est un entier, la solution en un point du mur est encore périodique.

BIBLIOGRAPHIE

[1] V. VODICKA, Circular cylinder in a periodic temperature field, Appl. Sci. Res., Section A.5., 268-272 (1955).

[2] SAINT-BLANQUET, B. FOURCHER, J.-P. BARDON, Étude des champs thermiques permanents ou sinusoïdaux dans un cylindre limité, Entropie, N° 38, 14-22-(1971).

[3] H. S. CARSLAW and J.-C. JAEGER, Conduction of heat in solids, Second Edition, Oxford University Press, London (1959).

[4] V. S. ARPACI, Conduction heat transfer, p. 236, Addison-Wesley (1966).

[5] P. VERNOTTE, Thermocinétique Générale, p. 58, P.S.T. n° 379, Ministère de l'Air, Paris (1961).