Calcul infinitésimal, rigueur et pragmatisme

par M. MENETRIER, Lycée Thiers, Marseille
P. ITHIER, Université Paris, VI
J.M. BAUDUIN, Lycée M. Roby, Saint Germain
et J.P. DIDIER, E.S.T.A.C.A.

Le problème de l'utilisation correcte par les étudiants du calcul intégral est certainement une des difficultés majeures rencontrées par les enseignants en physique au niveau du premier cycle de l'enseignement supérieur et, de façon peut-être moins cruciale, au niveau d'une classe terminale. Une question a priori très simple comme le calcul du travail nécessaire pour allonger d'une longueur x à partir de sa position de repos un ressort de raideur k amène souvent des questions telles que : «Pourquoi pose-t-on : $dW = k\ x\ dx$ et non : $dW = k\ (x+dx)\ dx$?»

Il y a là un réel problème qu'il nous paraît important d'aborder en évitant deux écueils. Le premier consisterait à nier le problème en se contentant de remarquer que l'écart entre les deux expressions est infiniment faible ; le risque serait alors de laisser croire que nous commettons alors une approximation alors que nous savons bien que l'expression $W_A^B = \int_A^B k\,x\,dx$ est rigoureuse. Le deuxième écueil consisterait à poser directement $dW/dx = k\ x$, sans chercher à interpréter dW comme le travail infinitésimal lié à un allongement infinitésimal dx. Or, dans la plupart des cas, le physicien commence par déterminer une relation entre quantités infinitésimales, puis l'intègre sur le domaine choisi.

Nos raisonnements usuels sur les quantités infinitésimales sont mal justifiés pour les mathématiciens, mais ils sont extrêmement efficaces d'un point de vue opératoire et nous devons amener les étudiants à les utiliser en étant convaincus qu'ils conduisent à des résultats rigoureux et non à des approximations.

1. NOTATION DIFFÉRENTIELLE ET DÉRIVÉE

Un rapide sondage de début d'année montre que les étudiants de première année savent à peu près calculer les dérivées, qu'ils savent les utiliser pour étudier une fonction, mais qu'ils en maîtrisent mal la définition. Or, la définition de la dérivée est souvent directement utilisée dans les problèmes de physique.

Il semble donc utile de rappeler que si Δx et Δy sont les accroissements correspondants de la variable x et de la fonction y(x), la fonction dérivée y'(x) se définit par : $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

On peut alors traiter les problèmes concernant les petites variations de x autour de la valeur x_0 : $\Delta y \sim y'(x_0)\,\Delta x$. L'intérêt de ce calcul étant d'une part de donner un calcul simplifié de Δy, et d'autre part de linéariser la relation entre Δx et Δy.

Il peut être intéressant, notre but n'étant pas de refaire le cours de mathématiques mais de convaincre, de traiter numériquement plusieurs exemples en comparant la valeur exaxte de Δy et sa valeur approchée. L'étudiant pourra constater que ces deux valeurs sont d'autant plus proche l'une de l'autre que Δy est petit. On peut citer, entre autres :

Exemple 1 : R étant le rayon terrestre et M la masse de la terre, on peut exprimer le champ de gravitation à l'altitude h par : $g(h) = GM\,(R + h)^{-2}$. Si le champ de gravitation au sol a pour valeur $g_0 = 9{,}8\ ms^{-2}$, et si $R = 6{,}4\ 10^6$ m, calculer $g(h) - g_0$ pour les valeurs suivantes de h : h = 1 km h = 10 km et h = 100 km.

Exemple 2 : L'objet de largeur e est vu sous un angle θ (Figure 1) l = 100 m et α = 30°. Déterminer e pour θ = 1 degré et pour θ = 1 minute.

On est alors amené à introduire la notation dx, qui constitue un point délicat des échanges entre praticiens des mathématiques et des sciences physiques. De façon usuelle, un physicien note dx une variation infinitésimale, c'est-à-dire aussi petite que l'on veut,

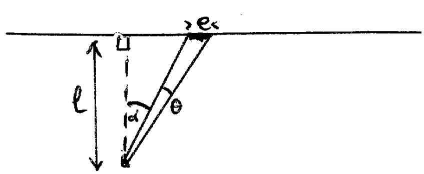

Figure 1

de la quantité variable x. Cette notion d'infiniment petit n'a pas de définition mathématique rigoureuse simple, mais nous ne pouvons pas en faire l'économie à cause de son efficacité.

Nous remplaçons alors $y'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ par $y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$ et nous traitons alors pratiquement dy et dx comme des quantités indépendantes.

Un problème de physique étudie souvent des variations de plusieurs quantités variables liées entre elles, sans faire de distinction a priori entre fonction et variable. La notation différentielle respecte cette symétrie entre y et x. De plus, un certain nombre d'opérations sur les dérivées et les différentielles se traitent très simplement dès que l'on adopte cette notation. C'est en particulier le cas des fonctions composées. Il devient presque «évident» que si les quantités variables x, y et z sont liées entre elles : $dz = \dfrac{dz}{dy} \cdot \dfrac{dy}{dx} \cdot dx$.

Il est sûr que cette évidence est factice et que cela n'est pas une démonstration mais il faut admettre que ce que nous ne pouvons en toute rigueur considérer que comme une méthode physique est extrêmement efficace.

2. PRATIQUE DE L'INTÉGRATION

Un sondage sur l'intégration réalisé dans les mêmes conditions que celui concernant la dérivée donne des résultats similaires. A la question «qu'est-ce qu'une intégrale ?» on obtient des réponses telles que «une aire», «la primitive» et assez peu de définitions sous la forme d'une limite. Or, dans l'usage que nous faisons de la notion d'intégrale, la bonne assimilation de cette définition est capitale. Pour résumer, il faut persuader nos étudiants que :

a) Par définition $\displaystyle\int_a^b y(x)\,dx = \lim_{x_{i-1} \to x_i} \sum_{i=1}^{n} y(x_i)\,(x_i - x_{i-1})$

avec $x_0 = a$ et $x_n = b$.

L'intégrale se calcule par $\int_a^b y(x)\,dx = Y(b) - Y(a)$, Y(x) étant une primitive de y(x).

b) Même si le mathématicien trouve à y redire, il est **efficace** de considérer que dI = y(x) dx est l'accroissement infinitésimal de I lié à l'accroissement infinitésimal de x et que :

$$I = \int_{x=a}^{x=b} dI = \int_a^b y(x)\,dx$$

représente la somme de cette infinité d'accroissements infinitésimaux.

Il nous a semblé intéressant, pour familiariser l'étudiant avec les utilisations de l'intégration, de commencer par résoudre certains problèmes simples par une méthode assez lourde, mais qui nous semble mathématiquement rigoureuse, procédant par encadrements, et par la méthode usuelle pour un physicien des accroissement infinitésimaux. Au cours de cette étape, on peut essayer de se limiter à des énoncés qui ne posent pas de gros problème théorique.

Principe de la méthode

Il s'agit de parvenir à résoudre un problème en posant une équation différentielle ou une intégrale en éliminant autant que possible le sentiment que l'on fait là des approximations.

Soit y(x) une fonction continue et calculons $I_a(x) = \int_a^x y(u)\,du$.

Considérons un intervalle (x, x + Δx) sur lequel y(x) est monotone (disons croissante dans ce cas).

Alors l'accroissement $\Delta I_a = I_a(x + \Delta x) - I_a(x)$ peut s'encadrer par :

$$y(x)\,\Delta x \le \Delta I_a \le y(x + \Delta x)\,\Delta x$$

soit :

$$y(x) \le \frac{\Delta I_a}{\Delta x} \le y(x + \Delta x)$$

La fonction y(x) étant continue :

$$\lim_{\Delta x \to 0} y(x + \Delta x) = y(x) \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta I_a}{\Delta x} = I_a'(x) = dI_a/dx$$

I_a (x) est donc la primitive de y(x) qui est déterminée par la condition I_a (a) = 0.

Cette méthode qui peut, avec des modifications de détail, s'appliquer à tous les cas de figure, est assez longue à formuler, et elle est usuellement remplacée par le cheminement suivant :
Puisque dx est infiniment petit, il semble «naturel» de considérer que y(x) a une valeur constante sur l'intervalle dx et d'écrire alors directement : dI = y(x) dx et, I_a (b) étant la somme des accroissements dI et I_0 lorsque x varie de a à b :

$$I_a(b) = \int_{x=a}^{x=b} dI = \int_a^b y(x)\, dx$$

Or l'expérience montre que beaucoup d'étudiants ont de grandes difficultés à admettre ce type de raisonnement.

<u>Exemple 1</u> (Figure 2)

Soit un récipient cylindrique rempli d'eau que l'on vide par un robinet situé au niveau du fond. On admet que le débit massique D du robinet est proportionnel à $\sqrt{m}$, si m est la masse d'eau restant dans le récipient m_1 et m_2 étant deux valeurs initiales de m, déterminer le rapport des durées de vidange correspondantes t_1 et t_2.

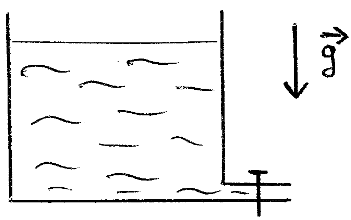

Figure 2

Si la définition du débit dans le cas d'un écoulement permanent est simple à saisir, un débutant aura plus de difficultés à l'exprimer correctement dans le cas d'un écoulement variable.

a) Par encadrement

Soit m la masse à l'instant t.

Soit Δm la variation de m entre les instants t et t + Δt.

Alors : $D(t + \Delta t)\ \Delta t \leq -\Delta m \leq D(t)\ \Delta t$.

Donc : $k\sqrt{m+\Delta m} \leq -\dfrac{\Delta m}{\Delta t} \leq k\sqrt{m}$

$$\lim_{\Delta m \to 0} k\sqrt{m+\Delta m} = k\sqrt{m} \quad \text{et} \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta t} = m'(t) = dm/dt$$

donc $dm/dt = -k\sqrt{m}$ ou encore : $dt/dm = -\dfrac{1}{k\sqrt{m}}$

t(m) est donc la primitive de $-\dfrac{1}{k\sqrt{m}}$ définie par $t(m_1) = 0$.

$t_1 = t(0)$ et donc : $t_1 = \dfrac{2}{k}\sqrt{m_1}$.

De même : $t_2 = \dfrac{2}{k}\sqrt{m_2}$.

On en déduit que : $t_2/t_1 = \sqrt{m_2/m_1}$.

b) Par les accroissements infinitésimaux

La méthode précédente a permis d'établir $dm/dt = -k\sqrt{m}$ sans avoir l'impression de négliger les variations de m pendant l'intervalle dt. Il faut maintenant constater que l'on obtient, plus simplement, ce résultat ainsi : la variation infinitésimale dm et m pendant dt, peut s'écrire, «en ne tenant pas compte des variations de D pendant dt» :

$$dm = -D\,dt = -k\sqrt{m}\,dt$$

donc :

$$-\frac{1}{k}\,\frac{dm}{\sqrt{m}} = dt$$

$$\int_0^{t_1} dt = -\frac{1}{k}\int_{m_1}^{c} \frac{dm}{\sqrt{m}} \quad \text{donc} \quad t_1 = \frac{2}{k}\sqrt{m_1}$$

Exemple 2 Aire du disque (Figure 3)

On définit le nombre π par : $\pi = \dfrac{\text{circonférence}}{\text{diamètre}}$

a) Par encadrements

Soit un disque de rayon R et l'ensemble des disques de rayon r inférieur à R.

Soit S(r) l'aire du disque de rayon r et soit ΔS l'accroissement de S(r) correspondant à un accroissement Δr de r.

ΔS peut être encadré par les aires de deux rectangles de largeur Δr et de longueurs respectives 2π r et 2π (r + Δr).

Soit : $$2\pi\, r\Delta r \leq \Delta S \leq 2\pi\,(r + \Delta r)\,\Delta r$$

$$2\pi\, r \leq \frac{\Delta S}{\Delta r} \leq 2\pi\,(r + \Delta r)$$

Donc, en étudiant les limites lorsque Δr tend vers 0

$$2\pi\, r = S'(r) = dS/dr$$

et après intégration, $S(R) = \pi\ R^2$

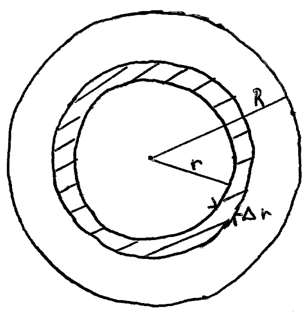

Figure 3

b) Par les accroissements infinitésimaux

L'accroissement dS de S est assimilé à la surface d'un ruban de longueur $2\pi r$ et de largeur dr, donc : $dS = 2\ \pi r\ dr$.

$$S = \int_{r=0}^{R} dS = \int_{0}^{R} 2\,\pi\, r\ \ dr = \pi\, R^2$$

Une telle démarche est rapide et efficace, mais peut laisser supposer qu'on a fait une approximation en assimilant le ruban à un rectangle. Le premier raisonnement permet de montrer qu'il n'en n'est rien.

Exemple 3 : Longueur d'un arc de courbe

Soit la courbe définie par l'équation : y = f(x) où f(x) est une fonction continue. Quelle est la longueur de l'arc compris entre les points A et B d'abscisses a et B ? (Figure 4).

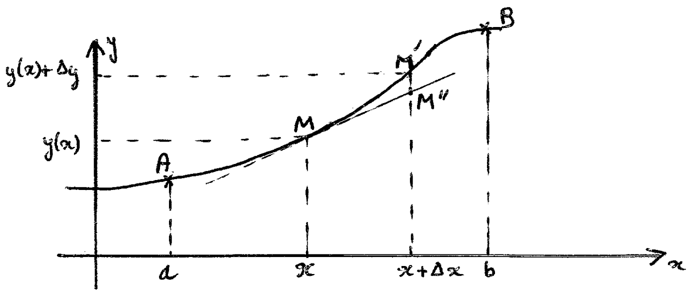

Figure 4

a) Par encadrements

Soit le point M d'abscisse x, le point M' de la courbe d'abscisse x + Δx et le point M'' de la tangente à la courbe en M et d'abscisse x + Δx. Notons Δs la longueur de l'arc M M'.

Dans le cas de la figure, nous pouvons encadrer Δs par :

$$M M' \leq \Delta s \leq M M'' + M'' M'$$

Notons Δy la longueur y(x + x) – y(x)

$$M M' = \Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2}$$

$$M M'' = \Delta x \sqrt{y'(x)^2 + 1}$$

$$M''M' = \Delta y - y'(x)\,\Delta x$$

Donc :

$$\Delta x \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \leq \Delta s \leq \Delta x \left(\sqrt{y'(x)^2 + 1} + \frac{\Delta y}{\Delta x} - y'(x)\right)$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)^2} \leq \frac{\Delta s}{\Delta x} \leq \sqrt{y'+(x)^2+1}+\frac{\Delta y}{\Delta y}-y'(x)$$

or, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta x} = s'(x)$ et la limite lorsque Δx tend vers 0 des deux termes encadrant $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ est : $\sqrt{1+(dy/dx)^2}$.

Nous arrivons donc à établir que : $s'(x) = \sqrt{1+\left(y'(x)\right)^2}$
ou encore : $ds/dx = \sqrt{1+(dy/dx)^2}$.

Ce résultat peut être établi dans tous les cas de croissance et de concavité.

b) Méthode des accroissements infinitésimaux

On «considère que pour une longueur infinitésimale ds l'arc et la corde sont équivalents». On se permet alors d'écrire :

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Ce qui revient à : $$ds = \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx$$

et donc :

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(dy/dx)^2}\, dx$$

Il est normal qu'un étudiant attentif mette en doute la validité mathématique d'un tel procédé s'il lui est imposé d'emblée. La comparaison des deux méthodes permet de convaincre que la deuxième est un moyen extrêmement efficace de trouver un résultat exact.

Exemple 4 : Accélération d'une fusée

Soit un repère $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ lié à un référentiel galiléen. Une fusée de masse m(t), en mouvement vertical dans un champ de pesanteur $g = -g\,\vec{k}$, éjecte vers l'arrière des gaz dont la vitesse par rapport au référentiel lié à la fusée est $-u\,\vec{k}$. Le débit des gaz est D. Le vecteur vitesse de la fusée est $v(t)\,\vec{k}$. Quelle est l'équation différentielle du mouvement ?

a) Méthode des variations infinitésimales (généralement utilisée)

La composante selon O_z de la quantité de mouvement de la fusée à l'instant t est : $p = (t) = m(t)\,v(t)$.

Pendant la durée infinitésimale dt, la masse de la fusée varie de dm et sa vitesse de dv. Le système considéré à l'instant t se compose donc à l'instant t + dt d'une masse m + dm allant à la vitesse v + dv et d'une masse – dm, allant à la vitesse v – u (ce qui revient à considérer que la vitesse des gaz éjectée pendant dt est quasi-uniforme). On obtient alors :

$$p_z\,(t + dt) = (m(t) + dm)\,(v(t) + dv) - dm\,(v(t) - u)$$

La variation dp_z de p_z vaut alors en «négligeant les termes d'ordre 2» (qui s'annulent à la ligne suivante) :

$$dp_z = m(t)\,dv + udm$$

Or, $dp_z/dt = -\,mg$ (théorème de la quantité de mouvement) et $D = -dm/dt$, donc : $m(t)\ dv/dt = mg + Du$.

Cette méthode est rapide et efficace mais elle peut amener un étudiant à la conclusion erronée suivante : «Nous avons fait une approximation (en considérant que la vitesse des gaz éjectés pendant dt est uniforme) et nous avons négligé certains termes. Donc le résultat obtenu n'est pas la solution exacte, mais une solution approchée». Il nous faut donc justifier que cette démarche aboutit à des solutions exactes.

b) Solution par encadrements

On peut écrire, de même : $p_x = t = m(t)\ v(t)$.

Pendant la durée Δt, m varie de Δm, et v varie de Δv. Les gaz éjectés pendant cette période ont donc une vitesse comprise entre $v(t) - u$ et $v(t) + \Delta v - u$. Pour le système considéré à l'instant t, nous aurons donc à l'instant $t + \Delta t$:

$$(m + \Delta m)\,(v + \Delta v) - \Delta m\,(v(t) - u) \le p_z\,(t + \Delta t) \le (m + \Delta m)\,(v + \Delta v) - m\,(v(t) + \Delta v - u)$$

Si Δp_z représente la variation de pz pendant Δt, alors :

$$m\,\Delta v + \Delta v\,\Delta m + \Delta m\,u \le \Delta p_z \le m\,\Delta v + \Delta m\,u$$

$$m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta v}{\Delta t}\,m + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,u \le \frac{\Delta p_z}{\Delta t} \le m\,\frac{\Delta v}{\Delta t} + \frac{\Delta m}{\Delta t}\,u$$

En considérant la limite lorsque Δt tend vers 0 de ces trois termes, on obtient :

$$m\,dv/dt + u\,dm/dt = dp_z/dt$$

Soit, si $dp_z/dt = -mg$ et $D = -dm/dt$:

$$m\,dv/dt = -mg + Du$$

3. CONCLUSION

Cette approche de la question est censée aider l'étudiant à adopter progressivement une attitude que l'on peut ainsi schématiser :

a) Les raisonnements sur les quantitués infinitésimales ne sont pas mathématiquement justifiés mais je les utilise parce qu'il se trouve qu'ils conduisent efficacement à des résultats exacts, et en raison de leur simplicité.

b) En cas de doute, je dispose d'une méthode (encadrements) qui me permet de vérifier un résultat avec suffisamment de rigueur.

c) Les exemples traités par encadrement m'ont convaincu que le problème posé au début (doit-on écrire : $dW = k\ x\ dx$ ou : $dW = k\ (x + dx)\ dx$?) se révèle être, après réflexion, un faux problème.

Ces quelques réflexions, qui résument un travail mené en commun par des enseignants en mathématiques et en sciences physiques, n'ont pas pour objet d'apporter l'impossible solution à la fois simple et rigoureuse à ce vieux problème, mais plutôt de définir une attitude qui permette d'utiliser sans en être dupes des méthodes non justifiées par les mathématiciens mais efficaces*.

* On pourra trouver le compte-rendu d'une enquête auprès des étudiants sur ces thèmes : La notion de différentielle en mathématique et en physique dans l'enseignement supérieur, M. Artigue (I.R.E.M.) et L. Viennot (L.D.P.E.S.), Université Paris VII, 1986 (N.D.L.R.).