Effet de peau dans une bobine

par C. KOVACIC Lycée Poincaré, 54000 Nancy

RÉSUMÉ

Cet article reprend d'abord les résultats connus de l'effet de peau dans un conducteur cylindrique infini.

Nous traitons ensuite le cas d'une bobine et montrons que les résultats sont en bon accord avec l'étude expérimentale de la résistance dans un circuit RLC série

1 INTRODUCTION

La résolution des équations de Maxwell montre qu'une onde électromagnétique ne pénètre dans un conducteur que sur une distance de l'ordre de $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \sigma \omega}}$

 μ_0 : perméabilité magn.

 σ : conductivité ω : pulsation

Pour le cuivre, $\sigma \sim 5.9 \cdot 10^7 \text{ U.S.I.}$ $\delta \sim 2 \text{ mm à 1 KHz}$

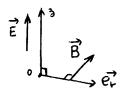
Il en résulte bien sûr une augmentation de la résistance du conducteur, puisque le courant ne circule qu'au voisinage de sa surface.

2. FIL INFINI CYLINDRIQUE

Il y a invariance par translation le long de l'axe et par rotation autour de l'axe : seule interviendra la distance à l'axe. On cherche les solutions sous la forme :

$$\overrightarrow{E}(r,t) = \overrightarrow{E}(r) \ e^{i\omega t} \qquad \overrightarrow{B}(r,t) = \overrightarrow{B}(t) \ e^{i\omega t}$$

2.1. Équations de Maxwell



On utilise bien sûr un système de coordonnées cylindriques, le champ électrique est parallèle à l'axe Oz du fil tandis que le champ magnétique est orthoradial.

$$\begin{split} &\text{Rot } \overrightarrow{E} = -\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial t} \quad \text{donne } \frac{dE\left(r\right)}{dr} = i\omega \; B\left(r\right) \\ &\text{Rot } \overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma \; \overrightarrow{E} \qquad \text{donne } 1/r \, \frac{d}{dr} \left[r \; B\left(r\right)\right] = \mu_0 \sigma \; E\left(r\right) \\ &\text{(on néglige le courant de déplacement } \epsilon_0 \, \frac{\overrightarrow{\partial E}}{\partial t}\right). \end{split}$$

Cela aboutit à l'équation pour le champ électrique :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dE}{dr}\right) + k^2 E = 0 \text{ avec } k = \frac{1-i}{\delta}$$

2.2. Résolution

Les solutions de l'équation différentielle précédente sont les fonctions de Bessel J_0 (kr) et Y_0 (kr). On ne retient que la solution régulière à l'origine à savoir J_0 :

 $E = E_o J_o$ (kr), E_o étant à priori une constante complexe.

On obtient le champ magnétique par :

$$\frac{dE}{dr} = i\omega B \text{ or } J'_{0}(x) = -J_{1}(x) \text{ donc} : B = B_{0}J_{1}(kr)$$

$$avec : B_{0} = \frac{ik E_{0}}{\omega}$$

On peut exprimer B_0 en fonction de l'intensité I circulant dans le fil à l'aide du Théorème d'Ampère :

$$B_0 J_1 (ka) \times 2\pi a = \mu_0 I$$
 a étant le rayon du fil.

2.3. Impédance du fil par unité de longueur

Le calcul de l'impédance à partir du théorème de Poynting est présenté en Annexe 1.

On obtient ici en remplaçant E et B par leurs expressions en fonction de a et $I: Z = \frac{1}{2}$ ak $R_0 \frac{J_0(ka)}{J_1(ka)}$, R_0 résistance statique.

La Figure 1 représente la partie réelle de l'impédance (donc la résistance) en fonction de a/δ .

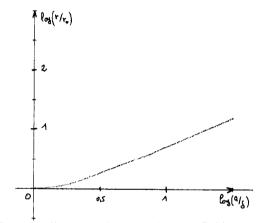


Figure 1 : effet de peau dans un conducteur cylindrique

Comportement asymptotique:

D'après les expressions asymptotiques des fonctions de Bessel (Voir en Annexe 2), on a pour a/ δ assez grand :

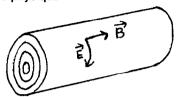
$$J_0(ka)/J_1(ka) = e^{i}\frac{\pi}{2} = i$$
 donc $Z = \frac{1}{2}R_0 a/\delta(1-i)$.

La partie rectiligne de la Figure 1 a donc pour équation :

$$\log R / R_0 = \log a / \delta - \log 2$$
.

3 BOBINE

3.1. Le modèle physique



On considère la bobine infinie le long de son axe Oz, constituée de N nappes de courant concentriques, chacune d'épaisseur e, reliées en série. On néglige l'épaisseur du diélectrique séparant chaque nappe de courant.

Dans ces conditions le champ magnétique est longitudinal et ne dépend que de la distance à l'axe, le champ électrique est orthoradial et ne dépend lui aussi que de la distance à l'axe.

Notations

On s'intéressera essentiellement à chaque nappe individuellement, on affectera d'un indice l, une grandeur associée à la surface interne de la nappe et d'un indice 2 une grandeur associée à la surface extérieure de la nappe.

Donc par exemple pour la n ième nappe, $R_{\rm ext}$ étant le rayon extérieur de la bobine $r_1 = R_{\rm ext} - {\rm n.e.}$, $r_2 = r_1 + {\rm e}$ pour les deux rayons extrêmes. L'intensité par unité de longueur traversant une section de la nappe sera notée I / l.

3.2. Paramètres statiques

3.2.1. Résistance

Rot
$$\overrightarrow{E} = \overrightarrow{0}$$
, s'exprime par : $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial t} (r E) = 0$ donc $E = \frac{\lambda}{r}$.

En exprimant l'intensité I : I =
$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma E l dr$$
, $\lambda = \frac{I}{\sigma l} \times \frac{1}{Log \frac{r_2}{r_1}}$.

La différence de potentiel sur un tour s'exprime par :

$$U = E_1 \times 2\pi r_1 = E_2 \times 2\pi r_2 = \frac{2\pi I}{\sigma l} \times 1/Log \frac{r_2}{r_1}.$$

On obtient ainsi la résistance U / I d'une longueur l de nappe :

$$R_n = \frac{2\pi}{\sigma l} \frac{1}{\text{Log} \frac{r_2}{r_1}}$$

Valeur approchée :

En considérant e << r_1 et en développant le logarithme, on obtient l'expression classique : $R_n = \frac{2\pi}{\sigma l} \frac{R_1}{e}$

Résistance de la bobine :

Par sommation des différents termes :

$$R = \sum_{n} R_{n}, R = \frac{2\pi N}{\sigma 1 e} [R_{ext} - (N+1) e]$$

Remarque : pour une «vraie» bobine la longueur l de la nappe est constituée de M spires en série, il faudra donc multiplier la résistance trouvée par M.

3.2.2. Le champ magnétique

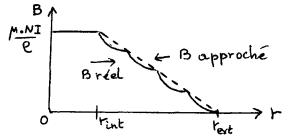
Le champ magnétique à l'extérieur de la bobine est nul. A l'intérieur, au niveau de la nappe d'indice n, on a :

$$B_1 = \mu_0$$
 n I / 1 par application du théorème d'Ampère.
 $B_2 = \mu_0$ (n - 1) I / 1

Dans le cas où e est faible, on peut donc supposer que le champ magnétique varie linéairement selon la loi :

$$B = \frac{\mu_0 N I}{l} \frac{\left(r_{ext} - r\right)}{\left(r_{ext} - r_{int}\right)}$$

En fait Rot $\overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$, $\frac{-\partial B}{\partial r} = \mu_0 \sigma \frac{\lambda}{r}$ impose que le champ magnétique varie logarithmiquement à l'intérieur d'une nappe. On obtient la loi linéaire par développement limité.



3.2.3. Inductance

On utilise l'expression linéaire du champ magnétique (le calcul exact est cependant faisable), on calcule l'énergie W emmagasinée à l'intérieur de la bobine et on l'identifie à : 1/2 LI².

$$2 W_{1} = \int_{V_{nappes}} \frac{B^{2}}{\mu_{0}} d\tau = \frac{\mu_{0}}{1} \left(\frac{NI}{r_{ext} - r_{int}} \right)^{2} \int_{r_{int}}^{r_{ext}} (r_{ext} - r) 2\pi r dr$$

$$2 W_{1} = 2\pi \frac{\mu_{0}}{1} \left(\frac{NI}{r_{ext} - r_{int}} \right)^{2} \left[\frac{r_{ext}^{2}}{2} \left(r_{ext}^{2} - r_{int}^{2} \right) - \frac{2}{3} r_{ext} \left(r_{ext}^{3} - r_{int}^{3} \right) + \frac{1}{4} \left(r_{ext}^{4} - r_{int}^{4} \right) \right]$$

$$2 W_{1} = \pi \frac{\mu_{0}}{1} (NI)^{2} \left[\frac{1}{6} r_{ext}^{2} + \frac{1}{3} r_{ext} r_{int} - \frac{1}{2} r_{int}^{2} \right]$$

$$2 W_{2} = \int_{V_{vide interne}} \frac{B^{2}}{\mu_{0}} d\tau = \frac{\mu_{0}}{1} \int_{0}^{r_{int}} (NI)^{2} 2\pi r dr = \pi \frac{\mu_{0}}{1} (NI)^{2} r_{int}^{2}$$

$$LI^{2} = 2 W_{1} + 2 W_{2} \Rightarrow L = \frac{\pi \mu_{0} N^{2}}{\rho} \left[\frac{r_{int}^{2}}{2} + \frac{r_{int} r_{ext}}{3} + \frac{r_{ext}^{2}}{6} \right]$$

Remarque: pour une «vraie» bobine comportant M spires sur la longueur l, il faut multiplier l'inductance par M^2 .

3.3. Équations de Maxwell

3.3.1. Limite en fréquence du modèle

Une bobine réelle est par exemple constituée de 100 m de fil. Dans l'approximation des états quasi-stationnaires, on doit pouvoir négliger les effets de propagation dans le fil. Si on fixe à 1 km le longueur d'onde dans le vide, il vient 300 KHz pour la fréquence maximum; avec cet

ordre de grandeur, on peut absolument négliger le courant de déplacement $\epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}$.

3.3.2. Équation différentielle

Rot
$$\overrightarrow{E} = \frac{-\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}$$
 donne $\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = -i\omega B$
Rot $\overrightarrow{B} = \mu_0 \sigma \overrightarrow{E}$ donne $\frac{-dB}{dr} = \mu \sigma E$.

D'où l'équation différentielle :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dB}{dr} \right) + k^2 B = 0 \quad \text{avec } k = \frac{1-i}{\delta} .$$

3.3.3. Résolution et conditions aux limites

Les solutions de l'équation différentielle sont les fonctions de Bessel J_0 et Y_0 : $B_n = \frac{\mu_0 I}{I} \left[P_n J_0 (kr) + Q_n Y_0 (kr) \right]$ à l'intérieur d'une nappe.

Le champ magnétique est supposé nul à l'extérieur de la bobine (les équations de Maxwell imposent en fait qu'il soit uniforme à un instant donné), les champs magnétiques sur les 2 faces de la nappe s'obtiennent par le théorème d'Ampère:

$$B_1 = \frac{\mu_0 n I}{I}$$
 $B_2 = \frac{\mu_0 (n-1) I}{I}$

D'où la valeur des constantes :
$$P_n = \frac{n Y_0(z_2) - (n-1) Y_0(z_1)}{Y_0(z_2) J_0(z_1) - Y_0(z_1) J_0(z_2)}$$
,
$$Q_n = -\frac{n J_0(z_2) - (n-1) J_0(z_1)}{Y_0(z_2) J_0(z_1) - Y_0(z_1) J_0(z_2)}$$
 avec la notation $z = kr$.

3.3.4. Discontinuité du champ électrique

Le champ électrique s'obtient par : $-\frac{dB}{dr} = \mu \ \sigma \ E \ donc$:

$$E_{n} = -\frac{KI}{\sigma l} \left(P_{n} J_{0}'(kr) + Q_{n} Y_{0}'(Kr) \right) = \frac{KI}{\sigma l} \left(P_{n} J_{1}(kr) + Q_{n} Y_{1}(kr) \right)$$

Les coefficients P_n et Q_n étant différents en passant d'une nappe à l'autre, le champ électrique est discontinu sur la surface de séparation

des deux nappes. Il faudrait donc en toute rigueur résoudre conjointement les équations de Maxwell dans le diélectrique séparant les nappes.

Est-ce nécessaire ?

La discontinuité de champ électrique est de l'ordre de : $\Delta E = \frac{kB}{\mu\sigma}$ il en résulte que la variation de champ magnétique dans le diélectique est de l'ordre de $\Delta B = \frac{\Delta E}{c}$, c est la célérité de l'onde E.M. dans le diélectrique.

$$\begin{split} \text{Donc} \ : \ \Delta B/B \sim & \frac{k}{\mu\sigma c} \sim \frac{\sqrt{\mu\sigma\omega}}{\mu\sigma c} \sim \frac{\omega\delta}{c} \quad \text{à 100 KHz avec } \delta = 0,2 \text{ mm} \\ \Delta B/B \sim & \frac{2\pi~10^5\times2~10^{-4}}{3~10^8} \sim 4~10^{-7}~! \end{split}$$

On peut donc sans inconvénient utiliser la continuité du champ magnétique sur la surface de séparation entre deux nappes et tolérer du même coup la discontinuité du champ électrique.

3.3.5. Impédance de la bobine

La technique de détermination de l'impédance est exposée en annexe 1.

Du fait de la discontinuité du champ électrique du passage d'une nappe à l'autre, il faut calculer pour chaque nappe le flux sortant du vecteur de Poynting.

On obtient ainsi :
$$Z_n = \frac{2\pi l}{l^2} \left(E_1 B_1 r_1 - E_2 B_2 r_2 \right)$$

$$Z_n = \frac{2\pi}{\sigma l} \left[n z_1 \left(P_n J_1 \left(z_1 \right) + Q_n Y_1 \left(z_1 \right) \right) - (n-1) z_2 \left(P_n J_1 \left(z_2 \right) + Q_n Y_1 \left(z_2 \right) \right) \right]$$
avec les notations : $z_1 = k.r_1$, $z_2 = k.r_2$.

L'impédance $Z = \sum_n Z_n$ n'est pas encore l'impédance totale de la bobine, il reste à rajouter la contribution purement inductive de la partie creuse de la bobine.

3.4. Développements asymptotiques

Lorsque z = k.r est suffisamment grand (on verra plus loin le domaine de validité), on peut utiliser les formes asymptotiques des

fonctions de Bessel (cf. annexe 2). Par exemple pour le dénominateur D intervenant dans les expressions de P et Q:

$$\begin{split} D &= Y_0 \left(z_2\right) J_0 \left(z_1\right) - Y_0 \left(z_1\right) J_0 \left(z_2\right) \\ D &= \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1}{z_1 z_2}} \left(\sin \left(z_2 - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(z_1 - \frac{\pi}{4}\right) - \sin \left(z_1 - \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(z_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right) \\ D &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} \sin \left(\left(z_2 - \frac{\pi}{4}\right) - \left(z_1 - \frac{\pi}{4}\right) \right) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z_1 z_2}} \sin \left(z_2 - z_1\right). \end{split}$$

3.4.1. Champ magnétique

Tous les termes de l'expression du champ magnétique sont d'une forme identique à celle de D. On obtient :

$$B_{n} = \frac{\mu_{0} I}{l} \frac{n \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z z_{2}}} \sin(z_{2} - z) - (n - 1) \frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z z_{1}}} \sin(z_{1} - z)}{\frac{2}{\pi} \frac{1}{\sqrt{z_{1} z_{2}}} \sin(z_{2} - z_{1})}$$

$$B_{n} = \frac{\mu_{0} I}{l} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{n \sqrt{z_{1}} \sin(z_{2} - z) + (n - 1) \sqrt{z_{2}} \sin(z - z_{1})}{\sin(z_{2} - z_{1})}$$

3.4.2. Champ électrique

En usant d'une technique analogue à la précédente

$$E_{n} = \frac{KI}{\sigma l} \frac{1}{\sqrt{z}} \frac{n \sqrt{z_{1}} \cos(z_{2} - z_{1}) - (n - 1) \sqrt{z_{2}} \cos(z - z_{1})}{\sin(z_{2} - z_{1})}$$

3.4.3. Impédance

$$Z_{n} = \frac{2\pi}{\sigma l} \frac{\left(n^{2}z_{1} + (n-1)^{2} z_{2}\right) \cos\left(z_{2} - z_{1}\right) - 2 n (n-1) \sqrt{z_{1}} z_{2}}{\sin\left(z_{2} - z_{1}\right)}$$

3.4.4. Résistance

En prenant la partie réelle de Z_n

$$R_{n} = \frac{2\pi}{\sigma l} \frac{\left(n^{2} r_{1} / \delta + (n-1)^{2} r_{2} / \delta\right) \left(sh \frac{2e}{\delta} - sin \frac{2e}{\delta}\right) - 4 n (n-1) \sqrt{\frac{r_{1} r_{2}}{\delta^{2}}} \left(cos \frac{e}{\delta} sh \frac{e}{\delta} - sin \frac{e}{\delta} ch \frac{e}{\delta}\right)}{ch \frac{2e}{\delta} - cos \frac{2e}{\delta}}$$

On rappelle que e est l'épaisseur d'une nappe.

3.5. Résolution pratique

Les programmes de résolution ont été réalisés en Turbo-Pascal v 3.0 et à l'aide du logiciel Modulog (leurs auteurs ont toute ma gratitude).

Le calcul direct des fonctions de Bessel à partir de leurs développements limités s'est vite avéré impossible en raison de la limitation sur les nombres réels en Turbo-3.

L'étape suivante a été la résolution directe des équations différentielles par la méthode de Runge-Kutta.

Et finalement il est apparu que les développements asymptotiques donnaient d'excellents résultats pour des temps de calcul beaucoup plus courts.

La Figure 2 illustre les trois méthodes.

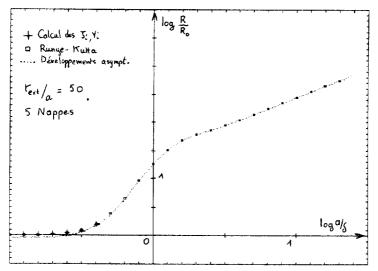


Figure 2 : résistance d'une bobine.

On a pris comme exemple une bobine constituée de 5 couches de spires et telle que r_{ext} / a = 50, a étant le rayon du fil bobiné.

En ordonnée, on fait figurer le logarithme décimal de la résistance rapportée à la résistance statique.

On remarque que très rapidement les courbes utilisant Runge-Kutta et les développements asymptotiques, se confondent.

En conséquences les courbes suivantes seront toutes réalisées par utilisation des développements asymptotiques.

3.6. Étude de quelques résultats

3.6.1. Champ électrique et magnétique

On considère une bobine à 5 nappes telle que r_{ext} / e = 45.

Les Figures 3a, b, c représentent les modules des champs ainsi que leurs phases par rapport à l'intensité.

Échelles de représentation :

Pour le champ magnétique on a pris : $\mu_0 I / I = 1$ Pour le champ électrique : $\frac{1}{Ge} I / I = 1$, e épaisseur de la nappe.

On remarque que les centres des nappes correspondent aux minima de champ électrique donc de densité de courant.

<u>Figure 3a</u>: e / δ = 0,5, l'effet de peau est assez faible et n' apparaît que dans les nappes internes. Le champ magnétique varie quasi linéairement.

Figure 3c : e / δ = 2, effet de peau très marqué la limite hautes-fréquences est atteinte. Dans les zones externes de chaque nappe la phase du champ électrique est inférieure à $-\frac{\pi}{2}$, le courant circule en sens inverse. La discontinuité sur le module du champ électrique reste faible.

On a reporté sur la <u>Figure 3d</u> les parties réelles du champ électrique, c'est une grandeur intéressante car c'est la seule contribution à l'intensité globale. En effet :

$$I = \int j dS = \int \sigma E dS \quad et \ I \ est \ r\acute{e}el.$$

On retrouve pour e / δ = 2 une inversion du sens du courant de plus en plus marquée vers les nappes internes.

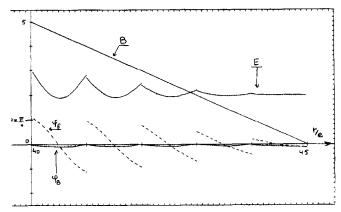


Figure 3a : e / δ = 0,5, champs et phases.

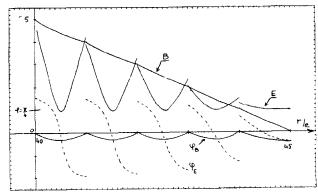


Figure 3b: $e / \delta = 1$, champs et phases.

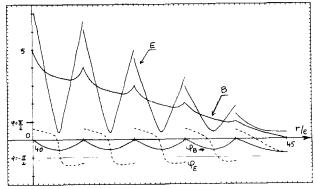


Figure 3c : e / δ = 2, champs et phases.

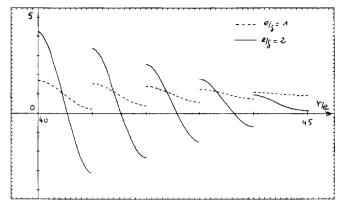


Figure 3d : partie réelle du champ électrique.

3.6.2. Résistance

Voir Figures 4a, b.

On considère une bobine de N nappes réalisée à l'aide d'un fil de cuivre de rayon a. On note $r_{\rm ext}$ le rayon extérieur. Les représentations sont logarithmiques. En ordonnée, la résistance est rapportée à la résistance statique.

<u>Figure 4a</u>: r_{ext} / a = 50, le nombre de nappes est variable.

<u>Figure 4b</u>: on modifie r_{ext} / a en conservant N=10 nappes, on ne remarque qu'une faible influence de ce paramètre.

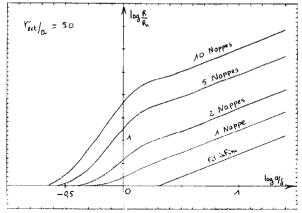


Figure 4a : résistance de la bobine.

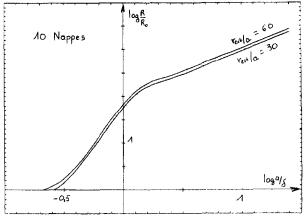


Figure 4b : résistance de la bobine.

On observe sur les deux séries de courbes le comportement asymptotique en a / δ à hautes fréquences.

Comparaison avec le fin infini:

Si l'on considère une bobine à 10 nappes, on peut estimer que l'effet de peau apparaît pour log a / δ = -0,6 donc a / δ = 1/4. Cela fixe la fréquence d'apparition à 1 KHz pour un fil de cuivre de rayon a = 0,5 mm. Avec le fil infini de même rayon on obtient 64 KHz!

4 CONFRONTATION DE LA THÉORIE AVEC L'EXPÉRIENCE

La méthode de mesure de la résistance de la bobine a été exposée dans le précédent article.

Les bobines utilisées sont assez loin de correspondre au modèle d'une bobine infiniment longue, elles sont en plus à section carrée : c'est le matériel classique dont dispose un labo de lycée.

Bobine A:

500 tours, $\emptyset_{fil} = 1.5 \text{ mm},$

longueur: 7,5 cm, côté extérieur: 8,5 cm,

10 nappes.

Bobine B:

500 tours, $\varnothing_{fil} = 1.0 \text{ mm}$,

longueur: 7,5 cm, côté extérieur: 7,5 cm,

6.7 nappes (?).

Bobine C:

250 tours, $\varnothing_{\text{fit}} = 1.6 \text{ mm}$,

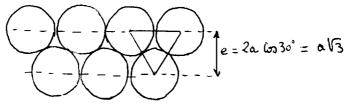
longueur: 7,5 cm, côté extérieur: 7,5 cm,

5,3 nappes (?).

En considérant les spires jointives, il y a 1/2a spires par nappe. Le nombre de nappes s'obtient en divisant le nombre total de spires par 1/2a.

Corrections:

- On comparera les résultats à ceux d'une bobine fictive cylindrique de même section extérieure que la bobine carrée correspondante (choix relativement arbitraire !). Pour les courbes correspondant à la bobine fictive on a pris $r_{\rm ext}$ / a=60 correspondant à un compromis satisfaisant entre les différents cas (on a d'ailleurs vu que ce paramètre avait peu d'importance cf. Figure 4b).
- Épaisseur d'une nappe : on suppose le fil enroulé de la manière la



plus compacte : $e = a \sqrt{3}$.

Les résultats expérimentaux et théoriques sont reportés sur la Figure 5.

Les trois bobines respectent la hiérarchie imposée par le nombre de nappes : la résistance augmente d'autant plus rapidement que la bobine possède un grand nombre de nappes.

La résistance de la bobine réelle est toujours plus faible que celle de la bobine théorique correspondante. Ce résultat est logique, le champ magnétique dans la bobine réelle est inférieur en chaque point de l'espace à sa valeur dans une bobine théorique. A titre d'illustration, l'inductance mesurée de la bobine A est $L=1,1\ 10^{-2}\ H$, la valeur calculée par la formule du § 3.2.3. est $L=2\ 10^{-2}\ H$. Le champ magnétique est en gros divisé par 2, de même pour le champ électrique. Cela impose dans le fil des domaines plus larges où la densité de courant prend des valeurs conséquentes, donc un effet de peau moindre.

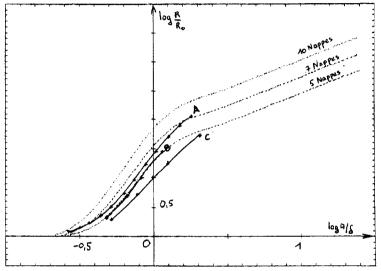


Figure 5: variation de la résistance dans quelques cas.

5. CONCLUSION

Il semble que la théorie développée ci-dessus interprète correctement les faits expérimentaux, malgré une inadéquation certaine du matériel expérimental utilisé.

Suggestions pour de meilleurs mesures :

Utiliser une bobine plus longue, de forme cylindrique. Si l'on utilise du fil plus fin (0.5 mm de diamètre par ex.) et que l'on relie les nappes en parallèle (afin de réduire l'inductance) on doit pouvoir observer le régime haute fréquence où la résistance varie linéairement avec a $/\delta$. Avis aux collègues en mal d'expérimentation !

Annexe 1 - Impédance d'un conducteur cylindrique

1 HYPOTHÈSES

Le conducteur est supposé infini, à symétrie cylindrique, on définira en fait une impédance par unité de longueur.

On suppose que l'on peut définir une intensité dans le conducteur de la forme $I = I_0 \cos \omega t$, I_0 réel . Par application du théorème d'Ampère, le champ magnétique sera proportionnel à l'intensité et en phase avec celle-ci : $B = B_0 \cos \omega t$ à la surface du conducteur, B_0 réel.

Le champ électrique est a priori déphasé par rapport au champ magnétique à la surface du conducteur : $E = E_0 \cos{(\omega t + \phi)}$. Les vecteurs \overrightarrow{E} et \overrightarrow{B} sont orthogonaux et le vecteur de Poynting $\overrightarrow{P} = \overrightarrow{E} \wedge \frac{\overrightarrow{B}}{\mu_0}$ est lui même orthogonal à la surface du conducteur.

2. APPLICATION DU THÉORÈME DE POYNTING

Énoncé :

Si on prend le flux sortant de \overrightarrow{P} à travers une surface fermée, on a : $\Phi_{\text{sortant}} = \iint \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dS} = - \, dW/dt \quad dW/dt \quad \text{étant la variation d'énergie}$ électromagnétique dans le volume délimité par la surface.

Cas du fil infini:

On considère un cylindre de hauteur h et de rayon a.

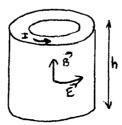
$$\Phi_{sortant} = -E \frac{B}{\mu_0} \times 2\pi \text{ ax h}$$

$$h \int \int \int \frac{1}{1 - B} dt$$

Cas d'une nappe de courants :

On considère une circulation de courants entre deux cylindres de rayons r_{int} et r_{ext} .

$$\mathbf{\Phi}_{\text{sortant}} = \left(\mathbf{E}_{\text{ext}} \, \mathbf{B}_{\text{ext}} \times 2\pi \, \mathbf{r}_{\text{ext}} - \mathbf{E}_{\text{int}} \, \mathbf{B}_{\text{int}} \times 2\pi \, \mathbf{r}_{\text{int}} \right) \frac{\mathbf{h}}{\mu_0}$$



3. IMPÉDANCE DU CONDUCTEUR

Le flux sortant du vecteur de Poynting s'exprimera par :

 $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t \cos (\omega t + \phi')$ et donc en développant :

$$\Phi = \Phi_0 \left(\cos \varphi' \cos^2 \omega t - \sin \varphi' \sin \omega t \cos \omega t \right).$$

D'autre part : $\frac{dW}{dt} = RI^2 + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right) = RI^2 + LI \frac{dI}{dt}$ et comme $I = I_0 \cos \omega t$, on obtient :

$$\frac{dW}{dt} = RI_0^2 \cos^2 \omega t - L\omega I_0^2 \sin \omega t \cos \omega t.$$

D'où par identification:

$$R = -\frac{\Phi_0}{I_0^2}\cos\phi^{\prime} \ , \ L\omega = -\frac{\Phi_0}{I_0^2}\sin\phi^{\prime}. \label{eq:Rate}$$

En revenant à l'impédance complexe :

$$\overline{Z} = -\frac{\Phi_0}{I_0^2} \left(\cos \varphi' + i \sin \varphi'\right).$$

En prenant une amplitude complexe pour le champ électrique \overline{E} , on obtient :

$$\underline{Fil\ infini}\ :\ \overline{Z} = \frac{2\pi\ a\ h}{\mu_0\ I_0^2}\ \ \overline{E}\ B\ .$$

$$\underline{\text{Nappe de courants}} \ : \ \overline{Z} = \frac{2\pi \ h}{\mu_0 \ I_0^2} \bigg(\overline{E}_{int} \ B_{int} \ r_{int} - \overline{E}_{ext} \ B_{ext} \ r_{ext} \bigg).$$

Annexe 2 - Fonctions de Bessel

1. DÉRIVATION

$$\frac{d J_0(z)}{dz} = -J_1(z) , \frac{d Y_0(z)}{dz} = -Y_1(z)$$

2. EXPRESSIONS ASYMPTOTIQUES

$$\begin{split} &J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos \left(z - \frac{3\pi}{4}\right) \\ &Y_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad Y_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin \left(z - \frac{3\pi}{4}\right) \end{split}$$

BIBLIOGRAPHIE

Landau et Lifchitz

Électrodynamique des milieux continus (Éditions Mir Moscou)

- Équations de Maxwell,
- Opérateurs vectoriels en coordonnées cylindriques,
- Effet de peau (effet Kelvin).

A. Angot

Compléments de mathématiques (Éditions Masson)

- Fonctions de Bessel,
- Méthode de Runge-Kutta.