

Chute d'une bille le long d'une gouttière cycloïdale Tautochrone et brachistochrone Propriétés et historique

par Jacques DUBOIS
37000 Tours

Ayant été sollicité pour participer à la présentation de l'expérience intitulée «Le chemin le plus court est-il le plus rapide ?» à la Cité des Sciences de la Villette (niveau 1 - mathématiques), lors des journées nationales de l'Union des Physiciens (Paris - octobre 1990), j'ai repris l'étude commencée en 1979¹, qui n'était d'ailleurs, comme je l'indiquais, qu'une introduction.

Le présent article va être divisé en deux parties. Dans la première, j'expose et justifie par le calcul les propriétés de la trajectoire cycloïde pour la pesanteur ; si le premier calcul, sur le pendule cycloïdal, est accessible à un élève de Terminale C, le second, relatif à la courbe de la descente la plus rapide, est du niveau licence et ne peut guère être simplifié...

Dans une seconde partie, j'aborde l'historique des problèmes de la cycloïde tautochrone et brachistochrone. L'histoire de la courbe de la descente la plus rapide a été présentée dans un ouvrage de H. Goldstine² et longuement étudiée récemment par Madame Jeanne Peiffer³ ; en

- 1 J. Dubois - Durée de chute d'un point pesant sur une courbe. Bulletin de l'Union des Physiciens n° 611, Février 1979, p. 667 à 671.
- 2 Herman H. Goldstine - A history of the calculus of variations from the 17th through the 19th century. Springer - Verlag, New-York, Heidelberg, Berlin 1980.
- 3 J. Peiffer - Le problème de la brachistochrone à travers les relations de Jean I Bernoulli avec l'Hôpital et Varignon - Studia Leibnitiana - Sonderheft 17 - 1989.
J. Peiffer - Le problème de la brachistochrone, un défi pour les méthodes infinitésimales de la fin du XVII^{ème} siècle. Sciences et techniques en perspective. Nantes Vol. XVI. 1991.

outre ce travail a été repris par M. Michel Blay dans sa thèse⁴. Je me contenterai donc de résumer les différentes façons dont a été à l'origine abordé ce problème. Une seule solution n'a jamais été développée : celle de Newton, qui n'a pas été publiée ; je tenterai de faire le point sur cette question, en mettant en garde néanmoins le lecteur non prévenu sur le caractère un peu déconcertant des développements mathématiques de l'époque⁵ : on ne connaissait pas les dérivées partielles et le calcul des variations basé souvent sur le choix entre plusieurs courbes possibles, correspondant comme le note J. Peiffer à la notion de paramètre différentiable, était d'une absolue nouveauté. Signalons cependant que, si ces questions ont véritablement introduit le calcul variationnel dans le monde scientifique du XVII^e siècle, préfigurant les travaux d'Euler et de Lagrange, le premier vrai problème de calcul des variations avait été posé et résolu plusieurs années auparavant par I. Newton, en 1685, à propos de la forme du solide de révolution qui se déplace dans un milieu en rencontrant la moindre résistance possible : nous évoquerons ses calculs à propos de sa solution de la brachistochrone*.

4 M. Blay - Mathématisation et conceptualisation de la science du mouvement au tournant des XVII^{ème} et XVIII^{ème} siècles - Thèse de Doctorat d'État - Paris 1989.

5 Cette remarque est du reste valable pour toutes les démonstrations présentées dans la partie historique de cet article.

* Orthographe conseillée actuellement, plutôt que brachystochrone. Voir Audin P. La brachistochrone - Quadrature n°1 Nov. Déc. 1989.

Première partie

LE PROBLÈME MÉCANIQUE ET ANALYTIQUE DE LA COURBE TAUTOCHRONE

Nous avons formulé dans notre article de 1979¹ le problème classique du pendule cycloïdal : étant donné un point pesant abandonné sans vitesse initiale sur un profil sans frottement, quel doit être ce profil pour que la durée de chute jusqu'au point le plus bas soit indépendante de la position du point de départ ? La solution est une trajectoire cycloïdale et l'on dit que la cycloïde est une courbe tautochrone pour le mouvement d'un point pesant. Il s'agit donc bien de trouver un pendule pesant dont la période ne dépend rigoureusement pas de l'amplitude, et le résultat était vérifié expérimentalement au XVIII^e siècle au moyen de dispositifs dans le genre de celui qui était préconisé par 's Gravesande et que nous présentons au Musée de l'Hôtel Goulin à Tours, dans le Cabinet de Physique de Chenonceau⁶ : il est constitué de deux gouttières identiques accolées sur lesquelles on abandonne simultanément deux billes à des hauteurs différentes : elles arrivent toujours en même temps au point le plus bas...(Photo n° 1).

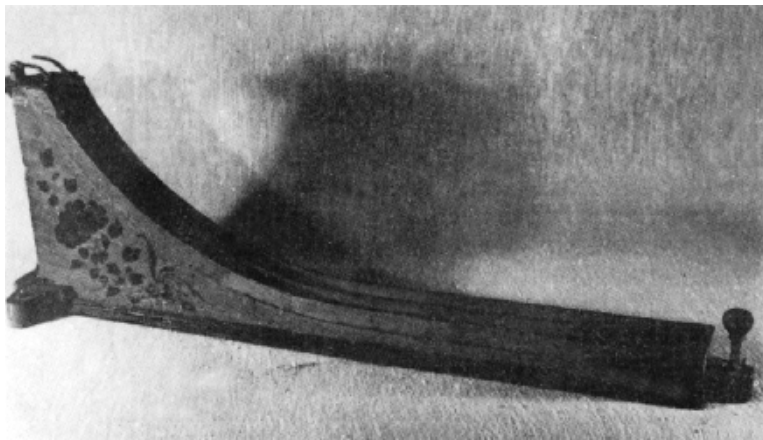


Photo 1 : Double gouttière cycloïdale permettant de vérifier que la cycloïde est une courbe tautochrone pour le mouvement d'un point pesant.

Cabinet de Physique du Château de Chenonceau.

Société Archéologique de Touraine. Musée de l'Hôtel Goulin - Tours.

6 J. Dubois (Note 1) et : Le Cabinet de Physique et Chimie de Chenonceau (XVIII^eme siècle). Éditions la Simarre - Tours 1989.

Rappelons la démonstration bien connue du pendule cycloïdal (elle peut être adaptée au niveau d'une Terminale C !).

La cycloïde est une courbe engendrée par un point lié au cercle C de rayon R qui roule sans glisser sur la droite D (Figure 1).

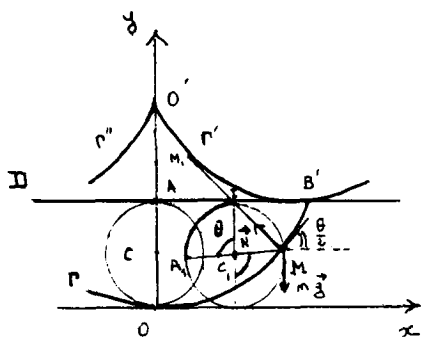


Figure 1

Ce point est supposé être en O à l'instant $t = 0$.

Le cercle ayant tourné de θ , le point A vient en A_1 et $AA_1 = \widehat{IA_1}$.

Pour le point M :

$$\begin{cases} x = R (\theta + \sin \theta) \\ y = R (1 - \cos \theta) \end{cases} \text{ équations paramétriques de la cycloïde.}$$

$$dx = R (1 + \cos \theta) d\theta$$

$$dy = R \sin \theta d\theta$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2}$$

La tangente en M à la cycloïde fait l'angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'horizontale.

Posons $s = \widehat{OM}$:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = R^2 \left[2 d\theta^2 (1 + \cos \theta) \right]$$

$$ds = R\sqrt{2} (1 + \cos \theta)^{\frac{1}{2}} d\theta = 2R \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$s = 4R \sin \frac{\theta}{2}$$

Considérons maintenant en M un point pesant M' de masse m se déplaçant sans frottement sur la cycloïde : il est soumis à son poids et à la réaction normale $\vec{N}$ (suivant M'I car I est le centre instantané de rotation).

La relation de la dynamique donne pour M' :

$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a}$, ou, en projetant sur la tangente orientée :

$$-mg \sin \frac{\theta}{2} + 0 = m \ddot{s} \quad \text{avec } s' = \widehat{OM'}$$

$$\ddot{s}' + \frac{g}{4R} s' = 0$$

$$s' = s'_0 \cos \sqrt{\frac{g}{4R}} t$$

s'_0 étant la valeur de s' pour $t = 0$.

L'oscillateur est rigoureusement sinusoïdal et la période $T = 2\pi \sqrt{\frac{4R}{g}}$ est indépendante de s'_0 .

Rappelons par ailleurs que dans une cycloïde le centre de courbure est un point M_I de la normale tel que $MI = IM_I$ et que l'enveloppe de la normale ou développée de la cycloïde décrite par M_I est une cycloïde Γ' égale à la première (Figure 1). Le rayon de courbure de la demi-cycloïde OB' décroît depuis $4R$ en $O'O$ jusqu'à zéro en B' , et pour réaliser un pendule cycloïdal, il suffit, comme l'a proposé Huygens, d'attacher un corps M' de masse m par un fil souple au point O' , de longueur $OO' = 4R$, et d'obliger M' à décrire la cycloïde (Figure 2) : pour cela, le fil doit s'appuyer constamment sur les deux demi-cycloïdes Γ' et Γ'' , symétriques et constituant la développée totale de la cycloïde Γ , en s'enroulant successivement sur les arcs $O'B'$ et $O'B''$.

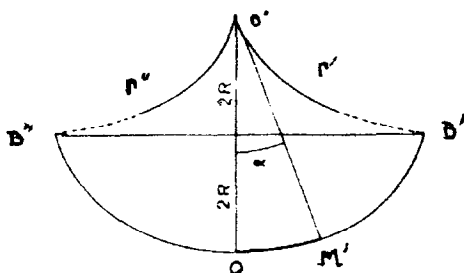


Figure 2

Le fil reste tendu car la valeur algébrique de la tension sur la normale principale (orientée vers O') est donnée par :

$$-mg \cos \frac{\theta}{2} + N = \frac{mv^2}{\rho} \quad N = \frac{mv^2}{\rho} + mg \cos \frac{\theta}{2}$$

qui reste positif ou nul.

Remarque : on peut aussi poser le problème de la courbe tautochrone dans un milieu résistant, comme l'a fait Newton (voir plus loin).

LE PROBLÈME DE LA CYCLOÏDE, COURBE BRACHISTOCHRONE⁷

Montucla⁸ le pose en ces termes :

«Le temps qu'un corps emploie à tomber d'un point à un autre n'est pas en raison simple de la longueur du chemin qu'il parcourt. Une courbe qui procurera au corps un commencement de chute verticale, qui ensuite deviendra de plus en plus inclinée, pourra donc lui donner une vitesse plus grande qu'il ne faut pour compenser la longueur du chemin qu'il parcourt : ainsi il ne doit point paraître étonnant qu'un corps qui tombe le long d'une courbe menée d'un point à l'autre emploie moins de temps à parcourir ce chemin que s'il fût descendu le long de la ligne droite qui les joint...».

Dans mon article de 1979 (voir note 1) j'avais présenté différents dispositifs expérimentaux en usage au XVIII^{ème} siècle pour comparer les temps de chute d'une bille partant sans vitesse initiale le long d'un

7 Brachistochrone veut dire en grec : «temps le plus court».

8 Montucla J.F. Histoire des Mathématiques - 1799, T. II, p. 473.

plan incliné, d'un arc de cercle et d'une gouttière cycloïdale (pour une même dénivellation).

L'appareil du Musée de l'Université d'Utrecht, décrit par 's Gravesande et Désaguliers, comporte une trajectoire cycloïdale comparée à un plan incliné de pente variable. Nollet a proposé un système à trois canaux (cycloïde, cercle et plan incliné).

L'expérience présentée au niveau 1, section Mathématiques, de la Cité des Sciences de la Villette, que j'ai eu l'occasion de commenter lors des journées nationales de l'U.d.P. de 1990, accompagné de Mmes Bellec - Marcorelles et Allain, s'intitule : «Le chemin le plus court est-il le plus rapide ?», et compare les temps suivant la trajectoire rectiligne et le trajet cycloïdal (les billes sont lâchées simultanément par des électro-aimants et remontées automatiquement...). (Photo n° 2).

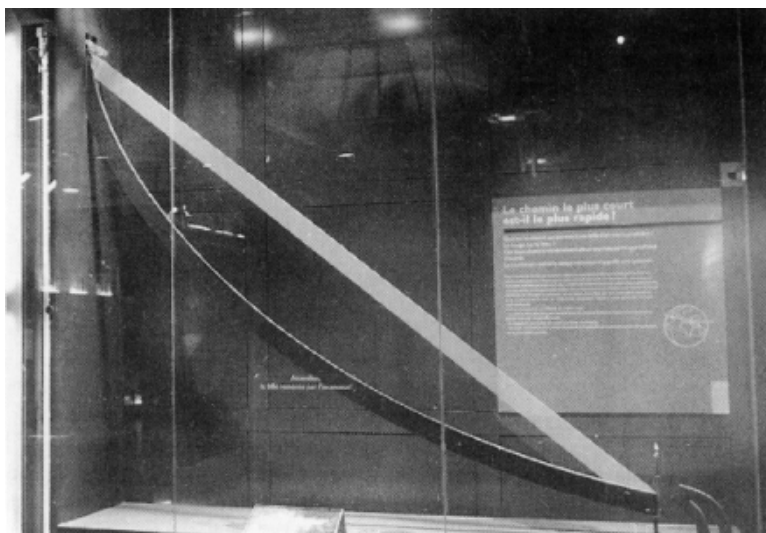


Photo 2 : Cité des Sciences et de l'Industrie. Exposition permanente Explora - niveau 1 - Mathématiques : expérience n° 7.

En généralisant la méthode de Galilée qui avait simplement envisagé le cercle et le plan incliné, on peut comparer les temps de parcours du point pesant de M' à O :

a) sur la cycloïde décrite par le pendule $O'O$ (Figure 2),

b) sur le plan incliné $M'O$, considéré comme corde de la trajectoire circulaire de rayon $O'O$ (Figure 3),

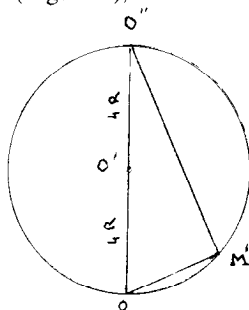


Figure 3

c) sur le cercle de rayon $O'O$ (Figure 4).

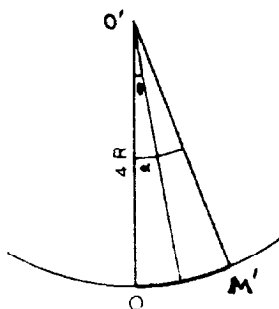


Figure 4

a) Pour la trajectoire cycloïdale, la durée τ du chemin $\widehat{M'O}$ est égale au quart de la période du pendule cycloïdal (Figure 2) :

$$\tau = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4R}{g}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

b) La chute libre $O''O$ durerait t (Figure 3) :

$$O''O = 8R = \frac{1}{2} g t^2 \quad t = \sqrt{\frac{16R}{g}} = 4 \sqrt{\frac{R}{g}}$$

qui serait aussi la durée du parcours $M'O$ sur le plan incliné (quel que soit M').

c) Pour un trajet circulaire $\widehat{M'O}$ (Figure 4) :

$\frac{T'}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{4R}{g}} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} = \tau$ pour les petites oscillations. En réalité, pour une amplitude quelconque (cas du pendule circulaire) :

$$\frac{T'}{4} = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sin^2 \frac{\alpha}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{T'}{4} > \tau$$

La cycloïde apparaît bien dans cette comparaison comme la courbe brachistochrone pour la pesanteur et $\frac{t}{\tau} = \frac{4}{\pi}$.

Mais il faut noter que, dans la réalité, avec les dispositifs expérimentaux proposés, la bille roule (avec glissement ?) sur les gouttières...

Donnons à présent une solution plus complète du problème, (niveau licence).

Cherchons la courbe sur laquelle un point matériel pesant M de masse m placé sans vitesse initiale en O et glissant sans frottement arrive en A dans le temps le plus court. (Figure 5). Appliquons le théorème de l'énergie cinétique entre O et A :

$$\frac{1}{2} m \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 - 0 = m g z \quad \widehat{OM} = s.$$

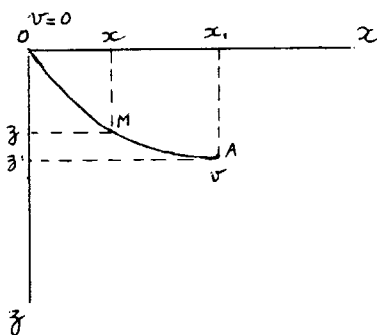


Figure 5

Posons $x = h(z)$, fonction inconnue de z à déterminer par la condition de temps minimal pour tomber de O à A.

$$ds^2 = dx^2 + dz^2 = dz^2 \left[\left(\frac{dx}{dz} \right)^2 + 1 \right] = dz^2 (h'^2 + 1)$$

$$ds = \sqrt{1 + h'^2} dz$$

Or d'après la première ligne de calcul :

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2g}z} \quad \text{car} \quad \frac{ds}{dt} > 0 \quad dt = \frac{ds}{\sqrt{2g}z}$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{z_1} \frac{\sqrt{1 + h'^2}}{\sqrt{z}} dz$$

Posons $\frac{\sqrt{1 + h'^2}}{\sqrt{z}} = F(h, h', z)$

$\int_0^{z_1} F dz$, donc t , sera minimal si :

$$\frac{\partial F}{\partial h} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial F}{\partial h'} \right) \quad \text{équation d'Euler}^9$$

$$0 = \frac{d}{dz} \left(\frac{h'}{\sqrt{z(1 + h'^2)}} \right) \Rightarrow \text{constante} = \frac{h'}{\sqrt{z(1 + h'^2)}}$$

- 9 Rappel d'une proposition de calcul des variations :

" Soit l'intégrale $\int_a^b F(x, y, y') dx$ où la fonction F dépend de la variable

indépendante x , d'une fonction $y(x)$ de cette variable et de la dérivée $y'(x)$ de cette fonction, et où les limites a et b sont deux nombres fixes : les fonctions $y(x)$ qui donnent à l'intégrale considérée une valeur maxima ou minima sont des solutions de l'équation différentielle du deuxième ordre, appelée équation d'Euler : $\frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$. (J. Chazy, cours de mécanique rationnelle, T; I, p. 317).

$$\text{Posons } \frac{h'^2}{z(1+h'^2)} = \frac{1}{2R} \Rightarrow h'^2 = \frac{z}{2R-z}$$

Faisons alors le changement de variable :

$$z = 2R \sin^2 \varphi = R(1 - \cos 2\varphi)$$

$$h'^2 = \frac{z}{2R-z} = \frac{2R \sin^2 \varphi}{2R - 2R \sin^2 \varphi} = \frac{\sin^2 \varphi}{1 - \sin^2 \varphi}$$

$$h' = + \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = \tan \varphi \quad \text{car } h' = \frac{dh}{dz} = \frac{dx}{dz} > 0$$

φ est l'angle de la tangente à la courbe cherchée avec la direction Oz, compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, z étant compris entre 0 et 2R (Figure 6).

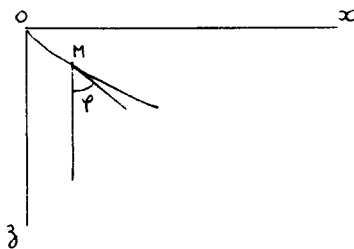


Figure 6

$$\begin{aligned} dh &= dz \tan \varphi = 4R \sin \varphi \cos \varphi \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} d\varphi \\ &= 4R \sin^2 \varphi d\varphi \end{aligned}$$

$$h = \int_0^{\varphi_1} 4R \sin^2 \varphi d\varphi = R \int_0^{\varphi_1} 2(1 - \cos 2\varphi) d\varphi$$

$$h = R(2\varphi_1 - \sin 2\varphi_1)$$

Posons enfin $2\varphi = \theta$:

$$\begin{cases} h = x = R(\theta - \sin \theta) \\ \text{avec } z = R(1 - \cos \theta) \end{cases} \quad \text{Équations paramétriques d'une cycloïde}$$

$$dx = R (1 - \cos \theta) d\theta$$

$$dz = R \sin \theta d\theta$$

on a bien :

$$\frac{dx}{dz} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2}} = \tan \frac{\theta}{2} = \tan \varphi$$

Si $x = 0$, $z = 0$ $\varphi = 0$ la tangente est verticale (point de rebroussement).

Si $z = 2R$, $\theta = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ la tangente est parallèle à Ox .

Ainsi donc, si un point matériel pesant est placé sans vitesse initiale en un point O, la courbe brachistochrone entre le point O et un second point A est, dans le plan vertical des deux points, l'arc de cycloïde dont la base est horizontale et passe au point O.

Si on avait lancé le corps avec une vitesse initiale v_0 , on trouverait encore un arc de cycloïde à base horizontale, mais dont la base est située au dessus du point de départ. On peut également traiter le problème avec des forces supplémentaires autres que la pesanteur, dépendant ou non de la vitesse...

Deuxième partie

HISTOIRE DE LA TAUTOCHRONE

1) Huygens et le pendule cycloïdal

Christian Huygens semble être le premier à s'être intéressé à la cycloïde, courbe tautochrone pour la pesanteur, ayant médité pendant des années sur le problème de l'isochronisme des oscillations d'un pendule quelle que soit l'amplitude, et ce afin de régulariser les horloges marines précises, seules susceptibles de déterminer correctement la longitude après observation du ciel, en comparant l'heure à bord du navire avec l'heure du méridien de référence : problème fondamental au XVII^{ème} siècle, époque du développement du commerce maritime¹⁰.

- 10 J.P. Cléro, E. Le Rest - La naissance du calcul infinitésimal au XVII^{ème} siècle. Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences n° 16, p. 127 à 136.

Galilée avait déjà, vers 1588, remarqué l'isochronisme des oscillations d'un pendule circulaire, mais Huygens savait, contrairement à l'affirmation de Galilée, que cet isochronisme était limité aux petites oscillations. Ayant réalisé expérimentalement des pendules cycloïdaux dès 1657, il en aborde la théorie en 1659 dans un manuscrit en cinq parties datées du 1^{er} au 15 décembre 1659¹¹. Il commence par établir la période des petites oscillations du pendule circulaire en utilisant une parabole osculée par le cercle en son sommet coïncidant avec le point le plus bas de la trajectoire. (Figure 7).

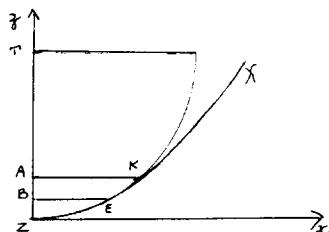


Figure 7

T est le centre d'un quart de circonférence de rayon TZ dont l'arc KZ coïncide avec l'arc de la parabole KZ de sommet Z.

En langage moderne, d'après René Dugas¹², ceci revient à écrire en un point E de l'arc ZK : $v^2 = 2g(h - z)$, en appelant z l'ordonnée de E d'abscisse $x = BE$, v la vitesse du pendule partant de K à la hauteur h sans vitesse initiale :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = 2g(h - z)$$

avec sur le cercle :

$$dz = \frac{x}{R} ds \quad \text{d'où} \quad \frac{R^2}{x^2} \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = 2g(h - z)$$

Mais comme le calcul complet conduit à une intégrale elliptique, Huygens remplace l'arc de cercle KZ par celui de la parabole osculatrice en Z à l'arc circulaire, d'équation :

$$x^2 = 2Rz$$

11 Oeuvres complètes de Christian Huygens t. XVI pp. 392 à 413.

12 R. Dugas - La mécanique au XVII^{ème} siècle, p. 307.

$$\frac{R^2}{2Rz} \left(\frac{dz}{dt} \right)^2 = 2g(h-z)$$

et

$$dt = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \frac{dz}{\sqrt{z(h-z)}}$$

Entre A et Z :

$$t = \frac{T}{4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \int_h^0 \frac{dz}{\sqrt{z(h-z)}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R}{g}} \left[\arcsin \frac{h-2z}{h} \right]_h^0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

quart de période du pendule circulaire, qu'il compare au temps de chute libre suivant TZ :

$$t^2 = \frac{2TZ}{g} = \frac{2R}{g}; \quad t = \sqrt{2} \sqrt{\frac{R}{g}}$$

Mais ceci n'est valable que pour les petites oscillations (quand on confond l'arc de cercle avec l'arc de parabole) et ne vaudrait pour toutes les amplitudes que si le point restait constamment sur la parabole...

Vient alors un calcul un peu compliqué à comprendre : dans le raisonnement précédent, le cercle n'est intervenu que par :

$$dz = \frac{x}{R} ds \quad \text{ou} \quad \frac{ds}{dz} = \frac{R}{x} = \frac{TE}{BE} = \frac{\text{constante}}{BE}$$

(le rapport des éléments différentiels ds et dz en E est égal au rapport $\frac{TE}{BE}$).

Substituons au cercle une autre courbe dont la normale en E est TE. TE n'est plus constant, mais prenons un point F du segment horizontal BE tel que (Figure 8) :

$$\frac{TE}{BE} = \frac{k}{BF} = \frac{\text{constante}}{x}$$

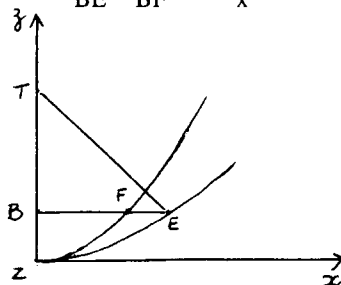


Figure 8

Si F reste sur la parabole quelque soit E, le raisonnement reste valable pour toutes les amplitudes et la courbe est tautochrone.

Or, prenons un arc de cycloïde $\widehat{AE}$, de cercle générateur AGA_1 , pour lequel la corde AG est parallèle à la tangente en E à la cycloïde (propriété de la cycloïde) et la corde A_1G est donc parallèle à la normale TE en E à la courbe (Figure 9). Les triangles semblables donnent :

$$\frac{TE}{BE} = \frac{A_1G}{BG} = \frac{AG}{AB}$$

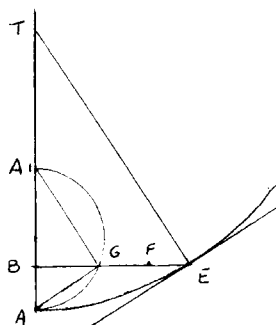


Figure 9

Si le point F sur BE est tel que :

$$\frac{TE}{BE} = \frac{k}{BF} \Rightarrow \frac{AG}{AB} = \frac{k}{BF} \text{ ou } BF = k \frac{AB}{AG} \quad (k \text{ est une constante})$$

$$BF^2 = k^2 \frac{AB^2}{AG^2} = \frac{k^2 AB^2}{AA_1 \times AB} = \frac{k^2}{AA_1} AB$$

Ce qui revient à écrire entre les coordonnées de F la relation $x^2 = Kz$ qui est l'équation d'une parabole, et F reste sur cette parabole...

Donc la cycloïde est la courbe tautochrone pour la pesanteur.

Huygens montre ensuite que la cycloïde est égale à sa développée, ce qui lui permet de tailler des lames entre lesquelles oscillera le fil de son horloge à pendule.

Mais dans son œuvre maîtresse : «L'horloge oscillante» (1673), Christian Huygens utilise un autre genre de démonstration (Figure 10) : CA est une demi-arche de cycloïde de sommet A et de base DC

horizontale. FB, GI et AJ sont des parallèles à la base, DB'A est le demi-cercle générateur. La tangente en B, BIJ, est parallèle à la corde B'A et B'A = BJ (propriété de la cycloïde). E est un point quelconque de la cycloïde, FHA un demi-cercle de diamètre FA.

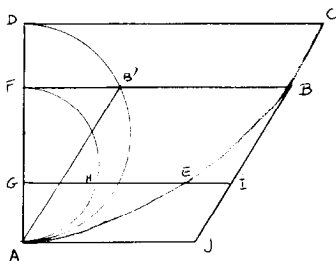


Figure 10

Huygens commence par montrer, au moyen d'une très longue démonstration à la manière d'Archimède, que le temps de descente selon l'arc de cycloïde $\widehat{BE}$ est au temps de descente sur le plan incliné BI comme $\frac{\widehat{FH}}{FG}$.

Donc :

$$\frac{\text{temps sur } \widehat{BA}}{\text{temps sur BJ}} = \frac{\widehat{FA}}{FA} \text{ constante ou } \frac{\text{temps sur } \widehat{BA}}{\text{temps sur B'A}} = \text{constante}$$

Or le temps de descente selon la corde B'A dans le cercle DB'A est égal au temps de la chute libre selon DA = constante.

Donc le temps de descente suivant l'arc de cycloïde $\widehat{BA}$, sous l'action de la pesanteur, est constant et indépendant du point B.

Ce résultat était la grande découverte de Ch. Huygens, «le fruit principal, a-t-il écrit, que l'on pouvait espérer de la science de *motu accelerato* que Galilée à l'honneur d'avoir traité le premier»¹³.

2) La démonstration de Newton

Selon David Gregory, qui eut sous les yeux un manuscrit écrit en 1669 par Newton¹⁴, ce dernier aurait fait cette démonstration avant la publication de «l'Horloge oscillante» par Huygens en 1673.

13 R. Dugas - Op. cit. p. 309.

14 R.S. Westfall - Force in Newton's Physics, p. 512, 513.

Le texte en latin¹⁵ dit à peu près ceci (Figure 11) : BYC est le cercle générateur de la cycloïde DCE. L'accélération tangentielle en un point quelconque δ de la cycloïde pour un point pesant parcourant cette courbe (nous écririons maintenant $\ddot{s} = g \sin \alpha$) est la même que pour une chute le long du plan incliné YC (parallèle à la tangente en δ).

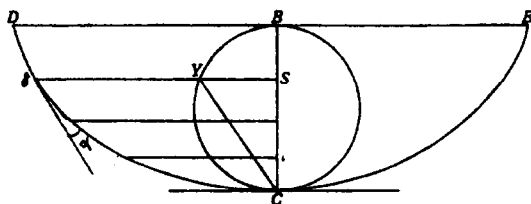


Figure 11

Les accélérations tangentielles sont donc dans le rapport des longueurs des cordes YC, donc des arcs de cycloïde (propriété de la cycloïde) :

$$\frac{\widehat{\delta_1 C}}{\widehat{\delta_2 C}} = \frac{\dot{s}_1}{\dot{s}_2} = \frac{a_{y_1}}{a_{y_2}} \quad \text{avec } a = \frac{2 YC}{t^2} \quad t = \text{constante}$$

Les temps de chute le long des cordes YC étant constants, il en est de même le long des arcs de cycloïde : «sorte d'intégration verbale», mais qui est justifiée ; nous écririons maintenant $\frac{\ddot{s}}{s} = k$ ou $\ddot{s} - ks = 0$ qui correspond bien à une période constante...

Newton reprendra le problème, dans un milieu résistant cette fois, en 1687, dans ses «Principia» (Livre second, Propositions 25 à 31).

L'HISTOIRE DE LA BRACHISTOCHROME

Comme il a été dit dans l'introduction, cette histoire a déjà été traitée récemment d'une façon exhaustive pour les solutions des Bernoulli, de Leibniz et de l'Hôpital. Nous nous contenterons donc de résumer ces solutions, mais essaierons par contre de retrouver celle de Newton, non publiée.

15 A.R. Hall et M.B. Hall - Unpublished scientific papers of I. Newton (1962), p. 170 à 172.

Le problème avait déjà été abordé par Galilée en 1638, dans son «Discours concernant deux sciences nouvelles» ; théorème XXII, scolie : «Le mouvement le plus rapide entre deux points situés à des hauteurs différentes n'a pas lieu le long de la ligne la plus courte, c'est-à-dire le long d'une droite, mais le long d'un arc de cercle»¹⁶, ce qui est doublement inexact car la brachistochrone n'est pas le cercle, et d'autre part la trajectoire circulaire n'est pas nécessairement plus rapide que le trajet rectiligne sur un plan incliné de mêmes extrémités (cela dépend de l'amplitude, voir ma discussion dans l'article de 1979¹⁷).

Presque 60 ans plus tard, Jean Bernoulli va proposer aux mathématiciens, dans les «Acta Eruditorum» de Leipzig de Juin 1696 (p. 269), le problème suivant : Étant donnés deux points A et B dans un plan vertical, trouver le parcours AMB vers le bas qu'un point mobile M doit, sous l'action de son poids, suivre de A à B dans le temps le plus court possible. Il a par ailleurs déjà communiqué le sujet à Leibniz dans une lettre datée du 9 juin 1696, où il annonce en outre que si personne d'autre ne répondait au problème, il publierait sa propre solution à la fin de l'année.

Leibniz répond le 16 juin, n'ayant eu semble-t-il aucune difficulté à trouver l'équation différentielle du 1^{er} ordre de la trajectoire ; bien qu'il n'ait pas reconnu en celle-ci la cycloïde, il propose d'appeler la courbe «tachystoptote» (de tachystos, le plus rapide et piptein, tomber). Dans une lettre du 21 juillet, Jean Bernoulli dit qu'il préfère «brachistochrone» (temps le plus court) et, dans une autre lettre à Leibniz datée du 31 juillet, il donne ses différentes solutions.

D'autres mathématiciens, en France et en Angleterre, auxquels Bernoulli avait simultanément transmis le problème, ne purent absolument pas s'y attaquer. A Paris, Varignon (auquel le sujet avait été envoyé le 15 mai 1696), admit avoir été «d'emblée rebuté par sa difficulté et ne pas connaître quelqu'un, parmi tous ceux auxquels il l'avait communiqué, qui l'ait résolu !» ; l'un d'entre eux, L'Hôpital, répondit indépendamment à Bernoulli, l'appréciant comme étant «parmi les plus curieux, les plus jolis que quiconque lui ait proposé jusqu'ici», mais plaidant la nécessité de «le réduire à des mathématiques pures avant qu'il puisse s'y attaquer, car la physique l'embar-

16 Traduction Maurice Clavelin. A. Colin 1970, p. 199 et table des matières.

17 Bull. de l'Union des Physiciens n° 611 p. 671.

rasse» : même après un laps de temps de 6 mois, il ne put que renvoyer une solution de seconde main de Joseph Sauveur, d'ailleurs inexacte¹⁸.

A Oxford, un certain suisse (sans doute Hieronymus, le plus jeune frère de Bernoulli), présenta le défi de la brachistochrone à Wallis en septembre 96 et attendit en vain une réponse jusqu'en décembre où il en parla à son collègue David Gregory, qui à son tour gâcha 2 mois, comme nous le verrons plus loin, à chercher en vain une solution, avant de se faire aider par Newton...

Leibniz propose alors en novembre, dans le Journal des Savants, de repousser l'échéance de la fin de l'année afin de laisser un peu plus de temps aux mathématiciens étrangers, étant donné que la livraison des Acta Eruditorum était semble-t-il assez lente... Effectivement, la date de remise des solutions est retardée à Pâques de 1697 par Jean Bernoulli dans une annonce des Acta Eruditorum de décembre 1696 et dans un texte intitulé «Programma» publié à Groningue le 1^{er} janvier 1697.

Finalement, six solutions vont être publiées dans les Acta Eruditorum de mai 1697 : une courte présentation de Leibniz qui expose que sa solution ne diffère guère de celles des frères Bernoulli, la solution de Jacques Bernoulli, l'aîné, qui considère d'ailleurs le problème lancé par son frère comme un défi personnel, la solution dite « indirecte » de Jean Bernoulli, un mémoire de L'Hôpital, un autre de Tschirnhaus et une dernière solution anonyme qui va finalement s'avérer être de Newton : Bernoulli dit que « l'on a reconnu le lion à sa griffe » ; la courte note de Newton, qui, ainsi que nous le verrons plus loin, ne donne que la solution sans indiquer le raisonnement (comme d'ailleurs le mémoire de Tschirnhaus), avait déjà été proposée dans une lettre datée du 30 janvier 97 à Charles Montagu, chancelier de l'Échiquier et protecteur de Newton ; lue à la Royal Society le 24 février, elle fut publiée dans les Philosophical Transactions n° 17 de janvier 1697.

LA SOLUTION DE LEIBNIZ

Donnée comme on l'a dit dans la lettre à Jean Bernoulli du 16 juin 1696, avec une introduction mathématique publiée séparément, cette solution consiste à remplacer la courbe cherchée par une suite de petits plans inclinés le long desquels le temps de descente est au temps de

18 D.T. Whistleside - The mathematical Papers of I. Newton T. VIII, p. 5.

chute verticale comme la longueur du plan incliné à sa hauteur ; par ailleurs le temps de chute verticale est donné par la loi galiléenne de proportionnalité à la racine carrée de la hauteur.

Puis il écrit que le temps de descente le long de deux plans inclinés consécutifs est minimum et il en tire la relation (Figure 12) :

$$\frac{D_1 C_2}{D_2 C_3} = \frac{C_1 C_2}{C_2 C_3} \sqrt{\frac{A B_1}{A B_2}}$$

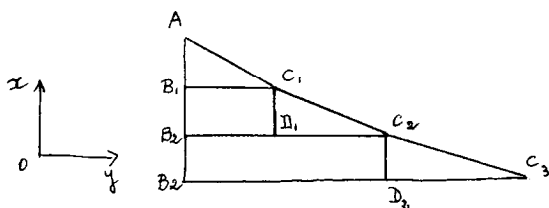


Figure 12

ou encore $dy = dc \times k \sqrt{x}$ avec dc élément de courbe, propriété très importante que l'on retrouvera dans presque toutes les démonstrations et qui caractérise par ailleurs la cycloïde ; en effet, on peut encore écrire :

$$dy = dc \times \frac{1}{2b} \sqrt{2bx} \text{ en appelant } b \text{ une constante.}$$

$$\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{1}{2b} \sqrt{2bx} \quad \text{ou} \quad \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2} = \frac{x}{2b}$$

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dy^2} = \frac{2b}{x} \quad \frac{dx^2}{dy^2} = \frac{2b-x}{x} \quad \text{ou} \quad \frac{dy^2}{dx^2} = \frac{x}{2b-x}$$

$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{2b-x}}$, équation différentielle d'une cycloïde (voir ma démonstration de la brachistochrone dans cet article).

LA SOLUTION DE JACQUES BERNOULLI

Proposée dans les Acta Eruditorum de mai 1697, elle a le mérite de bien montrer l'originalité du problème : choisir entre plusieurs courbes celle qui rend minimal le temps de parcours.

Jacques Bernoulli commence par établir la proposition suivante : si la propriété est vraie pour un petit élément de courbe, elle sera vraie pour une portion quelconque de la trajectoire ; cette proposition va lui permettre de résoudre le problème seulement sur un élément ds et lui éviter d'avoir à différencier une intégrale¹⁹.

Soit AB la courbe cherchée et CD un élément (infinitement petit ds du premier ordre). (Figure 13).

$$CE = EF = ID$$

$$EI = FD$$

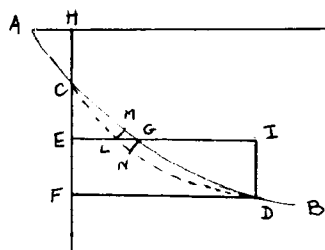


Figure 13

CLD est un élément de courbe très voisin de CGD, tel que GL soit un infiniment petit du deuxième ordre ($GL = \delta EG$, avec $EI = dx$ et $CF = dy$) que Jacques Bernoulli va calculer à y constante. Le temps de descente suivant CD sera minimum si $t_{CG} + t_{GD} = t_{CL} + t_{LD}$. LM et GN sont des arcs de cercle de centres C et D.

En comparant les triangles MGL du second ordre et CEG du premier ordre, il établit que :

$$\frac{EG \times t_{CE}}{GI \times t_{EF}} = \frac{CG}{GD}$$

En admettant que les mouvements suivant CE et EF (infinitement petits dy) sont donnés par $dt = \frac{dy}{v}$, avec v proportionnelle à $\sqrt{y}$, on arrive à la même propriété que celle signalée à la fin de la solution de Leibniz :

$$t_{CE} = \frac{CE}{\sqrt{HC}} \quad t_{EF} = \frac{EF}{\sqrt{HE}} = \frac{CE}{\sqrt{HE}}$$

19 J. Peiffer Op. cit.

$$\frac{CG}{GD} = \frac{EG}{GI} \sqrt{\frac{HE}{CH}}$$

La courbe est telle que ses éléments ds soient proportionnels aux éléments dx des abscisses et inversement proportionnels aux ordonnées y : c'est une cycloïde.

LES SOLUTIONS DE JEAN BERNOULLI

Il donne une première solution «directe» dans une lettre à Leibniz du 31 juillet 1696 (qui sera publiée plus tard en 1719 dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences*).

«En partant d'une portion infiniment petite de la courbe considérée comme un arc de cercle, nous dit Montucla²⁰, il cherche quel doit être le rayon pour le temps le plus court et trouve que ce rayon a la propriété connue de celui de la cycloïde».

La deuxième méthode, dite «indirecte», se trouve à la fois dans la lettre citée du 31 juillet 96 et dans les *Acta Eruditorum* de mai 1697.

C'est une méthode très originale basée sur une analogie avec l'optique : Jean Bernoulli a déjà, dans ses *Leçons de Calcul Intégral*, étudié au préalable un milieu dont la densité varie d'une façon continue, comme l'atmosphère, et en a déduit la courbure d'un rayon de soleil traversant cette atmosphère. Dans la solution des *Acta Eruditorum*, il rappelle les travaux d'optique de Fermat, Leibniz et Huygens, aboutissant à la loi des sinus :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{v_1}{v_2} = \frac{d_2}{d_1}$$

d : densité du milieu, le trajet du rayon lumineux correspondant par ailleurs au parcours le plus rapide (principe de Fermat).

Puis il dit : «... on reconnaît immédiatement que la brachistochrone est la courbe même qu'épouserait un rayon traversant un milieu dont la densité serait inversement proportionnelle à la vitesse qu'acquerrait un corps pesant en tombant. Car qu'on conçoive un accroissement de la

20 Op. cit. T. II. p. 474.

vitesse dépendant de la nature d'un milieu plus ou moins résistant, ou qu'on fasse abstraction du milieu pour supposer que l'accélération provienne d'une autre cause, tout en obéissant à la même loi, comme la gravité : dans les deux cas, la courbe sera parcourue dans le temps le plus bref, et rien ne nous interdit de substituer l'une à l'autre»²¹.

Il suppose donc un milieu dont la densité est en chaque point inversement proportionnelle à la vitesse d'un point pesant tombant sous l'action de la pesanteur. (Figure 14).

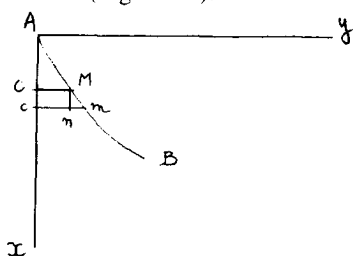


Figure 14

$Cc = dx = Mn$ $\widehat{Mm} = dz$
 $AC = x$ t : vitesse en M
 α = angle de la vitesse et de la verticale
 $\frac{\sin \alpha}{t} = \text{constante ou } \sin \alpha = \frac{t}{a} = \frac{dy}{dz}$
 avec vitesse $t = \sqrt{ax}$ (loi de Galilée).

$\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \frac{\sqrt{ax}}{a}$. En terminant le calcul comme dans la solution de Leibniz, on obtient l'équation différentielle de la cycloïde :

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

Jean Bernoulli conclut : «L'identité de la tautochrone de Huygens et de la brachistochrone est admirable : la nature agit toujours de la manière la plus simple !».

21 J. Peiffer - Le problème de la brachistochrone - Studia Leibnitiana 17, p. 69.

LA SOLUTION DU MARQUIS DE L'HÔPITAL

L'Hôpital est le seul français à avoir résolu le problème de Jean Bernoulli, mais avec quelle difficulté... Il a fourni une première solution le 25 février 1697 dans une lettre à Bernoulli, inspirée de celle du problème de la «funiculaire» (courbe dessinée par un fil pesant attaché en deux points de façon que son centre de gravité soit le plus bas possible). Ayant été critiqué par Bernoulli, il se contente de fournir le résultat dans les *Acta Eruditorum* de mai 97, sans développer la solution.

Ayant entre temps eu connaissance de toutes les solutions de Jean Bernoulli, qui les lui a communiquées le 30 mars 1697, il va élaborer un autre calcul qui sera présenté le 20 avril à l'Académie des Sciences à Paris ; cette solution inédite retrouvée par P. Costabel dans les Registres de l'Académie des Sciences a été publiée par lui et J. Peiffer dans le tome 2 de la correspondance de J. Bernoulli (Bâle 1988) et reprise par J. Peiffer²².

Comme Leibniz, L'Hôpital remplace un élément de courbe (Figure 15) par deux éléments rectilignes AE et EB, et va comme Jacques Bernoulli comparer le temps de parcours AEB à celui d'un chemin infiniment voisin AeB, Ee étant un infiniment petit du second ordre (Jacques Bernoulli envisageait des éléments courbes...).

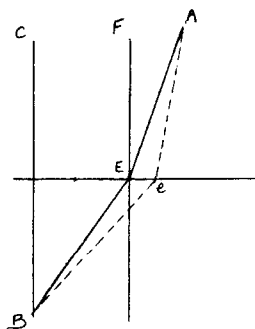


Figure 15

Si a et b sont les vitesses du mobile sur AE et EB,

$$t_{AEB} = \frac{AE}{a} + \frac{EB}{b}$$

22 J. Peiffer - Op. cit.

et
$$t_{AeB} = \frac{Ae}{a} + \frac{eB}{b}$$

Le temps sera minimal si $t_{AEB} = t_{AeB}$ et, par un calcul de géométrie différentielle assez simple, il établit que $\frac{\sin \widehat{FEA}}{a} = \frac{\sin \widehat{CBE}}{b}$

qui est la loi fondamentale $\frac{\sin \alpha}{v} = \text{constante de la brachistochrone.}$

Puis L'Hôpital va augmenter le nombre d'éléments rectilignes pour faire une ligne polygonale et passer à la limite.

Ensuite il démontre que pour une cycloïde il y a proportionnalité entre le sinus de l'angle α et la vitesse de chute (Figure 16) :

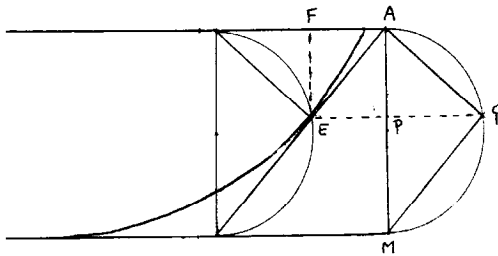


Figure 16

$$\alpha = \widehat{FEA} = \widehat{AMQ} \text{ propriété déjà vue de la cycloïde.}$$

AE tangente à la cycloïde est parallèle à QM dans le cercle générateur.

$$\sin \widehat{AMQ} = \frac{AQ}{AM} \text{ avec } AQ = \sqrt{AM \cdot AP}$$

$\sin \widehat{AMQ} = \frac{\sqrt{AP}}{\sqrt{AM}} \Rightarrow \sin \alpha$ est proportionnel à $\sqrt{AP}$, donc à la vitesse en E (loi de Galilée).

Varignon va faire remarquer à Bernoulli que cette solution va beaucoup contribuer à faire admettre en France le «nouveau calcul».

LES SOLUTIONS D'ISAAC NEWTON

Quand, rentrant chez lui vers 16 h le 29 janvier 1697, Newton, qui avait abandonné la vie académique 9 mois plus tôt pour se consacrer pleinement à sa nouvelle tâche de Gouverneur de la Monnaie à Londres, découvrit le papier imprimé du jeune professeur de Groningue Johann Bernoulli, comportant le challenge mathématique de la brachistochrone (et un autre problème de géométrie qui ne nous intéresse pas ici), il n'hésita pas à se mettre sur le champ au travail et ne dormit pas tant qu'il n'eut pas résolu les deux problèmes, ce qui fût fait vers 4 h du matin, nous dit sa nièce Catherine²³.

Il allait fournir la réponse (mais pas la démonstration...) dans une lettre adressée le lendemain même à son ami Charles Montagu, Chancelier de l'Échiquier et Président de la Royal Society. Cette lettre allait d'ailleurs paraître peu de temps après dans les Transactions Philosophiques 17, n° 224 (pour janvier 1697) sans mention d'auteur, mais la qualité de la courte note et la donnée précise du résultat n'allaient tromper personne, ni Jean Bernoulli lui-même, qui aurait dit à Basnage de Beauval qu'il savait sans aucun doute que l'auteur ne pouvait être que le fameux Monsieur Newton, car on reconnaît le lion à sa griffe... Il faut dire que Bernoulli n'en attendait pas moins de Newton, car en nommant plus tard ceux à qui il avait envoyé son fameux « *Programma* » il mentionne, pour l'Angleterre, bien sûr I. Newton « qui est un des mathématiciens de notre temps que j'estime le plus » et aussi Wallis « mais on le dit mort »²⁴ ; c'était inexact, mais il n'en valait guère mieux intellectuellement, dit méchamment Whiteside, car il avait plus de 80 ans...

Newton était donc le premier à avoir dévoilé publiquement la solution avant l'expiration du délai de Pâques 1697, et Bernoulli allait confier à Leibniz la tâche de regrouper toutes les réponses dans les *Acta Eruditorum* de mai 1697.

Notons cependant que Wallis, après 3 mois de recherches infructueuses, avait passé le problème à son jeune collègue David Gregory (le neveu du grand astronome écossais James Gregory) qui à son tour perdit deux autres mois à essayer de démontrer que la « caténaire » était la courbe de la descente la plus rapide, jusqu'à ce qu'il reçoive le 11 février 1697 une lettre de Newton lui disant que la solution était une cycloïde. Gregory va alors commencer une brève esquisse lue à la Royal Society le 17 mars et publiée anonymement dans les Transactions Philosophiques 17 n° 225, que l'on a long-

23 Selon son mari John Conduitt, et rapporté par Whiteside, op. cit. p. 3.

24 Whiteside op. cit. p. 7 note 13.

(388)

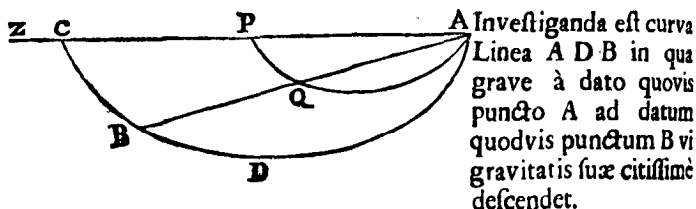
Quæritur Curva, ejus proprietatis, ut duo illa segmenta ad quamcunque potentiam datam elevata & simul sumpta faciant ubique unam eandemque summam.

Calum simplicissimum existente sc. numero potentia 1. ibidem in actis pag. 266. jam solutum dedimus, generalem verò solutionem quam etiamnum premimus, Analytici eruendam relinquimus.

Dabam Groningæ ipfis Cal. Jan. 1697.

Hactenus Bernoullus. Problematum verò solutiones sunt hujusmodi.

Probl. I.



Solutio.

A dato puncto A ducatur recta infinita APCZ hori-
zonti parallela & super eadem recta describatur tum
Cyclois quæcunque AQP rectæ AB (ductæ & si opus
est productæ) occurrens in puncto Q, tum Cyclois alia
ABC cujus basis & altitudo sit adprioris basem & alti-
tudinem respectivè ut AB ad AQ. Et hæc Cyclois
novissima transibit per punctum B & erit Curva illa li-
nea in qua grave a puncto A ad punctum B vi gra-
vitatæ suæ citissime perveniet. QEI.

Prob.

Planche 1 : Construction de la brachistochrone proposée par I. Newton
Lettre du 30 janvier 1697 à Charles Montagu - Philosophical Transactions
n° 17, janvier 1697.

temps crue être la solution de Newton ; à la vérité, Gregory se contente de comparer le trajet rectiligne au trajet sur une cycloïde en utilisant un théorème d'Huygens.

Par ailleurs, Gregory eut des conversations ultérieures avec Newton et malgré cela eut bien du mal à comprendre sa solution : nous en avons la preuve dans son manuscrit A 78¹ ULE du 7 mars 1697, qui, nous dit Whiteside, n'est «qu'un fouillis du souvenir imparfait de la conversation qu'avait eue Gregory avec Newton».

Que savons-nous donc de la solution d'I. Newton ? Sa lettre à Montagu, comme la solution anonyme reproduite dans les *Acta Eruditorum* de mai 1697, ne donne que le résultat et indique une élégante construction par homothétie de la courbe cherchée (Planche 1) : «On demande de trouver la courbe ADB selon laquelle un poids, par la force de sa gravité, descendra le plus rapidement d'un point donné quelconque A à un point donné quelconque B.

Solution : à partir du point donné A dessinons une ligne illimitée APCZ parallèle à l'horizontale, et sur elle, faisons décrire une cycloïde arbitraire AQP rencontrant la ligne droite AB au point Q, et continuons avec une seconde cycloïde ADC dont la base et la hauteur sont pour la base et la hauteur de la précédente comme AB pour AQ respectivement. Cette dernière cycloïde passera par le point B, et ce sera cette courbe-là le long de laquelle un poids, par la force de sa gravité, descendra le plus rapidement du point A au point B».

Par ailleurs, j'ai fait venir de la Bibliothèque de l'Université d'Edimbourg le manuscrit A 78¹ de D. Gregory. Du «rapport embrouillé du souvenir imparfait de la conversation avec Newton», on peut tirer ceci :

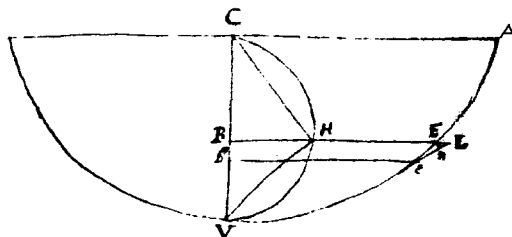


Figure 17

AV est une cycloïde, CHV le cercle générateur, Ee un élément d'arc ds décrit par le mobile sous l'action de son poids. On donne à BE = x un accroissement EL appelé o. Donc Le est un élément de trajectoire infiniment voisin de Ee et nL représente l'accroissement δ (Ee) de Ee (différence seconde). (Figure 17).

Comme Le est parallèle à HV (propriété de la cycloïde) les triangles EnL et CHV sont semblables : $\frac{nL}{o} = \frac{CH}{CV}$ écrit Gregory.

Par ailleurs, la vitesse de chute en E (le long de l'arc de cycloïde) est la même qu'après une chute verticale CB et est proportionnelle à CH (car $CH = \sqrt{CB} \cdot CV$ et la vitesse est proportionnelle à $\sqrt{CB}$, loi de Galilée).

De cette dernière remarque on pourrait tirer : $\sin \alpha = \frac{CH}{CV}$ proportionnel à v (avec α angle de la tangente à la trajectoire avec la verticale) : condition pour que le temps de chute soit minimal (voir les démonstrations précédentes).

Reste à trouver le chemin parcouru par I. Newton pour arriver à cette solution : on peut penser, comme l'indique du reste D. Gregory dans le manuscrit A78¹, que Newton a utilisé une variante de sa méthode dite des «minima et maxima dans les infinitésimales» qu'il avait employée douze ans auparavant pour déterminer l'équation différentielle de définition de la courbe limitant le solide de révolution qui offre la moindre résistance à l'avancement dans la direction de son axe.

Dans la première édition des Principia, Newton étudie (proposition XXXV du livre II, théorème XXVIII) le mouvement des corps se déplaçant dans un fluide sans viscosité et incompressible ; ayant comparé la résistance sur une sphère et un cylindre de même diamètre, il aborde dans l'additif le mouvement d'un tronc de cône se déplaçant dans la direction de son axe, et ensuite le cas d'un corps de forme plus générale, donnant le résultat concernant la résistance minimale sans aucune explication : ce qui, nous dit Goldstine²⁵, mystifia la communauté mathématique et ne fut nettement pas compris par ses contemporains, sauf peut-être par Huygens qui étudia le problème en 1691.

25 H. Goldstine op. cit. p. 8.

Newton ayant été encore une fois sollicité par David Gregory, qui veut introduire ces notions dans son cours, va revoir sa première analyse en 1694. Par ailleurs, nous possédons les brouillons et études préliminaires avec le développement des calculs ayant servi à élaborer les propositions des Principia, et comme ces brouillons datent de 1685, c'est bien dans ce problème à la fois correctement formulé et bien résolu que Newton a introduit pour la première fois au monde le concept de calcul des variations.

Il commence par démontrer que la résistance offerte à un élément de surface ds , suivant la direction de l'avancement, est proportionnelle à $\cos^2 \theta$ ds (θ angle de la normale avec la direction de l'avancement), ou $\sin^2 \theta$ ds (si θ est l'angle de la surface avec Ox). (Figure 18).

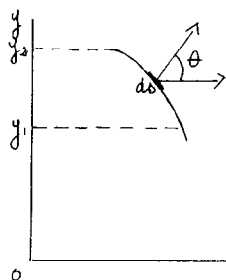


Figure 18

Pour une surface comprise entre les ordonnées y_1 et y_2 , la résistance vaut :

$$R = 2\pi \int_{y_1}^{y_2} \cos^2 \theta y \, dy .$$

Dans une note très laconique (Planche 2) datant de 1685²⁶, il considère une courbe BG tournant autour de l'axe EF (Figure 19).

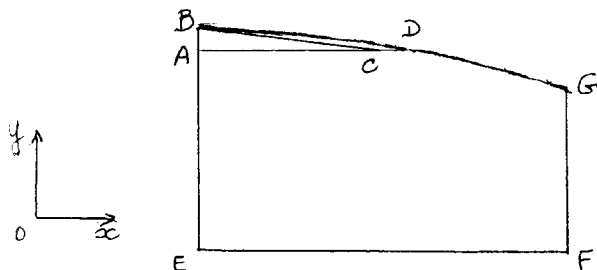


Figure 19

26 Whiteside op. cit. vol. VI, p. 459 et Goldstine, op. cit. p. 22.

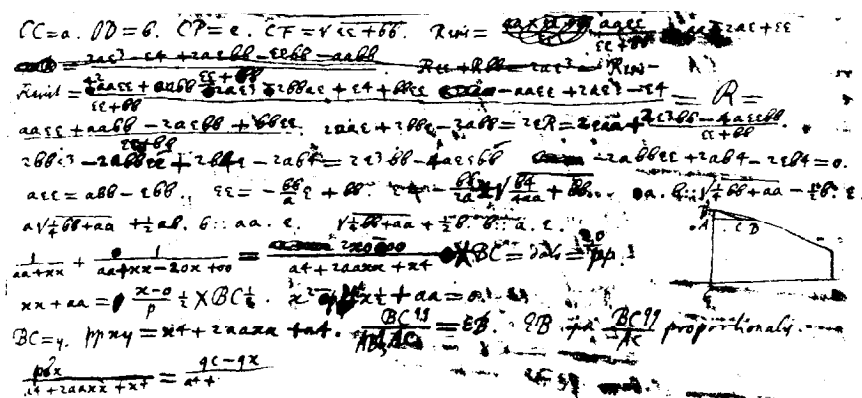


Planche 2 : Manuscrit de Newton (1685).

D est un point proche de B sur la courbe.

EB = y AB = a (c'est-à-dire dy)

AD = x (nos écrivions plutôt dx, élément différentiel du premier ordre). C est proche de D sur AD et CD = o (petit o et non zéro), (c'est-à-dire δdx , élément différentiel du deuxième ordre).

La résistance sur la surface engendrée par BD est :

$$2\pi \sin^2 \widehat{ADB} y dy = 2\pi \frac{a^2}{a^2 + x^2} y a = \frac{2\pi a^3 y}{a^2 + x^2}$$

La résistance étant proportionnelle à : $\frac{y}{a^2 + x^2}$, Newton écrit que la différence des résistances sur les surfaces engendrées en faisant tourner les éléments de surface BD et BC autour de l'axe EF est proportionnelle à :

$$\frac{BE}{a^2 + (x + o)^2} - \frac{BE}{a^2 + x^2} \approx \frac{BE(2xo - o^2)}{a^4 + 2a^2 x^2 + x^4}$$

qu'il pose $= \frac{2o}{p^2}$ en appelant p une constante. Finalement, en négligeant o^2 et en divisant par o il vient :

$$y = BE \quad p^2 x y = a^4 + 2a^2 x^2 + x^4$$

$$\text{ou } \frac{(a^2 + x^2)^2}{x} = p^2 y$$

Ce qui revient à écrire (en négligeant depuis le début le facteur $2\pi a^3$) $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{y}{a^2 + y^2} \right] = \text{constante}$, ce qui est la méthode de calcul des variations pour trouver le résultat, comme nous le verrons plus loin...

En notation moderne, ceci s'écrirait, puisque $a = dy$ et $x = dx$: $\frac{(dy^2 + dx^2)^2}{dx^2 y} = p^2 = \text{constante}$, ou en remettant le facteur $2\pi a^3$, omis depuis le début :

$$y = \frac{1}{p^2} \frac{(a^2 + x^2)^2}{2\pi a^3 x} = \frac{1}{p^2} \frac{(dy^2 + dx^2)^2}{2\pi dy^3 dx}$$

ou encore, en appelant $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$, t étant une variable indépendante du genre temps, notation souvent utilisée par Newton et correspondant à sa notion de «fluxion» :

$$y = \frac{1}{p^2} \frac{(\dot{y}^2 + \dot{x}^2)^2}{2\pi \dot{y}^3 \dot{x}}$$

qui est l'équation différentielle de la courbe correspondant à la surface de moindre résistance !

Actuellement, on traiterai ce calcul de variations en écrivant que la résistance R est minimum au moyen de l'équation d'Euler :

$$R = 2\pi \int_{FG}^{EB} y \cos^2 \theta dy$$

(voir figure ; θ est l'angle de la normale avec l'axe des x)

$$\begin{aligned} R &= 2\pi \int_{FG}^{EB} y \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 dy = 2\pi \int_{FG}^{EB} y \frac{dy^2}{dx^2 + dy^2} dy \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{2\pi \dot{y}^3 y}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt \text{ minimale si } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \text{ avec } F = \frac{2\pi \dot{y}^3 y}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{aligned}$$

Équation d'Euler.

D'où : $\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \text{constante}$

$$\frac{-4\pi \dot{y} \dot{x} y}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2} = k \quad y = -k \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}{4\pi \dot{y} \dot{x}}$$

qui est bien l'équation trouvée plus haut...

Newton va arriver au même résultat par une autre méthode en 1694 (Figure 20).

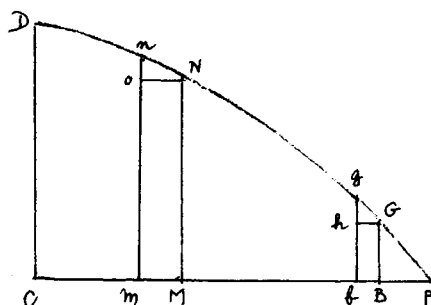


Figure 20

«La courbe plane DP étant la courbe cherchée et le corps offrant la moindre résistance à l'avancement étant engendré par la rotation de DGP autour de l'axe CP, si sur MN on installe des parallélogrammes infiniment étroits BGhb et MNom et que leur distance Mb ainsi que les altitudes MN, BG sont données, que la demi-somme de leurs bases $\frac{Mm + Bb}{2}$ est également donnée, appelée s, et leur demi-différence $\frac{Mm - Bb}{2}$ est appelée x, si les lignes BG, bh, MN, mo, touchent la courbe nNgG aux points n, N, g et G, et que les lignes infiniment petites on, hg sont égales l'une à l'autre et appelées c, et que la figure mnNgGB soit amenée à tourner autour de son axe BM pour générer un solide, ce solide se déplaçant uniformément dans l'eau de M à B selon la direction de son axe BM : la somme des résistances des deux surfaces générées par les lignes infiniment petites Gg, Nn sera la moindre lorsque gG^4 sera pour nN^4 comme $BG \times Bb$ pour $MN \times Mm$ ²⁷.

27 University Library - Cambridge - Add. 3967.2 Brouillon d'une lettre de Newton à D. Gregory datée du 14.7.1694. Whistleside op. cit. vol VI, p. 476.

En effet, la résistance sur nN est proportionnelle à $y \cos^2 \theta$ (voir plus haut), c'est-à-dire à :

$$MN \sin^2 \widehat{nNo} = MN \frac{o n^2}{N n^2} = MN \frac{h g^2}{N n^2}$$

De même, la résistance sur gG est proportionnelle à :

$$BG \sin^2 \widehat{gGh} = BG \frac{h g^2}{G g^2}$$

La résistance sur les deux portions ensemble est proportionnelle à :

$$\frac{BG}{G g^2} + \frac{MN}{N n^2} = \frac{BG}{p} + \frac{MN}{q}$$

Elle sera minimale si la «fluxion» de l'ensemble est nulle, soit si :

$$-\frac{B \cdot G \dot{p}}{p^2} - \frac{M n \dot{q}}{q^2} = 0$$

Or on a posé $p = Gg^2 = Bb^2 + gh^2 = s^2 - 2sx + x^2 + c^2$ ($Bb = s - x$).

De même $q = nN^2 = on^2 + oN^2 = c^2 + (s + x)^2 = c^2 + s^2 + 2sx + x^2$

D'où $\dot{p} = -2s\dot{x} + 2x\dot{x}$ et $\dot{q} = 2s\dot{x} + 2x\dot{x}$

$$\frac{BG (2s\dot{x} - 2x\dot{x})}{p^2} = \frac{MN (2s\dot{x} + 2x\dot{x})}{q^2}$$

$$\frac{p^2}{q^2} = \frac{BG (s - x)}{MN (s + x)} \text{ et } \frac{g G^4}{n N^4} = \frac{BG \times Bb}{MN \times Mm}$$

qui est bien la relation proposée par Newton.

Elle peut encore s'écrire :

$\frac{g G^4}{BG \times Bb} = \frac{n N^4}{MN \times Mm}$ et comme $gG^2 = ds^2 = dx^2 + dy^2$ avec $BG = y$ et $Bb = dx$, $\frac{(dx^2 + dy^2)^2}{y \times dx} = \text{constante}$ ou $\frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^2}{y \dot{x}} = \text{constante}$, qui est la relation déjà trouvée dans la première démonstration (avec $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$ et $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$).

Insistons encore sur l'importance majeure de ce calcul, dont l'idée sera reprise plus tard par Euler et Lagrange pour développer le calcul variationnel.

Il semble donc naturel de penser que Newton, en 1697, n'ait pas eu de mal à réaliser un raisonnement similaire pour trouver l'équation de la brachistochrone ; pour écrire que le temps de descente est minimum, il a pu :

– soit considérer que le temps pour deux trajectoires très voisines est le même, ce qui revient à écrire :

$$t = \int_{y_1}^0 \frac{ds}{v} = \int_{y_1}^0 F dy \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \text{constante}$$

(voir calcul de la p. 1281)

– soit prendre la «fluxion» de la somme des temps pour deux morceaux de courbe consécutifs (confondus avec les cordes, comme l'a fait Leibniz), méthode qu'Isaac Newton va d'ailleurs employer trois ans plus tard.

Au début du printemps 1699, son ami d'autrefois l'émigré suisse Nicolas Fatio de Duillier avait publié à Londres un traité de 22 pages intitulé : «Double recherche géométrique sur la courbe de la descente la plus rapide. A quoi s'ajoute la recherche géométrique sur les solides ronds, pour lesquels la résistance est minimale»²⁸ et dans lequel il caractérisait la brachistochrone dans une très laborieuse démonstration aboutissant à une propriété du rayon de courbure de la cycloïde. David Gregory (toujours lui...) incita Newton à simplifier la démonstration de Fatio, ce qui fut fait en à peine plus de douze lignes d'un papier autographe de Newton qui a été conservé et qui aboutit à la propriété du rayon de courbure donnée par Fatio (Planche 3).

28 C'est dans cet écrit que Fatio de Duillier allait d'ailleurs aviver la querelle entre Newton et Leibniz concernant l'invention du calcul différentiel, en déclarant la priorité de plusieurs années de I. Newton et en qualifiant de «second inventeur» Leibniz, qui réagira violemment...

On dessine les cordes EG, EN et NG et l'on pose :

$$AB = x \quad BC = o = CD \quad BE = y$$

Puis Newton utilise les développements en série signalés déjà par D. Gregory dans le manuscrit du 7 mars 1697.

$$CN = y_{x+o} = y + \dot{y}o + \frac{1}{2} \ddot{y}o^2$$

$$DG = y_{x+2o} = y + 2 \dot{y}o + 2\ddot{y}o^2$$

D'où $HN = CN - EB = IK = \dot{y}o + \frac{1}{2} \ddot{y}o^2 \sim \dot{y}o$ en ne gardant que la partie principale.

$$IG = DG - y - HN = \dot{y}o + \frac{3}{2} \ddot{y}o^2$$

$$LG = DG - y = 2 \dot{y}o + 2 \ddot{y}o^2$$

Posons $GL = 2p = 2 \dot{y}o + 2 \ddot{y}o^2$
(Newton a écrit par mégarde $2 \dot{y}o + \ddot{y}o^2 \dots$)

$$FN = q = \frac{1}{2} LG - HN = \frac{1}{2} \ddot{y}o^2$$

Le temps que met un mobile pour parcourir $\widehat{ENG}$ est peu différent de celui pour suivre $EN + NG$ (avec v proportionnelle à $\sqrt{x}$. Loi de Galilée).

$$t = \frac{EN}{\sqrt{x}} + \frac{NG}{\sqrt{x+o}} = \frac{\sqrt{o^2 + (p-q)^2}}{\sqrt{x}} + \frac{\sqrt{o^2 + (p+q)^2}}{\sqrt{x+o}} = R + S$$

$$\text{en posant } R^2 = \frac{o^2 + (p-q)^2}{x} \text{ et } S^2 = \frac{o^2 + (p+q)^2}{x+o}$$

Calculons les «fluxions» :

$$2 R \dot{R} = \frac{-2 p \dot{q} + 2 q \dot{q}}{x}$$

$$2 S \dot{S} = \frac{2 p \dot{q} + 2 q \dot{q}}{x+o}$$

Ainsi Newton maintient x , o et p fixes et fait varier $FN = q$: c'est la variation de ce petit élément du second ordre qui va permettre de

trouver la condition de temps minimum en prenant les dérivées par rapport à q .

Il écrit donc que la fluxion totale $\dot{R} + \dot{S} = 0$

$$\frac{-p\dot{q} + q\dot{q}}{R \times} + \frac{p\dot{q} + q\dot{q}}{S \times + S_o} = 0$$

En remplaçant R et S par leurs valeurs et en divisant par $\dot{q}$:

$$\frac{p - q}{\sqrt{o^2 + (p - q)^2} \sqrt{x}} = \frac{p + q}{\sqrt{o^2 + (p - q)^2} \sqrt{x + o}}$$

ce qui revient en somme à écrire, comme dans le cas du corps offrant la moindre résistance (voir p. 1282).

$$\frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{\sqrt{o^2 + p^2}}{\sqrt{x}} \right) = \frac{p}{\sqrt{o^2 + p^2} \sqrt{x}} = \text{constante}$$

avec $\frac{o}{p} = \frac{dx}{dy} = \frac{\dot{x}}{\dot{y}}$, d'où il pourrait tirer immédiatement l'équation «flutionnelle» de la cycloïde :

$$\frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \text{ proportionnel à } \sqrt{x}.$$

Mais Newton veut ici retrouver le résultat de Fatio relatif au rayon de courbure...

Finalement, en négligeant le terme $6pqo^2$, il arrive à :

$$p^2 o^2 + p^4 = 4 pqxo.$$

A la limite, quand EN tend vers EF , Newton écrit :

$$EF^2 \simeq o^2 + p^2 \simeq EN^2$$

Si NR est la corde du cercle de centre O osculateur en N à la courbe (Figure 22) :

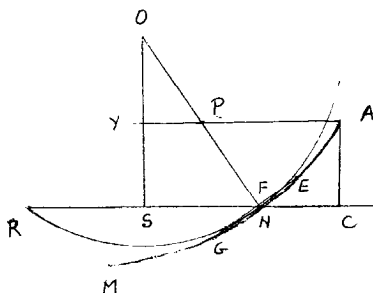


Figure 22

$$FN \cdot FR = FE \cdot FG = FE^2 = EN^2 = FN \cdot NR$$

$$NR = \frac{EN^2}{NF} = \frac{o^2 + p^2}{q} = \frac{4xo}{p} \quad SN = \frac{NR}{2} = \frac{2xo}{p}$$

$$OS = SN \cot \alpha = SN \frac{dy}{dx} = SN \frac{p}{o} = \frac{1}{2} NR \frac{p}{o} = 2x = 2 AC$$

$$\alpha = \widehat{SON}$$

Si P est le point où la normale à la courbe rencontre la base horizontale AY, P est à la moitié de ON, propriété caractéristique d'une cycloïde.

Telle est la dernière démonstration, pour montrer que la cycloïde est la courbe brachistochrone, que nous a laissée Isaac Newton.

Clairaut a écrit que ce dernier avait trop présumé de la sagacité de ses lecteurs en leur laissant le soin de suppléer, dans bien des cas, aux insuffisances de ses propres explications, ce qui ne rend pas la tâche facile pour parler de ses travaux mathématiques ; nous avons essayé cependant - autant que faire se pouvait - de ne pas avoir la même attitude...

Voici donc ce qu'ont été les débuts du calcul des variations, qui aboutit aujourd'hui, entre autre, à ce que l'on appelle les théories des formes optimales et du contrôle optimal.

Nous arrêterons là l'histoire de la courbe tautochrone et brachistochrone, que je trouve personnellement passionnante, en attirant encore une fois l'attention sur l'importance de ces propriétés de la cycloïde : la recherche de ces résultats, conjointement à celle d'autres propriétés concernant la rectification, la quadrature, les tangentes et le centre de gravité, a été à la base du développement de l'Analyse au XVII^e siècle, et a fait de cette courbe, comme l'a écrit Montucla, «l'Hélène des Géomètres».