

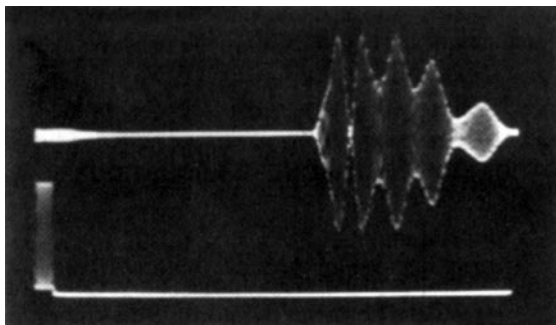
Propagation guidée des ondes acoustiques dans l'air

par R. MOREAU

1. PRÉSENTATION

Chacun, dans son lycée, pourra réaliser les expériences qui sont décrites dans la partie 4 de cet article. Elles permettent de mettre en évidence que le guidage par un tuyau cylindrique d'une onde acoustique qui, à l'air libre est caractérisée par la célérité $c \approx 340 \text{ m/s}$ et la longueur d'onde λ , s'effectue selon différents modes de propagation. Chaque mode est caractérisé par une célérité particulière parfois très inférieure à c (200 m/s par exemple).

La photographie n° 1 montre ainsi qu'un paquet d'une vingtaine de vibrations acoustiques générées par un transducteur piézoélectrique, arrive à l'extrémité d'un tuyau de 5,0 cm de diamètre et de 2,02 m de long sous la forme d'une succession de paquets plus ou moins séparés, correspondant aux différents modes de propagation dans le tuyau, dont les durées de propagation sont échelonnées entre 6,0 ms et 9,5 ms.



Photographie n° 1 : La trace du bas est celle du signal électrique appliqué à l'émetteur. La trace du haut est le signal électrique fourni par le récepteur : l'épaississement de cette deuxième trace, à gauche, correspond au résidu de réponse au train excitateur précédent (le phénomène est périodique).

L'émetteur utilisé est très répandu dans les lycées (émetteur Murata). Il fonctionne à 40 KHz ; il émet donc des ultrasons. Il est

alimenté ici par des trains d'une vingtaine de sinusoïdes correspondant donc à une largeur de 0,5 ms. La longueur d'onde λ des vibrations acoustiques à l'air libre vaut $\lambda = c/f = 340 \text{ m}/40 \cdot 10^3 = 8,5 \text{ mm}$. Le récepteur utilisé est un récepteur Murata semblable à l'émetteur. L'amplitude de ses vibrations augmente progressivement lorsqu'il reçoit les premiers fronts d'une onde de fréquence correcte, et, lorsqu'il n'est plus excité, il continue encore à vibrer à sa fréquence propre (proche de 40 kHz) jusqu'à ce qu'il ait dissipé l'énergie emmagasinée. Ceci explique que la forme des signaux électriques récupérés à l'extrémité du tuyau, bien qu'en relation étroite avec celle des signaux excitant l'émetteur, en diffère quelque peu.

Nous choisissons ici de ne pas traiter la théorie de la propagation guidée des ondes acoustiques (dont l'étude ressemble à celle de la propagation guidée des ondes électromagnétiques) : les lecteurs intéressés par ce problème pourront retrouver cette théorie en s'appuyant sur les éléments bibliographiques cités en référence. En revanche, nous montrons sans mathématiques, dans la deuxième partie de cet article, comment la limitation spatiale du domaine de propagation permet de définir une longueur d'onde guidée λ_g supérieure à λ .

Dans la troisième partie, nous rappellerons rapidement la relation qui permet de trouver la célérité correspondant à un mode à partir de c , λ et λ_g .

La cinquième partie suggère une analogie entre propagation guidée des ondes acoustiques et propagation lumineuse dans les fibres optiques.

2. PROPAGATION GUIDÉE DES ONDES ACOUSTIQUES

2.1. Mode fondamental

Une onde acoustique plane et uniforme, de vecteur donne $\vec{k}$, peut toujours se propager dans un tuyau cylindrique de section quelconque, sans modification de sa structure ni de sa célérité, si l'axe du tuyau est parallèle à $\vec{k}$. La seule condition aux limites imposée par une paroi rigide est le parallélisme du vecteur vitesse $\vec{v}(x,y,z)$ et de la paroi au voisinage immédiat de celle-ci. Or l'onde plane est une onde longitudinale ; les vecteurs vitesse des molécules de gaz sont colinéaires au vecteur d'onde $\vec{k}$ et donc parallèles aux parois du tuyau. Nous appellerons mode fondamental ce mode de propagation particulier où l'éner-

gie acoustique est répartie uniformément sur la section du tuyau et dont la célérité c est celle des ondes se propageant à l'air libre.

2.2. Autres modes

Considérons une onde acoustique plane et uniforme, dont le vecteur unitaire normal à une surface d'onde est noté $\vec{n}$, qui se propage dans l'air. Elle est caractérisée par le vecteur d'onde $\vec{k} = 2\pi \vec{n} / \lambda$, parallèle au plan xOz , tel que si $\vec{w}$ est le vecteur unitaire de l'axe $z'z$, on ait :

$$(\vec{w}, \vec{k}) = \alpha$$

Représentons, à un instant donné, les plans d'ondes de cette onde acoustique où le vecteur vitesse $\vec{v}$ des particules d'air a une intensité maximale V : ces plans sont distants de $\lambda/2$; sur les uns, $\vec{v}$ a le sens de $\vec{k}$ et sur les autres il est opposé à $\vec{k}$.

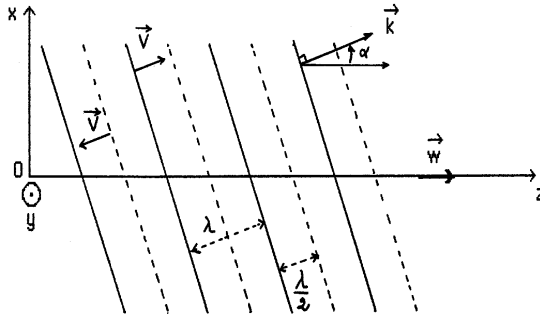


Figure 1

Supposons qu'une deuxième onde acoustique plane, de même fréquence, soit caractérisée par le vecteur d'onde $\vec{k}'$ tel que $k'_x = -k_x$; $k'_y = k_y = 0$; $k'_z = k_z$. On a $(\vec{w}, \vec{k}') = -\alpha$.

Représentons, comme précédemment, les deux séries de plans d'onde où, à un instant t donné, $\vec{v}$ a une intensité maximale V . Déterminons maintenant les vecteurs vitesse des particules soumises à la superposition des deux ondes.

Nous obtenons la figure 2 sur laquelle nous constatons que les particules d'air aux points A_1, A'_1, A_2, A'_2 et C_1, C'_1, C_2, C'_2 , etc., ont un vecteur vitesse parallèle à Oz , tandis que les vecteurs vitesse des points B_1, B'_1, B_2, B'_2 etc., sont dirigés selon Ox (figure 3).

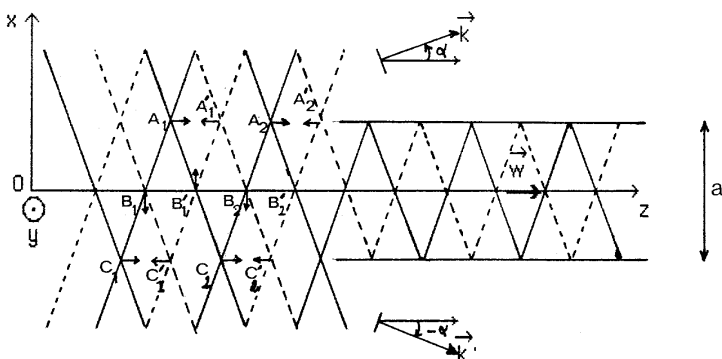


Figure 2

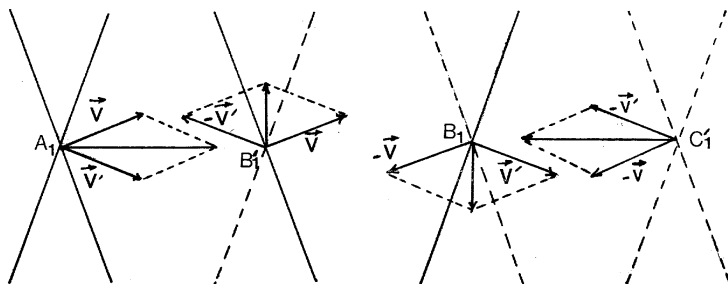


Figure 3

Du fait de la propagation, à l'instant $t + \delta t$ immédiatement ultérieur à t , tous les points où les vecteurs vitesse sont tels que nous les avons représentés sur la figure 2, sont un peu décalés vers la droite : ainsi toutes les particules d'air situées dans le plan yOz ont des vecteurs vitesse dirigés selon Ox . De même, toutes les particules d'air situées dans les plans parallèles à yOz et contenant respectivement les points A_1, A'_1 , etc et C_1, C'_1 , etc ont des vecteurs vitesse dirigés selon Oz .

Une paroi rigide imposant aux vecteurs vitesse des molécules de fluide vibrant en son voisinage immédiat de lui être parallèle, on peut donc placer de telles parois rigides selon les plans contenant A_1, A'_1 etc C_1, C'_1 , etc puisque cette condition est déjà réalisée.

Notons à la plus petite distance séparant deux parois qui auront dès lors pour effet de guider l'onde composite précédente. A l'intérieur

de l'espace de hauteur a ainsi délimité, les 2 ondes planes précédemment considérées, se réfléchissent sur les parois : ces réflexions ne modifient pas la situation initialement envisagée car on obtient toujours, en tout point, la superposition de 2 ondes planes et uniformes de vecteurs d'onde $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ symétriques par rapport au plan yOz . Ces ondes planes créent alors une situation vibratoire (un mode) se propageant selon Oz et caractérisée par la longueur d'onde guidée λ_g , telle que $\lambda_g/2 = A_1A'_1 = B_1B'_1 = C_1C'_1$ etc.

Considérons alors la figure 4 reprenant (en l'agrandissant) un détail de la figure 2. La distance B_1H est celle qui sépare deux plans d'onde dont les états vibratoires sont en opposition de phase : $B_1H = \lambda/2 = B_1B'_1 \cos \alpha$, d'où :

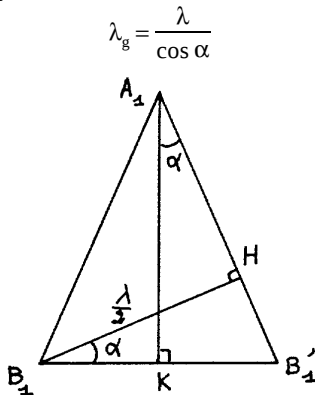


Figure 4

Par ailleurs $A_1K = a/2$, on a donc, successivement :

$$a = 2 A_1K = 2 \frac{KB'_1}{\tan \alpha} = \frac{B_1B'_1}{\tan \alpha} = \frac{\frac{\lambda}{2 \cos \alpha}}{\tan \alpha} = \frac{\lambda}{2 \sin \alpha}$$

On voit donc que pour une longueur d'onde λ donnée et un angle α donné différent de zéro, la distance minimale a entre deux plans parallèles destinés à guider l'onde acoustique est supérieure à $\lambda/2$.

La juxtaposition des deux résultats précédents : $\cos \alpha = \lambda/\lambda_g$ et $\sin \alpha = \lambda/(2a)$ conduit, en posant $\lambda_c = 2a$, à la relation :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{4a^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

Nous avons ainsi montré que le guidage de l'onde composite par les deux plans $x = a/2$ et $x = -a/2$ a pour effet de faire apparaître une longueur d'onde guidée λ_g supérieure à λ .

Remarque n° 1 : m étant un entier positif, la distance a entre les deux parois planes rigides destinées à guider l'onde peut être choisie de manière que :

$$a = \frac{m\lambda}{2 \sin \alpha}$$

On obtient alors :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \text{ avec } \frac{1}{\lambda_c} = \frac{m}{2a}$$

Remarque n° 2 : On peut, sans rien modifier à l'onde résultante étudiée ci-dessus ni à sa propagation, ajouter à la structure précédente deux parois rigides, parallèles au plan xOz , formant donc avec les deux premières parois un guide rectangulaire. En effet, les vecteurs d'ondes $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ initiaux sont parallèles à xOz et les vecteurs vitesse des particules gazeuses sont en tout point parallèles à xOz : les conditions aux limites imposées par ces nouvelles parois sont donc satisfaites par avance.

Remarque n° 3 : Étant donné un guide de section rectangulaire de côtés a et b , d'axe Oz , on pourrait montrer en partant d'une onde plane et uniforme de vecteur d'onde $\vec{k}$ quelconque (k_x, k_y, k_z) , et en lui associant 3 autres ondes de vecteurs d'onde respectifs $(-k_x, k_y, k_z)$, $(k_x, -k_y, k_z)$, et $(-k_x, -k_y, k_z)$, que l'on peut former une onde composite susceptible de se propager dans le guide rectangulaire en satisfaisant aux conditions aux limites. La longueur d'onde de l'onde guidée vérifierait encore la relation :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

à condition de poser, m et n étant des entiers positifs :

$$\frac{1}{\lambda_c^2} = \frac{m^2}{4a^2} + \frac{n^2}{4b^2}$$

Remarque n° 4 : Dans l'expression précédente, le cas où m et n sont tous deux nuls correspond à λ_c infinie et donc à $\lambda_g = \lambda$. Il s'agit du mode fondamental étudié en 2.1., dont la célérité est celle

des ondes se propageant à l'air libre. Si l'un des deux entiers m ou n est nul, c'est que l'onde composite se propageant dans le guide peut être considérée comme la superposition de deux ondes planes et uniformes de vecteurs d'ondes $\vec{k}$ et $\vec{k}'$ parallèles à xOz ou à xOy (c'est le cas que nous avons étudié).

Remarque n° 5 : Dans le cas où le tube utilisé a une section circulaire de rayon a , l'étude simplifiée précédente ne peut plus être conduite. Les résultats essentiels sont cependant conservés : la longueur d'onde λ_g de l'onde guidée est encore reliée à la longueur d'onde λ à l'air libre par la relation générale :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

mais, dans ce cas, la longueur d'onde «de coupure» λ_c est telle que :

$$\frac{1}{\lambda_c} = \frac{\mu_{nm}}{2\pi a}$$

où μ_{nm} est la valeur de la variable r pour laquelle la fonction de Bessel d'ordre n , J_n , admet son $m^{\text{ième}}$ maximum.

Ainsi la fonction de Bessel d'ordre zéro, $J_0(r)$, admet un premier maximum pour $r = \mu_{01} = 0$, et il lui correspond $\lambda_{c0} = \infty$ et $\lambda_g = \lambda$: c'est l'onde plane et uniforme habituelle correspondant au mode fondamental déjà évoqué. On note souvent L_{01} ce mode fondamental (L parce qu'il s'agit d'une onde longitudinale, (0,1) parce qu'on s'intéresse à la fonction de Bessel d'ordre 0 dont il s'agit du premier maximum. Dans le cas général, on parle d'un mode (nm).

3. CÉLÉRITÉ DES ONDES GUIDÉES

Nous avons vu que le guidage d'une onde acoustique fait apparaître une longueur d'onde guidée λ_g reliée à λ et à une longueur d'onde λ_c de coupure dépendant des caractéristiques transversales du guide et du mode de propagation considéré. En faisant apparaître le module k_g du vecteur d'onde correspondant à la propagation guidée ($k_g = 2\pi/\lambda_g$), et en remplaçant λ par $2\pi c/\omega$, cette relation devient :

$$k_g^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{4\pi^2}{\lambda_c^2}$$

Sous cette forme, il est visible que k_g dépend de la pulsation ω et que la propagation s'accompagne de dispersion. Dans ce cas, on sait

que la vitesse de groupe v_g d'une onde composite est donnée par la relation :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk_g}$$

La relation précédente entraîne : $k_g \text{ d } k_g = (\omega \text{ d } \omega)/c^2$. On en déduit :

$$v_g = c^2 \frac{k_g}{\omega} = c \frac{c}{\omega} k_g = c \frac{\lambda}{\lambda_g}$$

Puisque λ_g est toujours supérieure à λ (hormis le cas du mode fondamental), la célérité des ondes guidées, ce cas mis à part, est toujours inférieure à la célérité c des ondes se propageant à l'air libre.

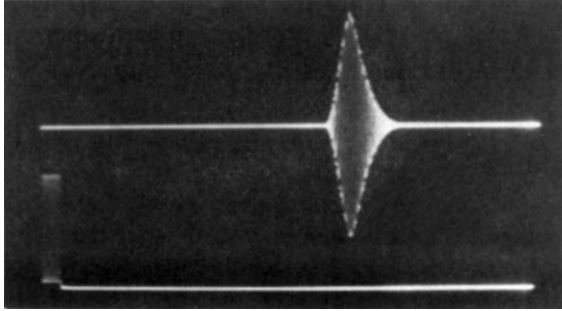
Quelques applications numériques correspondant à $\lambda = 8,5 \text{ mm}$ et à des tuyaux cylindriques de sections circulaires nous permettront de fixer nos idées. Pour cela, dressons un tableau des valeurs μ_{nm} de la variable r pour lesquelles les premières fonctions de Bessel admettent des maxima :

ordre n de la fonction	μ_{n1}	μ_{n2}	μ_{n3}	μ_{n4}
0	0	3,83	7,01	10,2
1	1,84	5,33	8,54	
2	3,05	6,71	9,97	
3	4,20	8,01		
4	5,32	9,28		
5	6,42			
6	7,50			
7	8,58			

a) Tuyau de 4,5 mm de diamètre : aucun mode autre que le fondamental ne peut s'y propager : en effet, mise à part $\mu_{01} = 0$, la plus petite valeur μ_{nm} est $\mu_{11} = 1,84$. On en déduit la valeur correspondante de λ_c ($\lambda_c = \pi \text{ d } / \mu_{nm}$), soit 7,7 mm. Or la relation générale correspondant à un tel mode :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2}$$

impose la condition $\lambda_c > \lambda$, qui ne peut être satisfaite ici. La seule célérité observée sera celle des ondes libres, soit 340 m/s dans les conditions habituelles de température et de pression (photographie n° 2).



Photographie n° 2 : Transmission monomode par un tuyau cylindrique de 4,5 mm de diamètre et de 2,0 m de long : on constate que l'énergie du récepteur croît pendant une durée exactement égale à celle du paquet de vibrations émises par l'émetteur (elle décroît ensuite comme celle de tout oscillateur qui relaxe). Le signal acoustique se propage donc selon un mode unique dont il est facile de mesurer la célérité.

Nous pourrions retenir que **pour qu'une onde acoustique de longueur d'onde λ à l'air libre puisse se propager dans un tuyau cylindrique de diamètre d selon un autre mode que le fondamental L_{01} , il faut que l'on ait $d > 0,59 \lambda$** . (Pour un guide carré de côté a , on trouve que la condition est $a > \lambda/2$. D'une manière générale, les calculs sont beaucoup plus aisés avec les guides carrés, mais les expériences moins spectaculaires car peu de modes sont excités).

b) Tuyau de 13 mm de diamètre : on trouve des valeurs de λ_c supérieures à 8,5 mm pour 4 modes autres que le fondamental :

le mode 02 : $\lambda_c = 10,7 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 14,0 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 206 \text{ m/s}$

le mode 11 : $\lambda_c = 22,2 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 9,20 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 314 \text{ m/s}$

le mode 21 : $\lambda_c = 13,4 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 11,0 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 263 \text{ m/s}$

le mode 31 : $\lambda_c = 9,72 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 17,5 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 165 \text{ m/s}$

c) Tuyau de 20 mm de diamètre : on trouve que 7 modes, autres que le fondamental L_{01} , peuvent s'y propager, notamment :

le mode 02 : $\lambda_c = 16,4 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 9,94 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 291 \text{ m/s}$

le mode 11 : $\lambda_c = 34,1 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 8,76 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 329 \text{ m/s}$

le mode 12 : $\lambda_c = 11,8 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 12,3 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 235 \text{ m/s}$

le mode 21 : $\lambda_c = 20,6 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 9,33 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 286 \text{ m/s}$

d) Tuyau de 50 mm de diamètre : on trouve que 44 modes, autres que le fondamental, peuvent s'y propager, en particulier :

le mode 02 : $\lambda_c = 41,0 \text{ mm} \Rightarrow \lambda_g = 8,67 \text{ mm} \Rightarrow v_g = 333 \text{ m/s}$

4. EXPÉRIENCES

4.1. **Montage :** il est très simple et schématisé par la figure 5.

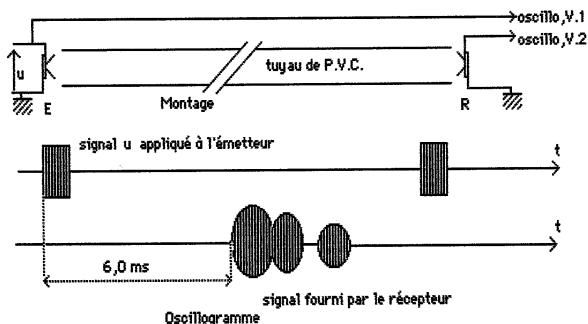
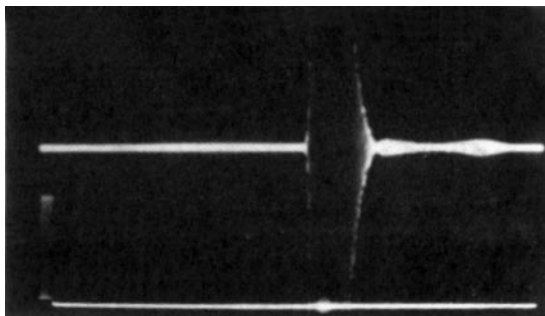


Figure 5

Les tuyaux ont une longueur de 2,00 m (il est bon de pouvoir placer deux tuyaux bout à bout pour vérifier que les phénomènes observés sont bien dûs à la propagation). La distance effective entre émetteur et récepteur est de 2,02 m. De ce fait, le mode fondamental se propage en 6,0 ms.

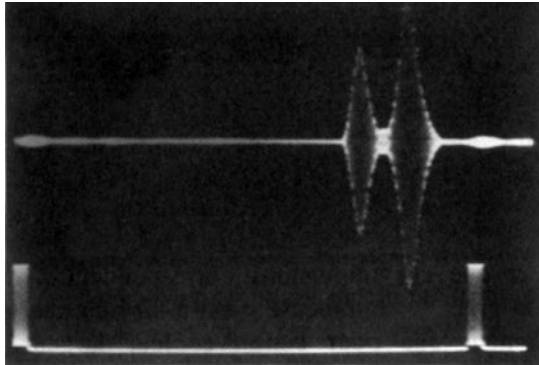


Photographie n° 3 : Transmission par un tuyau de 13 mm de diamètre : le signal fourni par le récepteur a été amplifié de manière à faire apparaître sa faible réponse au mode 02 de propagation guidée de l'onde acoustique émise par l'émetteur ; de ce fait, on ne distingue que les flancs de la réponse au mode L_{01} .

4.2. Résultats

Tous les modes susceptibles de se propager ne sont pas excités par l'émetteur ; cependant avec un tuyau de 13 mm de diamètre, en amplifiant le signal reçu (photographie n° 3), on distingue le mode 02 qui met 9,8 ms à se propager et qui est faiblement excité.

L'observation la plus intéressante s'effectue avec un tuyau de 20 mm de diamètre pour lequel, si l'on place l'émetteur sur l'axe du tuyau, l'essentiel de l'énergie acoustique se répartit entre le mode fondamental L_{01} et le mode 02 (photographie n° 4) : en déplaçant alors le récepteur sur la section de sortie du tuyau, on peut constater que la propagation du mode L_{01} s'effectue bien selon une onde plane et uniforme, puisque l'amplitude du paquet d'ondes qui lui correspond (le premier sur la photographie n° 4) est indépendante de la position du récepteur. Pour le mode 02, identifié grâce à sa célérité, la densité d'énergie acoustique décroît lorsqu'on s'éloigne de l'axe du tuyau.

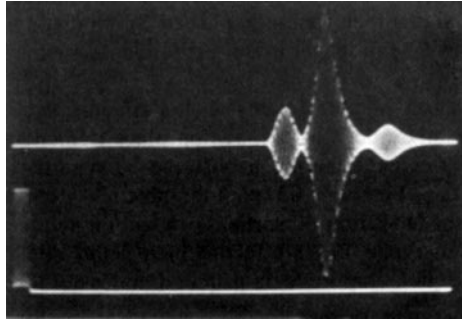


Photographie n° 4 : Transmission par un tuyau de 20 mm de diamètre et de 3,0 m de long : l'essentiel de l'énergie acoustique est acheminée de l'émetteur au récepteur par le truchement de deux modes, le fondamental, à la célérité la plus grande, et le mode 02 pour lequel $v_g = 291$ m/s. On distingue également le signal correspondant au mode 12 ($v_g = 235$ m/s).

En inclinant l'axe de l'émetteur par rapport à l'axe du tuyau, on excite plus ou moins tel ou tel mode ; la réception de ces modes dépend également de la position du récepteur.

Sur les 45 modes possibles que permet le tuyau de 50 mm de diamètre on peut en exciter plus d'une dizaine. On pourra constater que, selon la position de l'émetteur, on peut parfois transférer beaucoup

plus d'énergie acoustique par le mode 02 que par le fondamental L_{01} comme le montre par exemple la photographie n° 5.



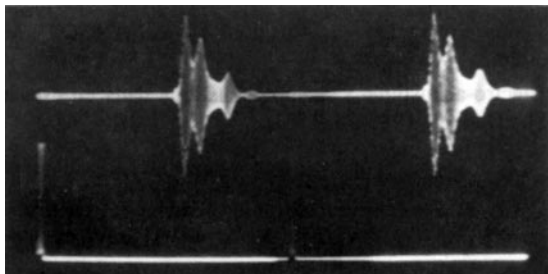
Photographie n° 5 : Transmission par un tuyau de 50 mm de diamètre et de 2,0 m de long : en inclinant l'émetteur et en déplaçant le récepteur par rapport à l'axe du tuyau, on peut favoriser tel ou tel mode. Ici, le mode 02 est fortement favorisé.

5. ANALOGIE AVEC LA PROPAGATION DES ONDES LUMINEUSES DANS LES FIBRES OPTIQUES

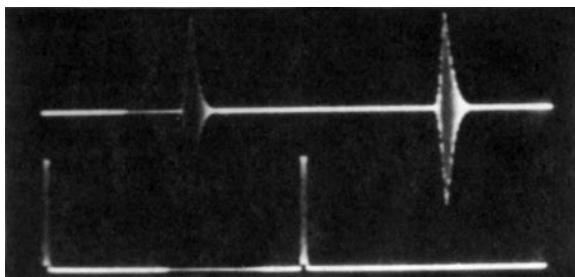
Il ne s'agit évidemment que d'une analogie, puisque les ondes ne sont pas de même nature et que les conditions aux limites ne sont pas les mêmes. On sait cependant que les fibres optiques servent à acheminer des impulsions lumineuses très courtes, produites par des diodes laser, et que ces impulsions correspondent à des trains de vibrations de la grandeur lumineuse c'est-à-dire du champ électrique. On sait également que pour conserver leur largeur initiale aux impulsions véhiculées par les fibres optiques, on est conduit à réduire le diamètre de leur cœur jusqu'à ce qu'il soit du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de la lumière utilisée ($1\text{ }\mu\text{m}$) : on réalise alors une fibre monomode.

Ici, à l'aide de notre montage, on montre très facilement qu'en diminuant le diamètre du tuyau servant de canal de transmission aux ondes acoustiques, on diminue la largeur du signal reçu à la sortie du tuyau puisque de moins en moins de modes sont alors susceptibles de s'y propager et que les célérités des modes permis forment un ensemble de plus en plus réduit. On arrive ainsi à la transmission monomode pour laquelle, effectivement, les trains d'ondes reçus ont une largeur minimale (c'est celle qui correspond à la propagation à l'air libre, mais l'atténuation est beaucoup plus faible). Les photographies 6 et 7, prises

avec les mêmes échelles de temps et les mêmes amplifications, illustrent cette évolution.



Photographie n° 6 : Transmission acoustique de paquets de vibrations à 40 kHz, périodiques, par un tuyau « multimodes » de 50 mm de diamètre.



Photographie n° 7 : Transmission des mêmes paquets par un tuyau « monomode » de 4,5 mm de diamètre.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. Émetteurs et récepteurs d'ultrasons ; générateurs de trains de vibrations :

1.1. Les ultrasons en classe de 1^{ère} : R. GENER ; B.U.P. n° 649, décembre 1982, p. 351.

1.2. Étude expérimentale des ondes sonores : R. ALLARD ; B.U.P. n° 649, décembre 1982, p. 353.

1.3 Ensemble émetteur - récepteur ; générateur de trains de vibrations : Électrome ; voir publicité du B.U.P.

2. Propagation, fonctions de Bessel :

2.1. Propagation du son : BRUHAT et FOCH ; Masson ; chap. 28, 6^{ème} édition, p. 536.

2.2. Ondes centimétriques, l'onde TE_{01} du guide rectangulaire :
GOUDET et CHAVANCE ; Chiron ; 1955 ; p. 28.

2.3. Compléments de Mathématiques à l'usage des ingénieurs ;
table des premières racines des fonctions $J'_n(z)$: ANGOT ; Masson ;
1972 ; p. 426.

2.4 Électro-acoustique ; champ acoustique dans un espace clos ;
M. ROSSI ; Dunod ; 1986 ; p. 155.