Interférences : une démonstration fausse qui a la vie dure

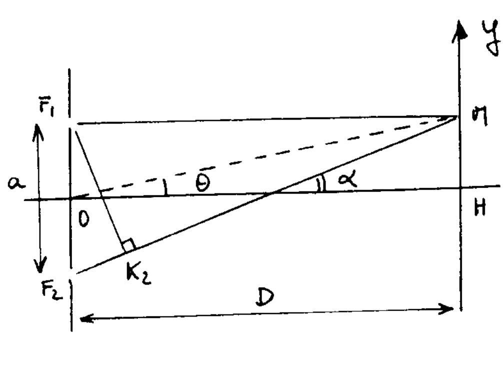
par Pierre DELORME
Lycée Henri IV, 75000 Paris

Une démonstration fausse, que l'on trouvait fréquemment dans les cours d'optique voilà une trentaine d'année, s'est progressivement raréfiée, mais on la rencontre encore parfois. Par ailleurs, il arrive que les élèves la pratiquent spontanément par confusion avec une situation voisine mais non identique.

LA DÉMONSTRATION INCRIMINÉE

Elle concerne le calcul de la différence de chemin $\delta = MF_2 - MF_1$ dans l'expérience classique des fentes d'Young, *sans lentille* à la suite des fentes. Elle consiste à dire que l'*on a* $MF_1 = MK_2$, $F_1 K_2$ étant perpendiculaire à F_2M, d'où $\delta = MF_2 - MF_1 = F_2 K_2 = a \sin \alpha$.

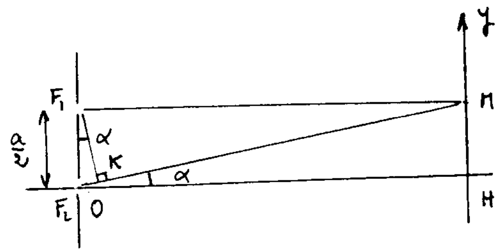
Ensuite, on fait remarquer que, d'après les ordres de grandeur (a et $y = \overline{HM} << D$), on a $\alpha = \theta$ et que ces angles sont petits, d'où $\sin \alpha = \sin \theta = \text{tg}\, \theta = \frac{y}{D}$.



On en déduit le résultat classique $\delta = \frac{ay}{D}$. Ce qui fait le «succès» de ce calcul est bien sûr que le résultat est correct. Alors, pourquoi douter de la valeur de la démarche ? On y est rapidement amené si l'on modifie légèrement le problème.

UNE MODIFICATION DU MONTAGE

On déplace la fente F_2 pour l'amener en O et l'on doit alors calculer la différence $\delta = MO - MF_1$.



La *même démarche* que ci-dessus conduit à tracer F_1K perpendiculaire à OM et à écrire $MF_1 = MK$, d'où

$\delta = MO - MF_1 = F_2K = \frac{a}{2} \sin\alpha$. Comme α est petit, $\sin\alpha = \text{tg}\,\alpha = \frac{y}{D}$, et l'on obtient $\delta = \frac{ay}{2D}$. Ce résultat est manifestement faux, puisque δ s'annule pour $y = 0$, c'est-à-dire en H, d'après cette relation, alors qu'en réalité il s'annule sur la médiatrice de $F_1 F_2$ donc au point d'ordonnée $y = \frac{a}{4}$.

OÙ EST LE TRUC ?

– Il faut d'abord remarquer qu'il est «normal», dans le problème modifié, de trouver $\delta = 0$ en H : écrire $MF_1 = MK$ est équivalent à écrire $HF_1 = HO$. Cette approximation est suffisante dans de nombreux problèmes, mais elle n'est pas admissible ici. Pourquoi ?

– Les difficultés viennent de ce que l'on n'a pas explicité les approximations faites.

La longueur principale est D ; MF_1, MF_2, MO ou HF_1 sont de l'ordre de D.

La distance entre les fentes a, l'interfaçage $i = \frac{\lambda D}{a}$, les valeurs utiles de y, sont des longueurs «infiniment» petites du premier ordre par rapport à D.

Or, les différences δ à calculer, de l'ordre de la longueur d'onde, sont des longueurs infiniment petites du second ordre par rapport à D.

On a : $\delta, \lambda << a, y, i << D$

Typiquement : $D = 1$ m

$a = 1$ mm $\quad i = \frac{\lambda D}{a} = 0{,}5$ mm

$\lambda = 0{,}5$ µm

– On a $MF_1 = MK_2$ *au second ordre près* : c'est suffisant dans de nombreux calculs, mais ça ne l'est pas lorsqu'on veut calculer δ de l'ordre de λ ($\delta = \lambda$ pour la première frange brillante qui suit la frange centrale).

La faute a donc consisté à calculer la différence de chemin δ (du 2[e] ordre) en négligeant un terme ($MF_1 - MK_2$) du même ordre.

– Finalement, l'erreur est plus évidente que sa compensation, qui réside dans le fait de confondre α et θ, compensation qui ne se fait plus dans le problème modifié.

– Cette démonstration, erronée, est calquée, à tort, sur celle que l'on fait, dans le cas où l'on observe les interférences à l'infini, en plaçant une lentille à la suite des fentes et l'écran dans le plan focal image de cette lentille, pour calculer la différence de chemin *optique*.

La morale de cette histoire est bien banale : Il ne faut pas faire d'approximation sans regarder soigneusement si elle est compatible avec le problème posé. Certains traduiraient cela par un aphorisme quasi légendaire : Il ne faut pas faire de somme d'équivalents.