

Modèle d'ionogramme obtenu par sondage ionosphérique

par Luc DETTWILLER
professeur en classe de mathématiques spéciales P'
Lycée Blaise Pascal, 36 avenue Carnot
63037 Clermont-Ferrand Cedex

RÉSUMÉ

On étudie le principe des sondages ionosphériques, permettant l'étude de l'ionosphère grâce à la «réflexion» d'une impulsion d'ondes hertziennes envoyée sur celle-ci. On montre que le mouvement de cette impulsion peut être ramené à celui de la particule fictive servant à étudier les rayons lumineux dans un milieu d'indice variable, à cause de la relation de dispersion particulière d'un plasma sans pertes ; on étudie le mouvement pour un modèle simple de profil d'ionisation, et on montre comment les ionogrammes permettent de déterminer certains des paramètres de ce modèle. Enfin, on remarque que, pour une incidence donnée, les miroirs plans équivalents qui donneraient, soit le même rayon réfléchi, soit le même temps de vol pour l'impulsion, sont identiques toujours pour cette relation de dispersion particulière.

Cet article a été motivé par le problème posé au concours d'admission à l'École Normale Supérieure de Lyon, option M', session 1989.

INTRODUCTION

Après la découverte théorique des ondes électromagnétiques par Maxwell entre 1862 et 1864, puis leur étude expérimentale par Hertz en 1885, se développa la télégraphie sans fil. C'est pour expliquer la liaison, observée en 1901 par Marconi entre la Cornouailles et Terre Neuve malgré la rotondité de la Terre, que Kennely et Heaviside ont pensé en 1902 à l'existence d'une couche conductrice réfléchissant les ondes dans la haute atmosphère. Avec la compréhension de la structure atomique, la théorie électromagnétique de l'ionosphère (ainsi baptisée

en 1932) put se développer ; son étude théorique et expérimentale est capitale pour les liaisons radio.

L'indice de l'ionosphère pour une onde électromagnétique à la pulsation ω est, d'après un résultat bien classique dans l'étude des plasmas :

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \quad \text{si } \omega \gg \frac{1}{\tau}; \quad \omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m}$$

N est la densité d'électrons libres, e et m leur charge et leur masse, τ l'intervalle de temps moyen entre deux collisions successives pour un électron.

La variation de N avec l'altitude z peut être schématiquement représentée par une fonction triangle que donne la figure 1 ; le maximum de N résulte d'un compromis entre la raréfaction de l'air et l'augmentation du flux solaire ultraviolet (responsable de l'ionisation) avec l'altitude.

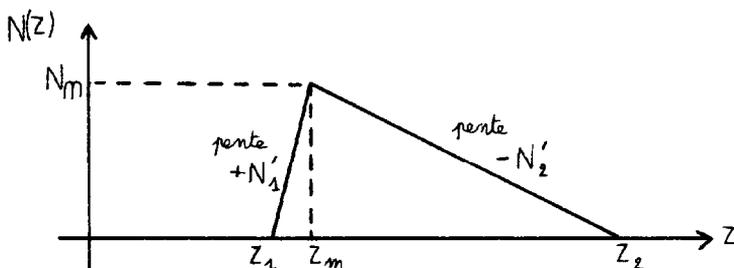


Figure 1 : Profil de $N(z)$ (« densité d'ionisation ») en fonction de l'altitude
 $z_1 \approx 60 \text{ km}$, $z_2 \approx 1000 \text{ km}$, $N_m \approx 10^{12} \text{ m}^{-3}$.

Le principe des sondages ionosphériques (une des plus importantes méthodes d'étude possible pour l'ionosphère) est le suivant : un émetteur au sol, placé en A, envoie une impulsion d'ondes hertziennes de durée courte (de l'ordre de $100 \mu\text{s}$), qu'un récepteur au sol, placé en B, capte au bout d'une durée T après son émission car il s'est réfléchi

sur l'ionosphère. On répète l'expérience pour diverses pulsations, et on trace le graphe de la quantité :

$$h(\omega) = C \frac{T(\omega)}{2} \cos \theta_0$$

appelée « hauteur virtuelle » de la couche ionosphérique sur laquelle s'est réfléchi l'impulsion de pulsation ω ; elle dépend de θ_0 , l'angle entre la direction de propagation de l'impulsion à l'émission et la verticale de l'émetteur.

Notre but est de calculer la hauteur virtuelle $h(\omega)$, pour le modèle de densité $N(z)$ ci-dessus ; nous négligerons les effets de la rotondité de la Terre (voir figure 2).

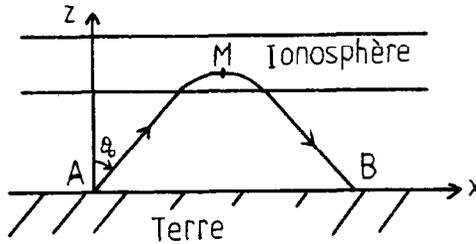


Figure 2 : Principe des sondages ionosphériques.

1. MÉTHODE

En appelant v_g la vitesse de groupe de l'impulsion, qui varie avec la densité électronique, et s l'abscisse curviligne le long du rayon (électromagnétique) (C) allant de A à B, on a :

$$T(\omega) = \int_{A(C)}^B \frac{ds}{v_g}$$

Il faut donc connaître la vitesse de groupe v_g , et la courbe (C) suivie par le rayon de A à B.

2. EXPRESSION DE LA VITESSE DE GROUPE

La vitesse de phase est $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \frac{c}{n}$, k étant la norme du vecteur d'onde.

La vitesse de groupe est $v_g = \frac{d\omega}{dk}$.

Comme $n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$, il vient par $\omega^2 = \frac{c^2}{n^2} k^2$ ou encore $c^2 k^2 = n^2 \omega^2$, $\omega^2 - \omega_p^2 = c^2 k^2$.

Donc, en dérivant, $2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2c^2 k$ et finalement

$$v_g = c^2 \frac{k}{\omega} = c^2 / v_\phi = n c.$$

3. ÉTUDE DU RAYON

Dans un milieu continu inhomogène, le rayon est une courbe régie par l'équation différentielle bien connue

$$\frac{d}{ds} \left(n(\vec{r}) \frac{d\vec{r}}{ds} \right) = \vec{g} \text{grad } n(\vec{r})$$

qui permet d'en déduire son paramétrage normal $\vec{r}(s)$, connaissant les conditions initiales.

Cette résolution peut être facilitée par l'analogie mécanique suivante, montrant que (C) est aussi la trajectoire d'une particule fictive se déplaçant à la vitesse $\vec{v} \cong v_0 n \frac{d\vec{r}}{ds}$ dans le champ d'accélération :

$$\vec{\gamma} \cong \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{ds} \times \frac{ds}{dt} = \frac{d}{ds} \left(v_0 n \frac{d\vec{r}}{ds} \right) \times v_0 n = v_0^2 n \vec{g} \text{grad } n$$

soit

$$\vec{\gamma} \cong \frac{v_0^2}{2} \vec{g} \text{grad } n^2 \quad ;$$

v_0 est une constante (homogène à une vitesse) arbitraire, et t est le temps associé au déplacement de cette particule fictive soit un temps fictif, en

fait un simple paramètre donnant l'équation paramétrique $\vec{r}(t)$ du rayon (C).

L'intérêt ordinaire de cette méthode analogique est de remplacer un problème d'optique par un problème de cinématique, ce qui est plus usuel ou intuitif. Mais pour nous, cet intérêt se voit triplé par deux circonstances heureuses.

D'abord, le champ d'accélération auquel se trouve soumis la particule fictive est très simple : il est uniforme par morceaux, et (C) sera donc constitué d'arcs de paraboles, dont la concavité est orientée vers le bas si $z \in [z_1, z_m]$ et vers le haut si $z \in [z_m, z_2]$. En effet

$$\vec{\gamma} \approx \frac{v_0^2}{2} \text{grad} \left(1 - \frac{N e^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \right) = - \frac{v_0^2 e^2}{2 \epsilon_0 m \omega^2} \text{grad} N.$$

Ensuite, et c'est le plus intéressant, la relation de dispersion utilisée nous donnait $v_g = c n$; il suffit donc de donner à la constante arbitraire la valeur c , pour que le mouvement de la particule fictive soit exactement celui du centre de l'impulsion, et que le paramètre t cesse d'être un temps fictif ! C'est bien sûr le choix que nous adopterons.

Nous ne considérerons que le cas où l'impulsion se réfléchit sur l'ionosphère. D'après l'invariant de Snell-Descartes pour les milieux stratifiés (i-e les milieux où l'indice est constant sur des plans parallèles), ceci se produit quand :

$$1 - \frac{N_m e^2}{\epsilon_0 m \omega^2} \leq \sin^2 \theta_0 \quad \text{soit} \quad \frac{N_m}{\omega^2} \geq \frac{\epsilon_0 m}{e^2} \cos^2 \theta_0$$

et l'impulsion revient en B avec le même angle θ_0 par rapport à la verticale ; ceci est indépendant du profil d'ionisation $N(z)$.

La rayon se situe toujours, dans ce cas, à une altitude z inférieure à z_m . Avec notre modèle, le mouvement du centre de l'impulsion est aussi simple à étudier que celui d'un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme où :

$$\vec{\gamma} \approx - \frac{c^2 e^2 N'_1}{2 \epsilon_0 m \omega^2} \vec{u}_z$$

Soit $t = 0$ la date d'émission de l'impulsion en A. Sa date d'entrée dans l'ionosphère est $t_0 = \frac{z_1}{c \cos \theta_0}$; posons $t' = t - t_0$.

En prenant l'origine des abscisses en A, l'abscisse de l'impulsion à son entrée dans l'ionosphère est $x_0 = z_1 \tan \theta_0$; sa cote est z_1 .

L'équation horaire de son mouvement dans l'ionosphère est :

$$x = x_0 + c \sin \theta_0 t'$$

$$z = z_1 + c \cos \theta_0 t' - \frac{c^2 e^2 N'_1}{4 \epsilon_0 m \omega^2} t'^2$$

L'impulsion passe à son altitude maximale z_M à la date

$$t'_m = \frac{2 \epsilon_0 m}{c e^2 N'_1} \cos \theta_0 \omega^2$$

et

$$z_M = z_1 + \frac{\epsilon_0 m}{e^2 N'_1} \cos^2 \theta_0 \omega^2.$$

On en déduit la durée de vol :

$$T = 2(t_0 + t'_m) = 2 \left(\frac{z_1}{c \cos \theta_0} + \frac{2 \epsilon_0 m}{c e^2 N'_1} \cos \theta_0 \omega^2 \right)$$

4. IONOGRAMME

C'est le graphe de $h(\omega) = \frac{c \cos \theta_0}{2} T$ pour θ_0 donné. Avec notre modèle, on trouve $h(\omega) = z_1 + \frac{2 \epsilon_0 m}{e^2 N'_1} \cos^2 \theta_0 \omega^2$. En notant ω_{pm} la pulsation de plasma pour la densité électronique maximale N_m , il vient - comme $N'_1 = \frac{N_m}{z_m - z_1}$

$$h(\omega) = z_1 + 2(z_m - z_1) \cos^2 \theta_0 \frac{\omega^2}{\omega_{pm}^2}$$

définie seulement pour $\omega \leq \frac{\omega_{pm}}{\cos \theta_0}$

L'ionogramme est donc une parabole d'axe vertical, dont les caractéristiques principales et la dépendance en θ_0 sont indiquées sur la figure 3.

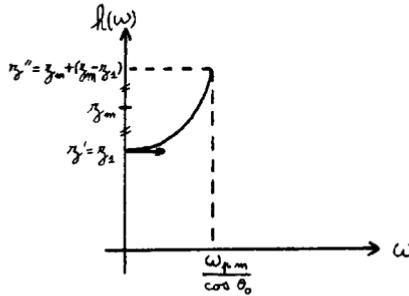


Figure 3 : Ionogramme.

On constate que le domaine des hauteurs virtuelles décrites n'est pas affecté par un changement d'incidence θ_0 ; seul est affecté le domaine de fréquences donnant une réflexion (il tend vers le spectre entier si θ_0 tend vers $\pi/2$, évidemment).

Les hauteurs virtuelles sont toutes supérieures aux hauteurs réelles, puisque :

$$z_M = z_1 + (z_m - z_1) \cos^2 \theta_0 \frac{\omega^2}{\omega_{pm}^2}$$

donc

$$h(\omega) - z_M(\omega) = (z_m - z_1) \cos^2 \theta_0 \frac{\omega^2}{\omega_{pm}^2}$$

et bien sûr, pour $\omega = \frac{\omega_{pm}}{\cos \theta_0}$, $z_M = z_m$ et $h - z_M = z_m - z_1$.

GÉNÉRALISATION

Pour une relation de dispersion $n^2(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ et une densité électronique ne dépendant que de z , le fait que la hauteur virtuelle h

soit supérieure à la hauteur réelle z_M est une propriété indépendante du profil $N(z)$.

En effet, en appelant M le sommet du rayon (C) - voir figure 2 - et θ l'angle entre le rayon et la verticale à une altitude z quelconque, on a :

$$\begin{aligned} \frac{T}{2} &= \int_0^{z_M} \frac{dz}{v_g \cos \theta} \\ &= \int_0^{z_M} \frac{dz}{c n \cos \theta} \\ &\quad \text{à cause de la loi de dispersion} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{z_M} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - n(z)^2 \sin^2 \theta(z)}} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^{z_M} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}} \\ &\quad \text{car } n \text{ ne dépend que de } z \\ &\geq \frac{1}{c} \int_0^{z_M} \frac{dz}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}} \quad \text{car } n^2 \leq 1 \end{aligned}$$

donc

$$\frac{T}{2} \geq \frac{1}{c} \int_0^{z_M} \frac{dz}{\cos \theta_0}$$

ce qui donne

$$h = c \cos \theta_0 \frac{T}{2} \geq \int_0^{z_M} dz$$

d'où finalement

$h \geq z_M$

Mais, par contre, la première propriété est due à notre profil d'indice (ou de densité électronique) particulier, puisque :

$$h \left(\frac{\omega_{pm}}{\cos \theta_0} \right) = \int_0^{z_m} \frac{\cos \theta_0 dz}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_0}}$$

dépend bien de la fonction $n(z)$ et de θ_0 en général.

EXPLOITATION

Si notre modèle est suffisamment valide, on peut déduire de l'ionogramme une estimation correcte de l'altitude z_m où la densité d'ionisation est maximale :

$$z_m = \frac{z' + z''}{2}$$

(voir figure 3). Mais, si $z' = h(0)$ est toujours facile à estimer, il n'en est pas de même de z'' car h varie vite au voisinage de la pulsation limite $\omega_{pm} / \cos \theta_0$.

Notons au passage que $h(0)$ fournit, quel que soit le profil de $N(z)$, l'altitude inférieure z_1 de l'ionosphère ; et de même ω_{pm} fournit la densité électronique maximale $N_m = \frac{\epsilon_0 m}{e^2} \omega_{pm}^2$ quel que soit le profil d'ionisation. On note bien que de tels sondages ionosphériques ne peuvent apporter des informations sur les parties décroissantes de $N(z)$, puisque la réflexion de l'impulsion venant du sol ne peut se produire que «sur les parties croissantes de $N(z)$ ».

Remarque : Il est intéressant de définir aussi une autre hauteur virtuelle h' , celle qui correspond au miroir plan donnant le même rayon réfléchi pour un rayon incident fixé (voir figure 4).

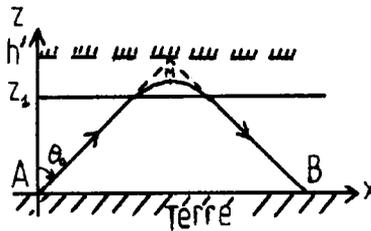


Figure 4 : Hauteur virtuelle pour le rayon émergent.

Son calcul est immédiat :

$$h' = z_1 + 2 \frac{\epsilon_0 m}{e^2 N'_1} \cos^2 \theta_0 \omega^2 = z_1 + c \cos \theta_0 t'_m$$

On a donc $h'(\omega) = h(\omega)$!

Mais cette belle propriété n'est pas liée à notre profil d'ionisation particulier ! En effet l'expression intégrale de h' est donnée par

$h' = (x_M - x_A) \cotan \theta_0 = \int_{A(C)}^M dx \cotan \theta_0$ car (C) est symétrique par rapport à la verticale passant par M, quel que soit le profil d'indice $n(z)$.

Or $\tan \theta = \frac{dx}{dz}$, donc $h' = \int_0^{z_M} \tan \theta dz \cotan \theta_0$.

Mais $\tan \theta = \frac{n \sin \theta}{\sqrt{n^2 - n^2 \sin^2 \theta}} = \frac{\sin \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_0}}$ ce qui donne finalement $h' = \int_0^{z_M} \frac{\cos \theta_0}{\sqrt{n^2(z) - \sin^2 \theta_0}} dz$.

Or, par ailleurs, $h = c \cos \theta_0 \frac{T}{2}$ et on a vu que

$\frac{T}{2} = \frac{1}{c} \int_0^{z_M} \frac{dz}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0}}$ ce qui prouve que $h'(\omega) = h(\omega)$.

Cette égalité $h(\omega) = h'(\omega) \forall \theta_0$ est à rapprocher de l'exemple suivant : un miroir à argenteure postérieure (voir figure 5).

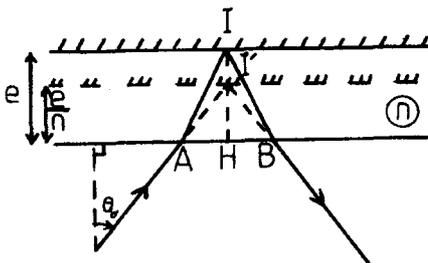


Figure 5 : Comparaison avec un miroir à argenteure postérieure.

Dans les conditions de Gauss, les points I' images d'eux-mêmes sont tels que

$$\overline{HI'} = \frac{\overline{HI}}{n} = \frac{e}{n}$$

donc le miroir plan qui donne le même rayon émergent pour un incident quelconque est à une hauteur $\frac{e}{n}$ au-dessus du dioptré.

Cependant, le chemin optique (A I B) en incidence normale est :

$$(A I B) = 2 n e \neq 2 HI'$$

donc on ne peut se servir de ce miroir plan équivalent pour calculer le déphasage entre A et B. Mais, pour le calcul du temps de vol T entre A et B d'un paquet d'ondes, si la relation de dispersion donnait pour vitesse de groupe $v_g = nc$ (ce qui n'est pas le cas en optique, où $n > 1$) on trouverait :

$$T = 2 \frac{e}{v_g} = 2 \frac{e}{nc} = \frac{2}{c} HI'$$

Cet exemple montre clairement que la belle propriété $h = h'$ est due à la relation particulière $v_g = nc$.

Et il nous rappelle aussi très simplement que la hauteur HI' du miroir équivalent dépend :

- de la pulsation ω , car n en dépend,
- de l'incidence θ_0 (mais dans les conditions de Gauss cela ne se voit pas car HI' varie au second ordre en θ_0).

CONCLUSION

Nous disposons ainsi d'une étude quantitative intéressante pour connaître la propagation d'une impulsion d'ondes électromagnétiques dans l'ionosphère, et dépouiller les ionogrammes donnés par les sondages ionosphériques ; en plus on trouve un beau résultat, à savoir l'identité des miroirs plans équivalents à la couche ionosphérique, pour une incidence donnée, du point de vue du temps de vol de l'impulsion et du point de vue du rayon réfléchi.

Dans la réalité plusieurs effets viennent perturber la simplicité des résultats obtenus. D'abord, les collisions des électrons, puisqu'elles

modifient la relation de dispersion, et provoquent une absorption des ondes radio (surtout vers 70 km d'altitude où la densité d'ionisation est faible mais les collisions importantes) ce qui explique la moins bonne propagation des ondes radio de jour. Ensuite, le champ magnétique terrestre modifie aussi la relation de dispersion, mais fait surtout apparaître une biréfringence (effet Cotton Mouton) et une activité optique (effet Faraday), d'où la possibilité de recevoir deux échos d'une même impulsion par réflexion sur une même couche. Enfin, l'ionosphère se compose de plusieurs couches (couches D vers 60 km, E vers 100 km, F vers 200-300 km qui se dédouble de jour en F_1 et F_2) ; et pour chacune de ces couches le profil d'ionisation n'est pas triangulaire (mais plutôt vaguement parabolique).

Par la suite, d'autres techniques d'étude furent utilisées. En lançant le satellite Alouette en 1962, on put réaliser des sondages des «faces supérieures» des couches, surtout la couche F, et on releva quelques phénomènes surprenants (fortes résonances, anomalies de densité d'ionisation avec la latitude, etc...). On effectua aussi des prises de mesures «instantanées» avec des fusées ou des ballons sonde. Enfin, on étudia l'onde réémise par diffusion Thomson sur l'ionosphère (la section efficace de diffusion Thomson est indépendante de la fréquence) grâce aux antennes du radio-observatoire de Nançay ; l'élargissement spectral de l'onde diffusée permet de connaître la température des électrons dans l'ionosphère.

Toutes ces méthodes fournissent une moisson de résultats, dont l'explication peut devenir complexe et passionnante, et pour lesquels un accord quantitatif précis avec la théorie n'est toujours pas obtenu.