

Fluctuations thermodynamiques du pendule en équilibre thermique avec un thermostat

par Mohamed DELLAGI
Falculté des Sciences de Tunis

1. INTRODUCTION

On prend l'exemple du pendule de torsion. Dans l'expérience de Kappler [1], un miroir (surface de l'ordre du mm^2)* est suspendu à un fil de torsion de constante K . C'est un pendule à un seul degré de liberté, défini par l'angle Θ de rotation, mesuré par la méthode de Poggendorf ; I est son moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation.

Le pendule est plongé dans un gaz raréfié de température T° Kelvin, qui joue le rôle de thermostat. On pose $\beta = 1/kT$ où k est la constante de Boltzmann.

On attend que s'établissent les équilibres mécanique (immobilisation du pendule) et thermique (échange de chaleur nul avec le thermostat). Vainement, car on constate que le pendule oscille perpétuellement, mais de façon chaotique, avec des écarts $\Theta(\beta)$ (se traduisant, pour le spot, par des déplacements pouvant atteindre plusieurs centimètres à la température du laboratoire), et des vitesses angulaires $\Omega(\beta)$ parfaitement mesurables [1].

Toutefois, les diverses moyennes telles que $\langle \Theta(\beta) \rangle$, $\langle \Theta^2(\beta) \rangle$ etc... sont indépendantes de l'époque des mesures : le mouvement est STATIONNAIRE ; tel est le sens que l'on doit donner à l'expression «équilibre mécanique».

Kappler trouve ($T = 287^\circ\text{K}$ et $K = 9.10^{-16}$ S.I) pour $\langle \Theta^2(\beta) \rangle$

* N.d.R. : les faibles dimensions du miroir se justifient par la petitesse de la constante de torsion requise ; le fil de torsion est très fragile et ne saurait supporter une masse importante.

une valeur égale à $4,2 \cdot 10^{-6} \text{ rad}^2$, d'accord avec ce que l'on déduit du théorème de l'équipartition de l'énergie potentielle :

$$\frac{1}{2} K \langle \Theta^2(\beta) \rangle = \frac{1}{2} kT$$

où $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ J/}^\circ\text{K}$; la pression variait de 1 atmosphère à 10^{-4} mm de mercure ; ici $kT = 1/40 \text{ électron-volt}$; on rappelle que $1 \text{ e.V} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Le miroir se comporte comme une grosse molécule participant au mouvement général désordonné des autres molécules : il effectue un mouvement brownien ; $\Theta(\beta)$ et $\Theta'(\beta) \equiv \Omega(\beta)$ sont aléatoires et stationnaires ainsi que l'énergie totale $\mathcal{E}(\beta)$ somme de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\beta) = \frac{1}{2} I \Omega^2(\beta)$ et de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\beta) = \frac{1}{2} K \Theta^2(\beta)$ (pendule harmonique) :

$$\mathcal{E}(\beta) = \frac{1}{2} I \Omega^2(\beta) + \frac{1}{2} K \Theta^2(\beta)$$

Le miroir peut être considéré comme la molécule d'un gaz soumise à 2 actions extérieures : celle du thermostat et celle du fil de torsion. L'exemple analogue est celui de la molécule de gaz parfait en contact avec le même thermostat et soumise à l'action des parois du vase qui le contient.

En des instants $t_1, t_2, t_3, \dots$, répartis aléatoirement sur l'axe Ot des temps, le miroir subit des chocs. Entre 2 chocs consécutifs, $\mathcal{E}(\beta)$ est constant ; sa représentation graphique, en fonction de t , est une succession de paliers, situés à des niveaux aléatoires. On cherche la densité de probabilité (d,d,p) $f(\beta, \epsilon)$ de la hauteur $\mathcal{E}(\beta)$ de ces niveaux, définie par l'identité :

$$f(\beta, \epsilon) d\epsilon \equiv \text{prob} \{ \epsilon < \mathcal{E}(\beta) < \epsilon + d\epsilon \}$$

Or, les mesures donnent pour la valeur moyenne $\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$ de $\mathcal{E}(\beta)$:

$$\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle = 1 / \beta \quad (1)$$

On veut montrer que ce renseignement suffit pour déterminer complètement $f(\beta, \epsilon)$, donc pour prévoir, par exemple la variance $\sigma^2(\beta)$ de $\mathcal{E}(\beta)$ et la confronter à l'expérience, précaution nécessaire puis-

qu'elle constitue une épreuve de cohérence interne pour les raisonnement et un test de solidité pour les conséquences qui en découlent.

2. POINT DE VUE DE LA THERMODYNAMIQUE STATISTIQUE (t.s)

On peut, comme l'a fait Langevin dans un problème similaire, adopter d'abord le point de vue de la mécanique en écrivant l'équation du mouvement de l'équipage mobile [1] :

$$I \frac{d^2\Theta}{dt^2} + r \frac{d\Theta}{dt} + K\Theta = u(t)$$

où r est un coefficient d'amortissement et $u(t)$ un couple, fonction aléatoire du temps t , dû aux chocs des molécules sur le miroir ; $u(t)$ a l'allure d'un bruit blanc, de densité spectrale de puissance (d.s.p) γ_0 indépendante de la pulsation ω . Le pendule est alors considéré comme un filtre linéaire de gain complexe $G(\omega)$, qui à l'entrée $u(t)$ fait correspondre la sortie $\Theta(t)$. La d.s.p. $\gamma_\Theta(\omega)$ de $\Theta(t)$ vaut $\gamma_0 |G(\omega)|^2$. La thermodynamique est mise à contribution par le truchement du théorème de l'équipartition de l'énergie [2].

On peut aussi, comme on le fait ci-dessous, adopter le point de vue de la t.s., en remarquant que $\mathcal{E}(\beta)$ résulte d'un tirage au sort régi par la loi $f(\beta, \epsilon)$. La mise en œuvre du postulat de Gibbs permettra d'en trouver l'expression. Cela donnera l'occasion d'illustrer, chemin faisant, quelques formules d'une thermodynamique retrouvée. Quoiqu'il en soit, cette méthode supporte mieux la confrontation expérimentale que celle de Langevin.

On considère un grand nombre n de montages identiques, placés dans des conditions identiques (même fil de torsion, même température etc...).

On opère d'abord à haute température ($\beta = 0$), le nombre Δn de pendules dont l'énergie est comprise entre ϵ et $\epsilon + \Delta \epsilon$ est proportionnel à $\Delta \epsilon$; si on désigne par $z(\epsilon)$ le coefficient de proportionnalité on a :

$$\Delta n = z(\epsilon) \Delta \epsilon$$

D'ailleurs, $f(0, \epsilon)$ est proportionnel à $z(\epsilon)$. La formule précédente est analogue à la formule $dm = \rho dV$ donnant la masse dm d'une substance de volume dV connaissant sa densité ρ (à proprement parler

sa masse spécifique). Si on utilise le vocabulaire de la microphysique, il est alors naturel d'appeler $Z(\epsilon)$ la densité des états.

A très basse température (β très grand), les pendules sont immobiles (ils sont gelés) et $f(\infty, \epsilon)$ a un maximum aigu en $\epsilon = 0$. Mathématiquement c'est une fonction $\delta(\epsilon)$; seul le niveau $\epsilon = 0$ est occupé.

La forme de $f(\beta, \epsilon)$ quand ϵ est quelconque, se trouve en remarquant que le pendule est un système CANONIQUE : l'occupation des niveaux s'organise donc suivant une exponentielle décroissante : c'est le postulat de Gibbs, qui permet d'écrire l'identité :

$$f(\beta, \epsilon) \equiv Z(\epsilon)e^{-\beta\epsilon}/Z(\beta)$$

où $Z(\beta)$, appelée fonction de partition du pendule, est introduite pour assurer la normalisation de $f(\beta, \epsilon)$. Elle s'écrit donc :

$$Z(\beta) \equiv \int_0^{\infty} Z(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon.$$

$\langle \mathcal{E} \rangle$ vaut, d'une part $1/\beta$, et d'autre part : $\int_0^{\infty} \epsilon f(\beta, \epsilon) d\epsilon$. Par suite :

$$\frac{1}{Z(\beta)} \int_0^{\infty} \epsilon \cdot Z(\epsilon) e^{-\beta\epsilon} d\epsilon = \frac{1}{\beta} \quad (2)$$

C'est cette équation en $z(\epsilon)$ qu'il faut résoudre. On trouve, en désignant par D une constante positive et par $h(\epsilon)$ une fonction égale à 1 pour $\epsilon > 0$, et 0 pour $\epsilon < 0$:

$$Z(\epsilon) \equiv h(\epsilon) D \quad \text{et} \quad f(\beta, \epsilon) \equiv h(\epsilon) \beta e^{-\beta\epsilon}$$

Il en résulte que $\sigma^2(\beta) = 1/\beta^2$. Bien entendu, on vérifie que :

$$\langle \mathcal{E} \rangle \equiv \int_0^{\infty} \epsilon f(\beta, \epsilon) d\epsilon = 1/\beta$$

CONSÉQUENCES

1) Puisque $f(\beta, \epsilon)$ est connue, il est indiqué de travailler avec l'ENTROPIE $S(\beta)$ de Gibbs, définie par l'identité :

$$S(\beta) \equiv -k \int_0^\infty f(\beta, \varepsilon) \ln [f(\beta, \varepsilon)] d\varepsilon \quad (3)$$

qui vaut, si on tient compte de la relation $\beta \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle = 1$:

$$S(\beta) = k - k \ln \beta^*$$

On note que $\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$ a pour origine un bombardement du miroir suivant des directions imprévisibles : c'est de l'énergie mécanique créée par des forces angulairement chaotiques. Elle correspond donc à une chaleur reçue $Q \equiv \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$.

D'ailleurs le pendule n'échange pas de travail avec le milieu extérieur. La capacité calorifique C du pendule vaut :

$$C \equiv d \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle / dT = k.$$

D'où :

$$dS \equiv \frac{CdT}{T} = \frac{dQ}{T} = \frac{d \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle}{T} \quad (4)$$

Comme il convient, la chaleur élémentaire $dQ \equiv d \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$ vaut d'une part CdT (point de vue de la t.s.), et d'autre part TdS (point de vue de la t.c.).

On retrouve enfin la formule connue : $\sigma^2(T) = CkT^2$ reliant $\sigma^2(\beta)$ et C dans une transformation sans échange de travail.

2) On introduit la fonction de Massieu $\psi(\beta)$ de la t.c. définie par l'identité [3] :

$$\psi(\beta) \equiv -\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle / kT + S(\beta) / k \quad (5)$$

En remplaçant $\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$ par sa valeur $1/\beta$, et $S(\beta)$ par son expression (3) on constate d'une part, que :

$$\psi(\beta) = -\ln \beta$$

* N.d.R. : cette formule n'est pas homogène, pas plus que la formule (3), puisqu'on y prend le logarithme d'une grandeur dimensionnée comme l'inverse d'une énergie. La raison est que l'on a omis ici le facteur D , homogène à β . En prenant D , on obtiendrait $S = k - k \ln(\beta/D)$. Au demeurant, cela n'a pas d'importance car la statistique classique est incapable de préciser D : on obtient S à une constante additive près.

et d'autre part : $\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle = - \frac{\partial \psi(\beta)}{\partial \beta}$

$\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$ peut donc être considéré comme étant une coordonnée généralisée conjuguée de la force généralisée β , par rapport au potentiel thermodynamique $\psi(\beta)$.

3) La constante D est sans signification physique. On peut prendre $D = 1$; d'où l'expression de $\psi(\beta)$ selon la t.s. :

$$\psi(\beta) \equiv \ln Z(\beta) \quad (6)$$

Bien entendu les 2 expressions (5) et (6) sont équivalentes.

Même remarque pour l'énergie d'Helmholtz du pendule :
 $F = -kT \psi(\beta)$ qui s'écrit :

$$F = \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle - TS(\beta) \text{ en t.c.} \quad \text{d'après (5)}$$

$$\text{et} \quad F = -kT \ln Z(\beta) \text{ en t.s.} \quad \text{d'après (6)}$$

4) L'équilibre du pendule peut être décrit par l'un des 3 potentiels $\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle$, $\psi(\beta)$ ou $F(\beta)$, aussi bien que par la d.d.p. $f(\beta, \epsilon)$.

1^{er} exemple : $\psi(\beta)$ contient tous les renseignements désirables sur la variable aléatoire (β) . Ainsi :

$$\sigma^2(\beta) = - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} = - \frac{\partial \langle \mathcal{E}(\beta) \rangle}{\partial \beta} = 1/\beta^2$$

De même : $S(\beta) = k + k \psi(\beta)$.

2^{ème} exemple : Si on travaille avec F , on a $S = - \frac{\partial F}{\partial T}$; d'où l'équation de Gibbs-Helmholtz en F :

$$\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle = F - T \frac{\partial F}{\partial T}$$

dont la solution est, ici, comme il convient, $F(T) = -kT \ln kT$.

3. CAS DU GALVANOMÈTRE À AIMANT MOBILE

Le fil porteur du miroir est choisi sans torsion ($K = 0$). On colle au miroir une aiguille aimantée, de moment $\mathbf{M}$, qu'on plonge dans un champ magnétique de composante horizontale $\mathbf{B}$. L'aiguille est mobile seulement dans le plan horizontal ; $\Theta (\beta)$ désigne l'angle que fait l'aiguille avec $\mathbf{B}$. Le circuit du galvanomètre est ouvert et pourtant l'ensemble mobile vibre (d'un mouvement brownien) autour de $\Theta (\beta) = 0$.

L'énergie potentielle vaut maintenant :

$$\mathcal{E}_p(\beta) = BM [1 - \cos \Theta (\beta)] \quad (7)$$

L'origine des potentiels est celle pour laquelle $\Theta (\beta) = 0$.

Le couple de rappel, qui s'exerce sur le pendule, vaut maintenant :

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_p(\beta)}{\partial \Theta (\beta)} = -MB \sin \Theta (\beta).$$

Les vibrations étant de faible amplitude, une bonne approximation de $\mathcal{E}_p(\beta)$ s'écrit en développant $\cos^2 \Theta (\beta)$ jusqu'au terme en $\Theta^2 (\beta)$ inclus :

$$\mathcal{E}_p(\beta) \approx \frac{1}{2} MB \Theta^2(\beta)$$

Le champ magnétique est donc équivalent à un fil de torsion de constante MB : on est ramené au cas précédent.

Remarques

a/ Il y a toujours équipartition de l'énergie cinétique :

$$\langle \mathcal{E}_c (\beta) \rangle = \frac{1}{2} kT \text{ par degré de liberté}$$

On ne peut en dire autant de $\mathcal{E}_p(\beta)$ qu'à condition qu'elle s'exprime par un carré de la variable associée au degré de liberté. Cela n'est pas le cas en toute rigueur pour le galvanomètre à aimant mobile si on pousse le développement de $\cos^2 \Theta (\beta)$ jusqu'au terme en $\Theta^4 (\beta)$ (pendule anharmonique), et à plus forte raison si on travaille avec la formule (7) exacte.

b/ Si le miroir n'a que de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(\beta)$ (fil sans torsion et absence de champ magnétique) la donnée du problème devient :

$\langle \mathcal{E}(\beta) \rangle = kT/2 = 1/2\beta$ à laquelle correspond une d.d.p. $f_c(\beta, \epsilon)$ solution de l'équation (2) où le 2^{ème} membre vaut $1/2\beta$. On trouve à la fin d'un calcul fondé sur l'utilisation de la Transformée de Fourier, une densité des états $z_c(\epsilon) = (h(\epsilon)/\sqrt{\pi\epsilon})D$ et une d.d.p. :

$$f_c(\beta, \epsilon) = \sqrt{\frac{\beta}{\pi\epsilon}} \cdot e^{-\beta\epsilon} h(\epsilon)$$

La d.d.p. de la vitesse angulaire $\Theta'(\beta)$ se calcule, en passant de la variable $\mathcal{E}(\beta)$ à la variable Θ' , au moyen de la formule :

$$\mathcal{E}(\beta) \equiv \mathcal{E}_c(\beta) = \frac{1}{2} I \Theta'^2(\beta)$$

On trouve une gaussienne de moyenne zéro et de variance kT/I .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BALIAN, Cours de Physique Statistique de l'École Polytechnique - Tome I - p. 163.
- [2] A. BLANC-LAPIERRE, Mécanique Statistique Masson. Paris 1987 - p. 205.
- [3] B.U.P. n° 642 - p. 633. Dans cet article l'auteur utilise la fonction $-k\psi(\beta)$ qu'il désigne par ϕ . L'énergie (ou U dans l'article) se présente alors comme une grandeur CERTAINE.