

## T.D. informatisé sur la diffusion de la chaleur (unidirectionnelle)

par D. DESCOUT  
Lycée Chaptal

### 1. OBJECTIF

On étudie un phénomène de transfert thermique, en relation avec le programme de physique de première année des classes préparatoires scientifiques («phénomènes de diffusion ; conductivité thermique ; loi de «Fourier») à l'aide de l'ordinateur.

Cette étude peut servir de base pour une séance de travaux dirigés en salle d'informatique.

### 2. THÉORIE

La loi de Fourier dépendant du temps, pour le transport d'énergie calorifique dans une direction donnée ( $\vec{Oz}$ ) est :

$$D \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

T est la température à une date donnée, dans un plan  $z = \text{constante}$  donné. Le coefficient D est la diffusibilité du milieu (unité :  $\text{m}^2/\text{s}$ ) ; on le suppose uniforme, indépendant du temps et de la température.

On sait résoudre cette équation aux dérivées partielles dans certains cas simples. On se propose d'utiliser la rapidité du calcul de l'ordinateur pour visualiser le cas d'une onde sinusoïdale dans un milieu homogène.

Un milieu semi infini ( $z \geq 0$ ) a la température uniforme  $T_0$ , à  $t \leq 0$ . A partir de  $t = 0$ , on impose à sa frontière (plan  $z = 0$ ) une variation périodique sinusoïdale de température, d'amplitude  $\theta_0$ , de période  $\tau$ , soit :

$$T(0, t) = T_0 + \theta_0 \cdot \sin 2\pi \frac{t}{\tau}$$

La solution, non transitoire,  $T(z, t)$ , compatible avec cette condition à la limite, est de la forme :

$$T(z, t) = T_0 + \theta(z, t), \quad \text{avec} \quad \theta(z, t) = \theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) \cdot \sin\left(2\pi \frac{t}{\tau} - \frac{z}{\delta}\right);$$

où  $\delta$  est une longueur fonction de  $D$  et  $\tau$ , selon la loi :

$$\delta^2 = \frac{\tau D}{\pi} \quad (2)$$

Cette solution représente une onde progressive atténuée dans la direction  $\vec{Oz}$ , vers les  $z$  croissants, de vitesse de phase  $v$ , et pour laquelle le milieu présente une «épaisseur de peau»  $\delta$ .

### 3. PROGRAMMATION

Le milieu semi infini est représenté par un nombre fini (choix :  $n_{\text{Max}} = 50$ ) de niveaux (plans  $z = \text{constante}$ ). L'ordinateur calcule, par itérations successives, la fonction  $\theta(z, t)$ , initialisée par  $\theta(z, 0) = 0$ , pour tout  $z \neq 0$ . La condition à la limite ( $z = 0$ ), dépendant du temps ( $\theta(0, t)$ ) est donnée. On a fixé la valeur de  $\theta_0$  (choix : 80) pour faciliter la mise en page graphique.

L'écart entre deux niveaux voisins et une itération, représentent respectivement un intervalle d'espace élémentaire  $\Delta z$ , et un intervalle de temps élémentaire  $\Delta t$ .

La loi de Fourier est traitée à l'aide de différences finies.

Soit  $\theta(n, i)$  la fonction, des variables  $i$  et  $n$  à valeurs entières, représentant la température  $\theta(z, t)$ . Il faut admettre les correspondances suivantes :

cotes (z)	0	$z - \Delta z$	$z$	$z + \Delta z$	$z$ infini ( $> 0$ )
niveaux (n)	0	$n - 1$	$n$	$n + 1$	$n \geq 50$

dates (t)	0	$t$	$t + \Delta t$	$t$ infini
itérations (i)	0	$i$	$i + 1$	$i \geq i_{\text{Max}}$

et d'autre part  $\frac{\partial \theta}{\partial t}(z, t) \sim \frac{1}{\Delta t} [\theta(z, t + \Delta t) - \theta(z, t)]$

est représentée par  $\theta(n, i + 1) - \theta(n, i)$  ;

de même :  $\frac{\partial \theta}{\partial z}(z, t) \sim \frac{1}{\Delta z} [\theta(z + \Delta z, t) - \theta(z, t)]$  par  $\theta(n + 1, i) - \theta(n, i)$

et  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}(z, t) \sim \frac{1}{(\Delta z)^2} [\theta(z + \Delta z, t) + \theta(z - \Delta z, t) - 2\theta(z, t)]$

est représentée par  $\theta(n + 1, i) + \theta(n - 1, i) - 2\theta(n, i)$ .

Finalement la loi Fourier est représentée par :

$$\frac{d}{2} \cdot [\theta(n + 1, i) + \theta(n - 1, i) - 2\theta(n, i)] = \theta(n, i + 1) - \theta(n, i) \quad (3)$$

où le coefficient de diffusion  $d$  représente :  $2D \frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} (> 0)$  , avec  $\Delta t = 1$  et  $\Delta z = 1$ .

La validité de la méthode repose, entre autres considérations, sur la petitesse relative des termes négligés devant les termes conservés à chaque itération. En particulier, on aura intérêt à choisir  $\tau \gg \Delta t (= 1)$ . D'autre part, le choix  $d > 1$  est impossible.

#### 4. SIMULATIONS

##### A) Étude n° 1 : onde progressive

En choisissant un nombre maximum d'itérations (tMax) largement supérieur à la période  $\tau$ , on met en évidence :

- le propagation de l'onde, et son atténuation,
- la faible valeur de  $\delta$  pour les faibles périodes, ou pour les coefficients de diffusion faibles,
- l'éloignement du niveau nMax, relativement aux niveaux voisins de  $\delta$  (voir exemples d'écrans).

## B) Étude n° 2 : atténuation de l'onde

On se propose de vérifier la dépendance de l'épaisseur de peau  $\delta$  vis-à-vis de la période  $\tau$ , d'une part, et de la diffusibilité  $D$ , d'autre part.

Le programme, pour  $(n_{\text{Max}} - n) < 2 \tau$ , mémorise les amplitudes locales d'oscillation de  $\theta(n, i)$  pour chaque valeur de  $n$ , et trace, après la fin de la série d'itérations, à l'écran, le graphe donnant le logarithme décimal de l'amplitude  $\theta(n)$ .

{On enregistre, à l'imprimante, à  $d$  donné, trois graphes ou davantage, pour des valeurs différentes de  $\tau$ .

On recommence les enregistrements pour d'autres valeurs de  $d$ .}

Ces courbes présentent une partie rectiligne pour les faibles valeurs de  $n$ , de pente  $p$  négative, que l'on mesure.

On vérifie la constance approchée du produit  $\tau p^2$  à  $d$  donné. Pour l'ensemble des enregistrements, on vérifie la constance du produit  $K = d\tau p^2$ .

## 5. INTERPRÉTATION

### A) Accord entre simulation et théorie

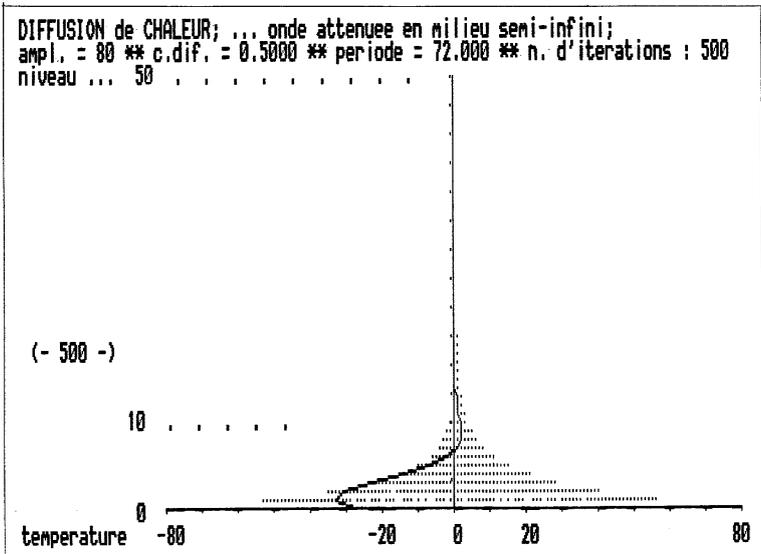
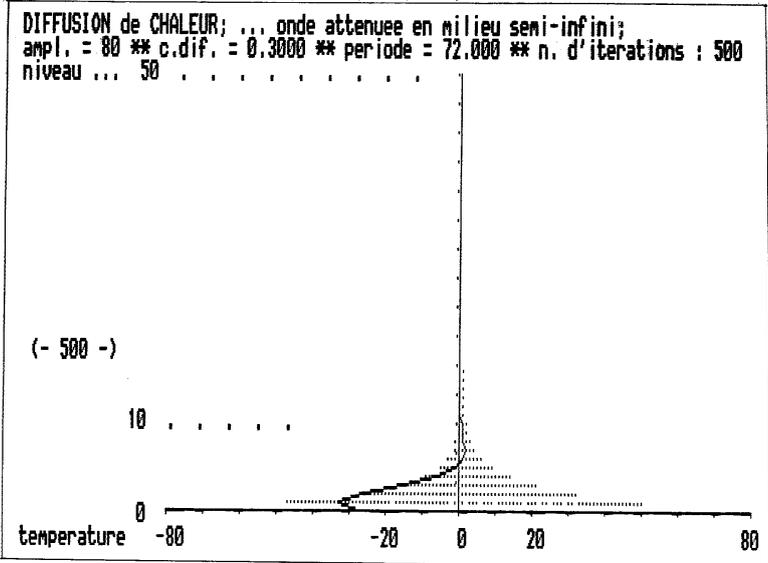
L'amplitude de la fonction  $\theta(z, t)$  est  $\theta_0 \exp\left(-\frac{z}{\delta}\right) = a(z)$ . Donc

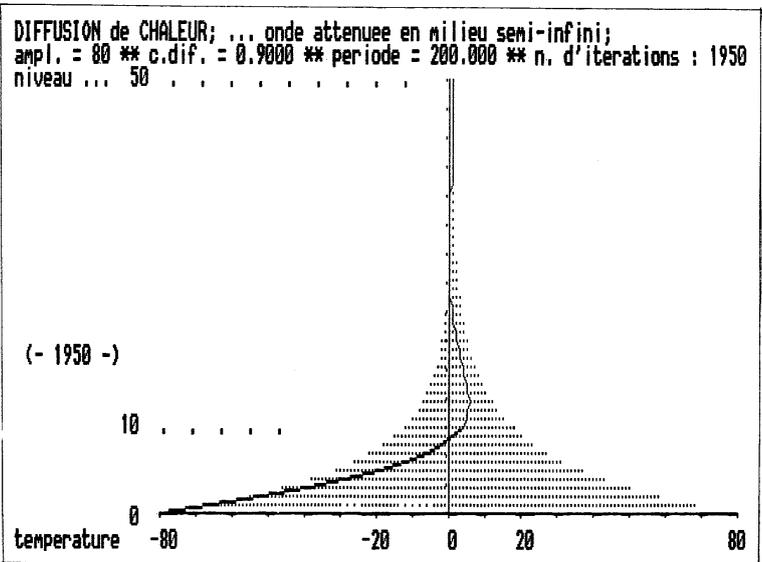
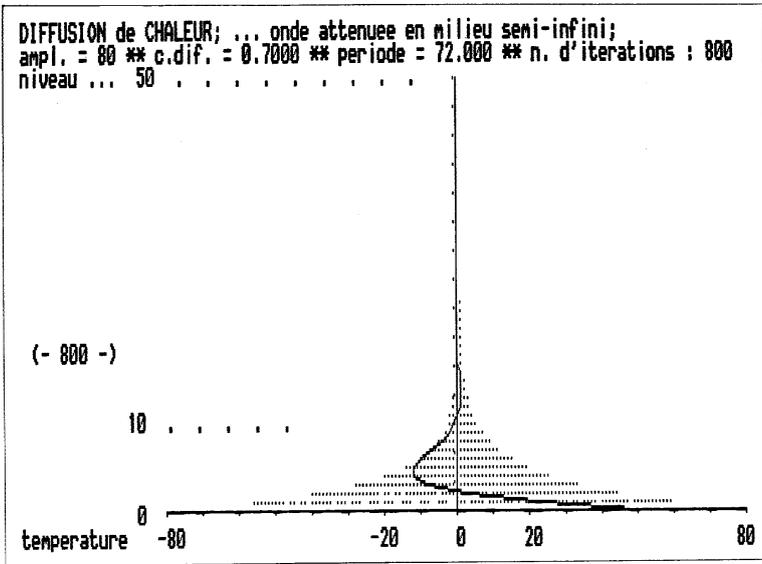
$$\log\left(a(z)\right) = \frac{1}{\ln 10} \left( \ln \theta_0 - \frac{z}{\delta} \right).$$

Le graphe de cette fonction affine de  $z$  est une droite de pente  $p = -1/\delta \cdot \ln 10$ , passant par le point  $(0, \log 80)$ .

D'après la loi (2), et la correspondance entre  $d$  et  $D$ , la pente  $p$  est liée à  $\tau$  et  $d$  par :

$$d\tau p^2 = \frac{2\pi}{(\ln 10)^2} \quad (=N) \quad (4)$$





La comparaison de ce nombre  $N$  et du nombre  $K$  mesuré, ou le calcul du coefficient  $\frac{|N-K|}{N}$  donne une évaluation de l'accord entre la simulation et la théorie (accord parfait pour  $K = N$ ).

## **B) Amélioration de l'accord**

*a)* La simulation d'un milieu semi-infini par un nombre fini de niveaux introduit une seconde frontière ( $n_{\text{Max}} = 50$ ) dont le rôle n'est pas étudié ici, mais qui est responsable de la partie non rectiligne des graphes édités.

On peut chercher à éloigner cette frontière en augmentant  $n_{\text{Max}}$ , mais on augmente en proportion la durée d'exécution de chaque itération.

On peut chercher à introduire une condition supplémentaire en  $n = n_{\text{Max}}$  pour neutraliser la rôle de cette frontière.

Physiquement, il faut s'assurer qu'après l'arrivée du front de l'onde en  $n = n_{\text{Max}}$  (c'est-à-dire après l'itération  $i = n_{\text{Max}}$ ) aucune onde réfléchie n'est renvoyée vers la surface ( $n = 0$ ).

*b)* Le nombre fini des itérations ne permet pas d'éliminer totalement le rôle du régime transitoire d'installation de l'onde, particulièrement sensible si  $t_{\text{Max}}$  est de l'ordre de  $\tau$ .

On peut chercher à augmenter  $t_{\text{Max}}$  pour éteindre au mieux le régime transitoire, mais on augmente en proportion la durée totale de tracé d'un graphe.

On peut chercher à introduire une condition supplémentaire qui évalue la constance de l'amplitude  $\theta(n)$ , au moins pour  $n$  faible, et sur une durée de plusieurs périodes, à  $n$  donné.

## **6. EXPLOITATION EN TRAVAUX DIRIGÉS**

Les régimes transitoires et non transitoires de transfert thermique sont difficiles à mettre en œuvre expérimentalement en travaux pratiques de Physique.

Par une méthode de traitement par éléments finis, analogue, à une dimension, aux méthodes utilisées en deux ou trois dimensions en hydrodynamique par exemple, la résolution numérique de la loi de Fourier dépendant du temps, à l'aide d'un algorithme dont la phrase essentielle tient en une ligne de programme (équation (3)), permet de

donner un support intuitif très accessible aux élèves, en l'absence de support expérimental.

La rapidité de calcul et d'affichage de l'ordinateur permet de visualiser l'onde progressive atténuée (avec retards de phase et atténuation associés) de façon dynamique.

L'exploitation des graphes après édition, sans être indispensable (on pourrait demander au programme de réaliser son autoévaluation par calcul de  $K$  et comparaison avec  $N$ ), est une occasion d'utiliser l'imprimante pour des copies d'écran en haute résolution, et d'observer les limites à la précision imposées par la taille des pixels du matériel informatique utilisé.

Le choix du nombre réduit de mailles ( $n_{\text{Max}} = 50$ ) permet, en une durée compatible avec des séances de travaux dirigés de deux heures, d'étudier le rôle des deux paramètres physiques (la diffusibilité du milieu, et la période de l'onde), en visualisant leur effet, et en vérifiant quantitativement leur influence sur le phénomène.

Enfin, en électromagnétisme, en seconde année, l'étude de la réflexion d'une onde plane sur un métal semi-infini non parfait produit une onde transmise dont les champs électrique et magnétique ont la même loi de variation en  $t$  et  $z$  que l'écart  $\theta(z, t)$  étudié ici.