
Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

L'effet tunnel : quelques applications

par Chérif F. MATTA

Département de Biophysique, Institut de Recherches Médicales,
Université d'Alexandrie, Alexandrie (Égypte)

1. THÉORIE DE DÉSINTÉGRATION ALPHA

Due au déclin rapide des forces nucléaires avec la distance, une particule α s'éloignant du noyau résiduel sera de moins en moins soumise à l'attraction nucléaire à sa proximité ; à une certaine distance R_0 les forces d'attraction seront balancées par la répulsion électrostatique qui prédomine pour $r > R_0$ (figure 1). Il en suit que l'intérieur du noyau est séparé de l'espace extérieur par une barrière de potentiel.

Une particule α est suffisamment stable pour exister à l'intérieur du noyau comme entité individuelle munie d'un mouvement de va et vient le long du diamètre nucléaire due à ses réflexions successives sur les deux barrières opposées (figure 1).

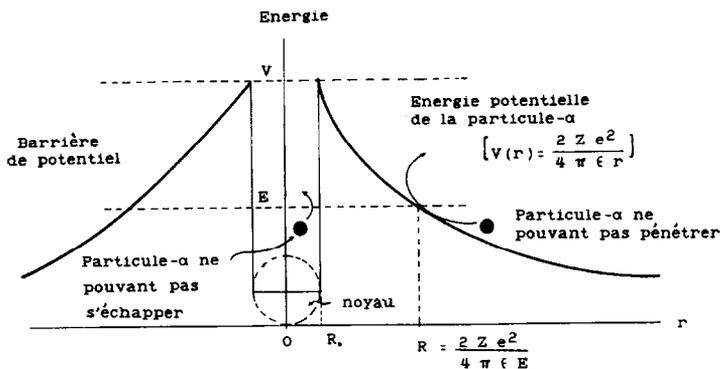


Figure 1

La barrière de potentiel d'un noyau radioactif est de l'ordre de 25 Mev [1], tandis que l'énergie observée des particules α émises n'est que de 4 à 9 Mev, ce qui mène à penser qu'un passage à travers la barrière (tunnelling) prend place.

Considérons un système formé d'un noyau résiduel et d'une particule α qu'il émet. Pour $r > R_0$ seule la répulsion électrostatique domine, pour $r < R_0$ les forces d'attraction nucléaires dominent complètement, l'énergie potentielle V pour les deux régions pourrait être approximée :

$$V = \frac{2(Z-2)e^2}{r} \quad \text{quand } r > R_0 \quad \left. \vphantom{\frac{2(Z-2)e^2}{r}} \right\} (1.1)$$

et

$$V = 0 \quad \text{quand } r < R_0$$

e étant la charge élémentaire.

Une particule $-\alpha$ de masse M animée d'une vitesse v à l'intérieur du noyau de rayon R_0 se heurte contre la barrière en moyenne v / R_0 fois par seconde, la valeur de v peut être estimée à partir de la relation d'incertitude entre le moment et la position : $v = \hbar / M.R_0$, le nombre de collisions avec la barrière par seconde est donc $\hbar / M.R_0^2$. La probabilité de transmission (t) à travers la barrière par collision est donnée par une expression de l'effet tunnel du type :

$$t \approx \exp \left[-2 \int_{R_0}^R \frac{\sqrt{2M(V-E)}}{\hbar^2} dr \right] \quad (1.2)$$

La probabilité λ de désintégration (constante de désintégration) sera :

$$\lambda = \frac{\hbar}{MR_0^2} \exp \left[- \left(\frac{2\sqrt{2M}}{\hbar} \right) \int_{R_0}^R \sqrt{V-E} dr \right] \quad (1.3)$$

En prenant le logarithme des deux côtés nous aurons :

$$\ln \lambda = \ln \frac{\hbar}{MR_0^2} - 2 \frac{\sqrt{2M}}{\hbar} I, \text{ où } I = \int_{R_0}^R \sqrt{V-E} dr \quad (1.4)$$

La condition nécessaire pour calculer R est que l'énergie totale de la particule α soit égale à l'énergie potentielle qui dans ce cas est celle de la répulsion Coulombienne :

$$E = \frac{2(Z-2)e^2}{R} \quad (1.5)$$

De cette équation et de (1.1) nous pouvons écrire $V = ER/r$, et en substituant ce résultat dans (1.4) nous aurons :

$$I = \sqrt{E} \int_{R_0}^R \sqrt{R/r - 1} dr \quad (1.6)$$

En substituant $r = Rx^2$, nous aurons :

$$I = \sqrt{E} \int_{\sqrt{R_0/R}}^{\sqrt{R/R}} \left(\frac{1}{x^2} - 1 \right)^{1/2} \cdot 2Rx dx = 2R \sqrt{E} \int_{\sqrt{R_0/R}}^1 \sqrt{1-x^2} dx \quad (1.7)$$

En effectuant un autre changement de variables $x = \sin \Phi$ et $\sin \Phi_0 = \sqrt{R_0/R}$ nous obtenons :

$$I = 2R \sqrt{E} \int_{\Phi_0}^{\pi/2} \cos^2 \Phi d\Phi \quad (1.8)$$

Cette intégrale est facilement évaluée et donne :

$$I = \frac{R \sqrt{E}}{E} (\pi - 2 \Phi_0 - \sin 2 \Phi_0) \quad (1.9)$$

Mais vu que $R_0 / R \ll 1$, nous pouvons faire les substitutions suivantes :

$$\Phi_0 \approx \sin \Phi_0 \approx \sqrt{R_0/R}, \quad I = R \sqrt{E} (\pi/2 - 2 \sqrt{R_0/R}) \quad (1.10)$$

Éliminons R à l'aide de l'équation (1.5) puis substituons I par sa valeur finale en (1.10) dans (1.4) nous aurons :

$$\ln \lambda = \ln \frac{\hbar}{MR^2} - \frac{2\pi(Z-2)e^2\sqrt{2M}}{\hbar\sqrt{E}} + \frac{8e}{\hbar} \sqrt{RM(Z-2)} \quad (1.11)$$

Sachant que la période de demi-vie $t^{1/2}$ est donnée par $(\ln 2) / \lambda$, nous pouvons donc écrire :

$$\ln t^{1/2} = \ln \ln 2 - \ln \lambda \quad (1.12)$$

De (1.10) et (1.11) nous tirons :

$$\ln t^{1/2} = (A/\sqrt{E}) + B$$

ou

$$A = \frac{2\pi(Z-2)e^2}{\hbar} \sqrt{2M} \quad (1.13)$$

$$B = \ln \ln 2 - \ln \frac{\hbar}{MR_0^2} - \frac{8e}{\hbar} \sqrt{R_0 M (Z-2)}$$

La relation (1.13) établit une connexion entre la période de demi-vie $t^{1/2}$ et l'énergie des particules α émises. C'est une version moderne de la loi purement empirique de Geiger-Nuttall qui était connue avant l'avènement de la mécanique quantique.

2. THÉORIE DE L'ÉMISSION FROIDE

L'émission froide est l'extraction d'électrons libres d'un métal et l'apparition d'une différence de potentiel dite de contact par l'application d'un champ électrique.

Le passage d'un électron libre d'un métal à l'espace extérieur est difficile et demande une certaine quantité d'énergie appelée la fonction de travail W qui représente la barrière de potentiel estimée expérimentalement en se servant de l'équation d'Einstein :

$$W = h\nu - \frac{1}{2} m_e v^2 \quad (2.1)$$

où ν est la fréquence du photon utilisé, m_e la masse et v la vitesse de l'électron éjecté par un effet photoélectrique.

Le gaz d'électron libre à l'intérieur du métal est confiné dans un puit de potentiel dans lequel l'énergie potentielle des électrons est $V \approx 0$, tandis qu'à l'extérieur elle est considérablement plus grande ($V_0 \gg 0$). Pour extraire un électron du métal il faut lui communiquer une énergie au moins égale à W , donnée par :

$$W = V_0 - E_{\max} \quad (2.2)$$

où E_{\max} est l'énergie du plus haut niveau occupé (figure 2).

Si l'énergie cinétique des électrons est augmentée par une élévation de température, une fraction d'électrons peut acquérir une énergie plus élevée que la barrière de potentiel W , il en résulte un courant électrique du métal, cela est connu comme étant l'émission thermoionique d'électrons qui est largement exploitée pour obtenir des rayons électroniques dans les tubes à décharges.

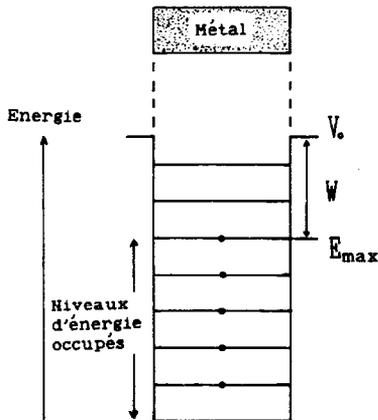


Figure 2

Cependant, un courant peut s'établir à de plus basses températures par l'action d'un champ électrique extérieur d'intensité \mathcal{E} appliqué le long de la surface du métal. Dans ce cas, l'énergie potentielle d'un électron de charge e est donnée en fonction de la distance x de la surface du métal par :

$$V(x) = V_0 - e \mathcal{E} x \quad (2.3)$$

La figure 3 montre la barrière de potentiel formée due au champ électrique extérieur. Les électrons peuvent traverser cette barrière par un effet tunnel. Le coefficient de transmission (probabilité de passage à travers la barrière [équation 1.2]) devient ici :

$$t \approx \exp \left[-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2 m_e} \int_0^{x_1} \sqrt{V(x) - E} dx \right] \quad (2.4)$$

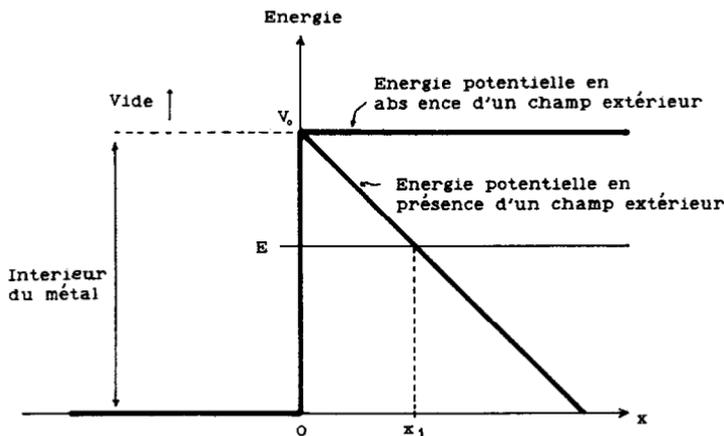


Figure 3

E étant l'énergie de l'électron considéré, l'intervalle de l'intégrale est la largeur de la barrière du point $x = 0$ au point $x = x_1$ obtenu par la condition :

$$V_0 - e \mathcal{E} x_1 = E, \quad x_1 = \frac{V_0 - E}{e \mathcal{E}} \quad (2.5)$$

En substituant (2.3) et (2.5) dans l'intégrale de (2.4) nous aurons :

$$\int_0^{x_1} \sqrt{V(x) - E} dx = \sqrt{e\mathcal{E}} \int_0^{x_1} \sqrt{x_1 - x} dx = \frac{2}{3} x_1^{3/2} \sqrt{e\mathcal{E}} = \frac{2}{3} \frac{(V_0 - E)^{3/2}}{e\mathcal{E}}$$

(2.6)

Ce qui nous mène à l'expression suivante pour t :

$$t = \exp \left[-\frac{4}{3} \sqrt{2} m_e \frac{(V_0 - E)^{3/2}}{\hbar e\mathcal{E}} \right] = \exp \left(-\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right)$$

(2.7)

dans laquelle \mathcal{E}_0 dépend seulement de la fonction de travail $[W = (V_0 - E)]$ qui est caractéristique de chaque métal. Le courant d'émission froide I est proportionnel au coefficient de transmission $(I \sim t)$ d'où :

$$I = I \exp \left(-\frac{\mathcal{E}_0}{\mathcal{E}} \right)$$

(2.8)

En substituant la valeur expérimentale de W dans l'équation (2.8) et en comparant le courant émis pour différentes valeurs de \mathcal{E} , les résultats obtenus sont en parfait accord avec l'observation [2].

Une importante application du phénomène de l'émission froide, en voie de développement actuellement, est le Microscope à balayage à effet tunnel [3] qui promet beaucoup.

3. THÉORIE DE LA CONDUCTIVITÉ

Considérons deux pièces d'un même métal séparées par un isolant mince d'épaisseur δ . Si une différence de potentiel est appliquée au système, la force exercée sur un électron sera $e \cdot \Phi$ (Φ étant le potentiel du champ électrique), les niveaux d'énergie seront alors déplacés relativement l'un à l'autre de $\Delta E = e \Phi = V$, par suite un champ électrique $\mathcal{E} = \Phi / \delta$ au point de contact cause l'établissement d'un courant d'intensité I proportionnelle à V

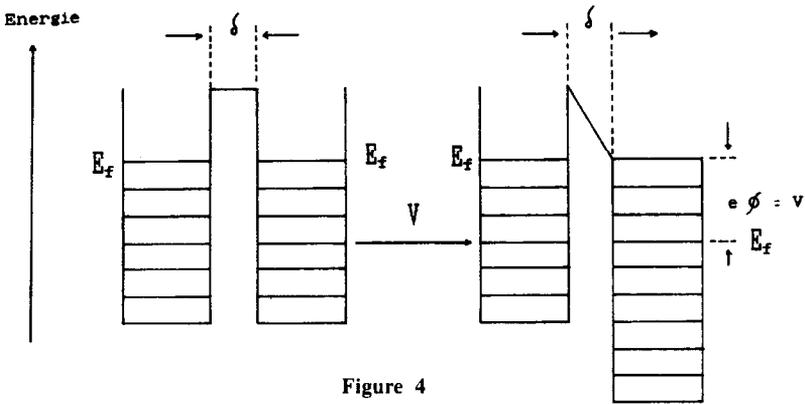


Figure 4

Considérons maintenant le courant résultant de l'effet tunnel seulement. Supposons que l'électron dans un certain niveau d'énergie est muni d'une quasi-impulsion* égale à $\hbar k$, c'est-à-dire $E = E(k)$, le courant par effet tunnel I_t sera donc :

$$I_t(k) = t(k) \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E(k)}{\partial k} \frac{e}{L} = t(k) \frac{ev}{L} \quad (3.1)$$

où $t(k)$ est le coefficient de transmission de la barrière défini par une équation du même type que (1.2), L est l'épaisseur du métal et $v = \partial E / \partial \hbar k$ est la vitesse de l'électron. Dans ce cas le courant total I sera donné par :

$$I = \sum_s \sum_k \frac{et(k)}{L} \frac{\partial E}{\partial \hbar k} = \frac{2e}{2\pi\hbar} \int t(k) \frac{\partial E}{\partial k} dk = \frac{e}{\pi\hbar} \int_{(E_F - e\Phi)}^{E_F} t(E) dE \quad (3.2.)$$

où la somme en fonction du spin s donne le coefficient 2, et celle en fonction de k est remplacée par l'intégrale. Le potentiel Φ est presque constant dans l'intervalle de l'intégrale, de même V , par suite t aussi est une quantité presque constante, donc $t(E) \approx t(E_F) \approx \bar{t}$, et l'intégrale se réduit à :

$$I = \frac{e\bar{t}}{\pi\hbar} \int_{(E_F - e\Phi)}^{E_F} dE = \frac{e\bar{t}}{\pi\hbar} e\Phi = \frac{e\bar{t}}{\pi\hbar} V \quad (3.3)$$

L'impulsion ou moment de l'électron dans un potentiel périodique (comme celui du réseau cristallin) varie périodiquement en fonction de sa position : ce moment est appelé quasimoment ou quasi-impulsion ; si le mouvement de l'électron est complètement libre, le quasimoment est égal au moment habituel.

en définissant $R = \pi \hbar / \bar{e}^2$ nous aurons :

$$I = \frac{V}{R} \quad (3.4)$$

où R est la résistance électrique.

Donc l'effet tunnel dans les métaux nous mène à un courant électrique d'intensité proportionnelle à la différence de potentiel. C'est une déduction théorique de la loi d'Ohm.

4. THÉORIE DE LA SUPRACONDUCTIVITÉ

Cette fois il ne s'agit plus d'électrons individuels qui traversent la barrière mais plutôt de paires d'électrons interagissant ensemble (paires de Cooper), [4], [5].

A proximité du zéro absolu, l'émission d'un phonon par un électron de quasimoment $\vec{\hbar k}$ et de spin $+1/2$ et l'absorption de ce phonon par un électron de quasimoment $-\vec{\hbar k}$ et de spin $-1/2$, cause une attraction entre eux, ce qui mène à la formation de paires d'électrons liées par une énergie dite de couplage $\Delta \approx k_B T_C$ qui est généralement très petite, une élévation de température au-dessus d'une température critique T_C détruit la paire de Cooper en lui communiquant une énergie thermique plus grande que Δ ; c'est pour cela que l'état de supraconductivité ne s'établit que lorsque $T < T_C$. Une paire de Cooper se comporte comme une seule particule de spin zéro ($s = 0$) et de charge $q = 2e$; cette quasiparticule n'obéit plus aux statistiques de Fermi-Dirac mais plutôt à celles de Bose-Einstein, c'est un seul boson et non deux fermions. Les bosons, n'obéissant pas au principe d'exclusion de Pauli, ont tendance à coexister en un même niveau quantique. Il en suit que la fonction d'onde ψ de l'état de supraconductivité peut prendre la forme :

$$\psi = \sqrt{\rho} \exp(i\Phi) \quad (4.1)$$

dans laquelle $\rho = \rho(r, t)$ et $\Phi = \Phi(r, t)$ sont des fonctions réelles de la position et du temps. Une différentiation de cette équation par rapport au temps donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \sqrt{\rho} e^{i\Phi} \left(i \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2\sqrt{\rho}} \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \quad (4.2)$$

Considérons deux supraconducteurs 1 et 2 (d'un même matériau) séparés par un isolant d'épaisseur δ , l'équation de Schrödinger pour les deux fonctions d'ondes ψ_1 et ψ_2 du premier et du second supraconducteur sera :

$$i \hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = V_1 \psi_1 + C \psi_2 \quad (4.3)$$

$$i \hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = V_2 \psi_2 + C \psi_1$$

Nous considérons ici le niveau d'énergie de base, l'énergie cinétique peut être négligée vu la petite valeur des moments. V_1 et V_2 sont les énergies potentielles du premier et du second supraconducteur respectivement, C est une constante caractérisant la transition (le couplage entre les supraconducteurs). Supposons qu'une différence de potentiel V est appliquée au système de sorte que $V_1 - V_2 = qV$. Une solution possible est que $V_1 = qV/2$, et $V_2 = -qV/2$, en substituant ce résultat dans (4.3) nous aurons :

$$i \hbar \frac{\partial \psi_1}{\partial t} = \frac{qV}{2} \psi_1 + C \psi_2 \quad (4.4)$$

$$i \hbar \frac{\partial \psi_2}{\partial t} = -\frac{qV}{2} \psi_2 + C \psi_1$$

Substituons (4.2) dans (4.4), puis divisons les deux côtés par $\hbar \sqrt{\rho} e^{i\Phi}$, en définissant $\alpha = \Phi_2 - \Phi_1$ et en utilisant la formule d'Euler puis égalant les parties réelles et les parties imaginaires des deux équations nous obtenons :

$$\rho'_1 = \frac{2C}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha, \quad \Phi'_1 = -\frac{C}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}} \cos \alpha - \frac{qV}{2\hbar} \quad (4.5)$$

$$\rho'_2 = \frac{2C}{\hbar} \sqrt{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha, \quad \Phi'_2 = -\frac{C}{\hbar} \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} \cos \alpha - \frac{qV}{2\hbar} .$$

De ces équations on tire : $\rho'_1 + \rho'_2 = 0$, c'est-à-dire le taux de perte de charge par rapport au temps d'un supraconducteur est égal au taux de gain de charge de l'autre ; mais puisque toute diminution de charge

est compensée par la source de potentiel (batterie), la charge dans le circuit est en moyenne constante, d'où $\rho_1 \approx \rho_2 = \rho_0$, un courant I s'établit entre les deux supraconducteurs, il est donné par :

$$I = \rho'_1 = -\rho'_2 = \frac{2C}{\hbar} \rho_0 \sin \alpha = I_0 \sin \alpha \quad (4.6)$$

où

$$I_0 \sim \bar{t} \Delta \quad (4.7)$$

\bar{t} est le coefficient moyen de transmission de la barrière, et Δ l'énergie de couplage d'une paire de Cooper.

La seconde paire d'équations (4.5) nous donne :

$$\Phi'_2 - \Phi'_1 = \alpha' = \frac{qV}{\hbar} \quad (4.8)$$

L'intégration de cette équation donne :

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha} d\alpha' = \frac{q}{\hbar} \int_0^t V dt, \quad \alpha = \alpha_0 + \frac{q}{\hbar} \int_0^t V dt \quad (4.9)$$

de (4.9) et (4.6) :

$$I = I_0 \sin \left(\alpha_0 + \frac{q}{\hbar} \int_0^t V dt \right) \quad (4.10)$$

Cette équation décrit l'effet tunnel dans les supraconducteurs (effet de Josephson) [2], [4], [5]. Supposons qu'aucune différence de potentiel n'est appliquée au système ($V = 0$), le courant ne disparaît pas, il persiste ($I \neq 0$). Cela est en contradiction avec les lois habituelles de l'effet tunnel d'électrons individuels (voir équations : 3.3 et 3.4).

Si une différence de potentiel constante V_0 est appliquée, le courant devient :

$$I = I_0 \sin(\alpha_0 + \omega_j t), \quad \omega_j = \frac{qV_0}{\hbar} = \frac{2eV_0}{\hbar} \quad (4.11)$$

ω_j est dite : pulsation de Josephson. Le résultat obtenu en (4.11) est surprenant car une différence de potentiel constante mène à un courant qui oscille avec une fréquence ω_j . Le courant net résultant est nul pour une durée relativement longue de temps.

Si une tension alternative est appliquée :

$$V = V_0 + v \cos(\Omega t) \quad (4.12)$$

de (4.10), (4.12), et (4.11), le courant par effet tunnel sera :

$$I = I_0 \sin \left[\alpha_0 + \frac{q}{\hbar} \int_0^t \left(\frac{\omega_j \hbar}{2e} + v \cos \Omega t \right) dt \right]$$

$$I = I_0 \sin \left(\alpha_0 + \omega_j t + \frac{qV}{\hbar \Omega} \sin \Omega t \right) \quad (4.13)$$

En prenant $V \ll V_0$, (4.13) pourrait être approximée :

$$I \approx I_0 \left[\sin(\alpha_0 + \omega_j t) + \frac{qV}{\hbar \Omega} \cos(\alpha_0 + \omega_j t) \sin \Omega t \right] \quad (4.14)$$

En prenant la moyenne sur une durée relativement longue, le premier terme de (4.14) devient nul (oscillations rapides), tandis que le second terme est important seulement quand $\Omega = \omega_j$, cette condition est celle de résonance.

CONCLUSION

Les cours actuels de mécanique quantique au niveau universitaire sont généralement dépourvus d'exemples illustrant les concepts parfois trop théoriques pour être compris et / ou appréciés par les étudiants. Il est donc nécessaire de clarifier la théorie et de montrer son importance à l'aide d'exemples. J'ai choisi des exemples de différents domaines de la physique pour montrer comment un seul concept (l'effet tunnel) leur fournit une base théorique commune et une vue d'ensemble.

Cette méthode est recommandable pour de nombreux autres concepts théoriques.

REMERCIEMENTS

L'auteur voudrait remercier le Prof. Dr. M. El-Raey et Mr. Magued Matta pour leurs aides.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A.E.S. GREEN - «Nuclear Physics» - McGraw-Hill, E.U. (1955).
- [2] A. SOKOLOV, I. TERNOV, V. ZHUKOVSKII - «Quantum Mechanics» - Mir, URSS (1984).
- [3] G. BINNIG, H. ROHRER - Scientific American - Vol. 253 - N° 2 Août 1985.
- [4] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON, M. SANDS - «The Feynman Lectures on Physics» - Vol. 3 - Caltech, (1965).
- [5] L. SOLYMAR - «Superconductive Tunnelling and Applications» G.B. (1962).