

**Visualisation de trajectoires  
(Analyse théorique et résolution numérique)  
effet LoSurdo-Stark  
Mouvement d'une sonde spatiale au  
voisinage de deux astres**

par Florence VIOT  
Lycée Lavoisier, 75005 Paris

---

## 1. INTRODUCTION

Hormis quelques cas simples et bien connus, la résolution du mouvement d'un point matériel soumis à un potentiel d'interaction donné, peut présenter des difficultés importantes.

On s'intéresse ici à une classe particulière de potentiel, dit à variables séparables, généralement étudiée dans le formalisme de Hamilton de la Mécanique Classique. On montrera, sur des exemples précis, que l'on peut toutefois étudier ce problème dans le cadre de la Mécanique Newtonienne vue en classes préparatoires. Outre le fait de pouvoir donner une solution simple, sa mise en œuvre numérique illustre l'importance d'une réflexion préalable.

## 2. EXEMPLE DE BASE : MOUVEMENT DANS UN CHAMP DE FORCES CENTRALES NEWTONIEN

### 2.1. Principe

Nous chercherons d'abord à illustrer la méthode préconisée sur un exemple simple, dont la résolution classique est bien connue de tous. Étudions donc le mouvement d'un point matériel  $M$  soumis à une interaction de type newtonienne, avec un centre de force  $O$  considéré comme fixe dans un référentiel galiléen.

Le centre de force étant choisi comme origine,  $r$  représentant la

distance OM, le potentiel est  $V(r) = -\frac{k}{r}$ , avec  $k = Gmm'$  pour une interaction gravitationnelle entre deux masses  $m$  et  $m'$  et  $k = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0}$  pour une interaction électrostatique entre deux charges ponctuelles  $q$  et  $q'$ .

La conservation de l'énergie mécanique du point s'écrit, en caractérisant la position de M par ses coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  :

$$E = E_c + V$$

$$= \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - \frac{k}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad (1)$$

où  $E_c$  représente l'énergie cinétique de M.

En généralisant la méthode connue pour les problèmes à un degré de liberté, on obtient les équations du mouvement en écrivant que E est constante, donc en écrivant que ses dérivées partielles par rapport aux coordonnées de position sont nulles. L'expression (2.1) de E conduit alors bien sûr aux équations qui découlent de l'écriture du principe fondamental de la dynamique. Dans ce système de coordonnées, les équations obtenues sont couplées, et non solubles analytiquement.

On se propose alors d'adapter les méthodes classiques utilisées dans le formalisme Hamiltonien (voir appendice), dans la résolution des problèmes à variables séparables, soit :

- Écrire l'énergie (c'est-à-dire l'Hamiltonien).
- Rechercher un système de coordonnées dans lequel cette fonction est à variables séparées, de façon à découpler les équations du mouvement.
- Résoudre alors séparément ces équations pour chaque coordonnée introduite.

Dans notre exemple, il existe un grand nombre de système de coordonnées satisfaisant à cette condition de séparabilité. Nous allons en présenter un.

## 2.2. Séparations des variables

On note  $(\rho, \theta, z)$  les coordonnées cylindriques du point M. On

introduit alors un nouveau système de coordonnées dites **semi-paraboliques** ( $\mu$ ,  $\nu$ ,  $\theta$ ) définies par :

$$\mu = \sqrt{r - z} \quad (2)$$

$$\nu = \sqrt{r + z}$$

où  $r$  représente, rappelons-le, la distance OM.

On en déduit aisément :

$$r = \frac{1}{2} (\mu^2 + \nu^2)$$

$$z = \frac{1}{2} (\mu^2 - \nu^2) \quad (3)$$

$$\rho = \mu\nu$$

Remarquons que les surfaces  $\mu = \text{cste}$  (resp  $\nu = \text{cste}$ ) sont des familles de paraboloides de révolution, d'axe Oz.

L'énergie E peut s'écrire sous la forme :

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2 + \rho^2 \dot{\theta}^2) - \frac{k}{r} \quad (4)$$

En effectuant le changement de variables proposé, on obtient :

$$E = \frac{m}{2} (\mu^2 + \nu^2)(\dot{\mu}^2 + \dot{\nu}^2) + \frac{m}{2} \mu^2 \nu^2 \dot{\theta}^2 - 2 \frac{k}{\mu^2 + \nu^2} \quad (5)$$

Telle quelle, cette fonction engendre des calculs difficiles à conduire. On introduit alors un nouveau temps  $\tau$ , dit temps oscillateur, tel que :  $\frac{d\tau}{dt} = \frac{a}{2r}$  ( $a = \text{cste}$ ), et l'on considère les fonctions  $\mu(\tau)$ ,  $\nu(\tau)$ .

On en déduit, en se restreignant au cas d'un mouvement dans un plan  $\theta = \text{cste}$  :

$$E = \frac{m}{2} a^2 \frac{\left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2}{\mu^2 + v^2} - \frac{2k}{\mu^2 + v^2} \quad (6)$$

Ce que l'on peut réécrire sous la forme :

$$\frac{m}{2} \left[ \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] - \frac{E}{a^2} (\mu^2 + v^2) = \frac{2k}{a^2} \quad (7)$$

soit encore :

$$\frac{m}{2} \left[ \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \right] - E' (\mu^2 + v^2) = C \quad (8)$$

avec  $E' = \frac{E}{a^2}$  et  $C = \text{cste} = \frac{2k}{a^2}$ . Ce qui entraîne :

$$\frac{m}{2} \left(\frac{d\mu}{d\tau}\right)^2 - E' \mu^2 = C_1 \quad (9)$$

$$\frac{m}{2} \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 - E' v^2 = C_2$$

les deux constantes  $C_1$  et  $C_2$  étant reliées par l'équation  $C_1 + C_2 = C$ .

### 2.3. Conclusion

Le système de coordonnées choisi permet bien d'écrire des équations du mouvement découplées. Le mouvement dans un potentiel newtonien est donc analogue à la composition de deux mouvements, dus aux potentiels effectifs :

$$V(\mu) = - E' \mu^2 \quad (10)$$

$$V(v) = - E' v^2$$

D'où les équations d'évolution :

$$\frac{d^2\mu}{d\tau^2} = 2\mu E' \quad (11)$$

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} = 2\nu E'$$

Pour  $E' < 0$ , on obtient donc des oscillations harmoniques pour  $\mu$  et  $\nu$ , de même période. D'où l'existence d'états liés, caractérisés par des trajectoires fermées elliptiques.

### 3. APPLICATIONS : EFFET LoSurdo-Stark

#### 3.1. Étude théorique

On se propose d'étudier la perturbation apportée aux états liés de l'atome d'hydrogène par l'existence d'un champ électrique extérieur faible.

Soit  $\vec{F} = F\vec{u}_z$  ce champ. On introduit alors le potentiel perturbateur  $V = Fz$ .

Par souci de simplification, on se restreint à l'étude du mouvement de l'électron, le noyau étant supposé fixe, dans un plan  $\theta = \text{cste}$ .

On en déduit sans difficulté que l'Eqn (8) devient :

$$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\mu}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\nu}{d\tau} \right)^2 \right] - E' (\mu^2 + \nu^2) + \frac{F'}{2} (\mu^4 - \nu^4) = C \quad (12)$$

avec  $E' = \frac{E}{a^2}$ ,  $F' = \frac{F}{a^2}$ , et  $C = \text{cste} = \frac{2k}{a^2}$ . En procédant de la même façon qu'au paragraphe précédent, on montre que les trajectoires s'obtiennent par composition des mouvements de deux points soumis aux potentiels :

$$V(\mu) = -E'\mu^2 + \frac{F'}{2}\mu^4 \quad (13)$$

$$V(\nu) = -E'\nu^2 - \frac{F'}{2}\nu^4$$

Pour  $E' < 0$ , en champ faible, nous nous trouvons dans un puits de potentiel ; l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable  $\mu$  est donc borné, de même pour la variable  $\nu$  : de façon générale, la trajectoire obtenue est donc comprise entre 2 paraboles. D'où l'existence d'état lié pour l'atome d'hydrogène, l'électron restant confiné au voisinage du proton.

### 3.2. Visualisation des trajectoires. Intérêt

L'algorithme est simple :

- Résoudre les équations différentielles qui régissent l'évolution de  $\mu$  et  $\nu$ , soit :

$$\frac{d^2\mu}{d\tau^2} = 2\mu E - 2F\mu^3 \quad (14)$$

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} = 2\nu E + 2F\nu^3$$

- En déduire à chaque instant les valeurs des coordonnées de la particule dans le plan du mouvement, soit  $(\rho, z)$  par exemple.

Les méthodes d'intégration numérique des équations différentielles sont classiques, et décrites dans de nombreux ouvrages. On utilisera par exemple une méthode de bonne précision, telle celle dite de *Runge-Kutta*, avec un pas d'intégration constant. On peut, bien sûr, envisager d'utiliser cette méthode pour résoudre «directement» l'équation différentielle du mouvement en coordonnées cartésiennes. Mais la divergence de la force coulombienne au voisinage de la position du proton conduit alors à des trajectoires «aberrantes» (mouvement quasi-rectiligne d'énergie différente de l'énergie initiale), si l'électron vient à passer trop près du proton. L'intérêt numérique de la méthode que nous présentons est donc d'**éliminer la singularité** de la force coulombienne au voisinage du centre attractif. Mais elle possède aussi un intérêt théorique évident : permettre d'interpréter l'allure générale des courbes obtenues, semblables à celle tracée sur la figure 1, par exemple.

On notera le mouvement quasi-elliptique pour un intervalle de temps court, et l'adiabaticité de la déformation. Ce peut être une occasion intéressante d'aborder la notion de perturbation.

#### 4. UN AUTRE EXEMPLE D'APPLICATION : MOUVEMENT D'UNE SONDE SPATIALE AU VOISINAGE DE DEUX ASTRES

##### 4.1. Aspect théorique

Soit une sonde S de masse m, mobile dans le champ gravitationnel créé par deux astres  $A_1, A_2$  de masses M et  $\alpha M$ , distants de 2d.

On repère S par ses coordonnées cylindriques  $(\rho, \theta, z)$ , l'axe Oz étant choisi parallèlement à  $S_1S_2$ , et par les distances  $r_1 = A_1S$ ,  $r_2 = A_2S$ . On a alors :

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(z-d)^2 + \rho^2} \\ r_2 &= \sqrt{(z+d)^2 + \rho^2} \end{aligned} \quad (15)$$

En se restreignant au mouvement dans un plan  $\theta = \text{cste}$ , on obtient les expressions du potentiel gravitationnel V et de l'énergie E :

$$V = -\frac{k}{r_1} - \frac{\alpha k}{r_2}$$

$$E = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \dot{z}^2) + V \quad (16)$$

$$= \text{cste}$$

avec  $k = GM^2$

On cherche à séparer la fonction énergie. Pour celà, on introduit dans un premier temps les coordonnées dites **elliptiques** de la particule :

$$\xi = \frac{r_2 + r_1}{2d} \quad (17)$$

$$\eta = \frac{r_2 - r_1}{2d}$$

Les surfaces  $\xi = \text{cste}$  représentent une famille d'ellipsoïdes de

foyers  $A_1, A_2$ . Les surfaces  $\eta = \text{cste}$  représentent une famille d'hyperboloïdes de même foyers.

L'énergie s'écrit alors : (18)

$$E = \frac{md^2}{2} (\xi^2 - \eta^2) \left( \frac{\dot{\xi}^2}{\xi^2 - 1} - \frac{\dot{\eta}^2}{1 - \eta^2} \right) + \frac{k}{d(\xi^2 - \eta^2)} [(\alpha - 1)\eta - (\alpha + 1)\xi]$$

Pour faciliter la résolution de ce problème, on effectue un second changement de variables, en posant :

$$\xi = \cosh \gamma \tag{19}$$

$$\eta = \sin \delta$$

et en introduisant un temps oscillateur  $\tau$ , tel que :

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{1}{\xi^2 - \eta^2} \tag{20}$$

L'équation (18) devient (en suivant la même méthode qu'en 2.3.1.)

$$\frac{m}{2} \left[ \left( \frac{d\gamma}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{d\delta}{d\tau} \right)^2 \right] + \frac{k}{d^3} (\alpha - 1) \sin \delta - \frac{k}{d^3} (\alpha + 1) \cosh \gamma + \frac{E}{d^2} (\sin^2 \delta - \cosh^2 \gamma) = 0 \tag{21}$$

Ce qui est analogue à l'intégrale première de deux points, soumis aux potentiels effectifs :

$$\begin{aligned} V_1(\gamma) &= -K (\alpha + 1) \cosh \gamma - E' \cosh^2 \gamma \\ V_2(\delta) &= K (\alpha - 1) \sin \delta + E' \sin^2 \delta \end{aligned} \tag{22}$$

avec :

$$K = \frac{k}{d^3}, \text{ et } E' = \frac{E}{d^2}$$

On peut obtenir des états liés tels que  $\gamma$  et  $\delta$  restent confinés dans des intervalles donnés, ainsi donc que  $\xi$  et  $\eta$ . Les trajectoires seront de

façon générale, comprises entre deux ellipses et deux hyperboles dans le plan de figure  $(\rho, z)$ .

#### 4.2. Trajectoires observées

Elles se programment sans difficultés majeures à partir des équations d'évolution :

$$\frac{d^2\gamma}{d\tau^2} = -\frac{dV_1}{d\gamma} = -(K(\alpha + 1) + 2E' \cosh \gamma) \sinh \gamma \quad (23)$$

$$\frac{d^2\delta}{d\tau^2} = -\frac{dV_2}{d\delta} = (K(1 - \alpha) - 2E' \sin \delta) \cos \delta$$

On en déduit à chaque instant, pour une position initiale et une vitesse initiale données, les valeurs de  $(\delta, \gamma)$ , puis de  $(\rho, z)$ .

Quelques exemples de trajectoires obtenues sont représentées sur la figure (2) à (8). On peut retrouver les mêmes côtés positifs de la méthode exposée qu'au paragraphe précédent : élimination de la singularité, justification de la forme des enveloppes des trajectoires. On remarquera l'assez grande diversité des courbes observables.

Les commentaires qui s'en suivent peuvent être riches et abondants ; ils sont souvent l'occasion de réflexions intéressantes. On notera en particulier la possibilité d'obtenir des courbes fermées : la trajectoire étant obtenue par composition de deux mouvements périodiques (ceux des oscillateurs  $\delta$  et  $\gamma$ ), il est aisé de voir, par analogie avec les courbes de Lissajous par exemple, que ce cas est obtenu lorsque le rapport de ces périodes est rationnel.

#### 5. CONCLUSION

Dans les exemples présentés ci-dessus, nous avons voulu montrer que l'exploitation numérique d'un problème physique plus ou moins délicat passe souvent par la recherche d'un cadre théorique d'étude approprié, et nécessite donc une réflexion «physique» approfondie. Mais cette recherche ne peut être menée au hasard, et doit souvent elle-même se laisser guider par les premiers résultats numériques obtenus.

L'étude approfondie d'un problème physique trouve ses racines dans l'interaction perpétuelle entre expérimentation et théorie ; de même, il apparaît aujourd'hui que doit s'établir entre l'analyse théorique et la mise en œuvre numérique, un «dialogue» nécessaire permettant à chaque réflexion de progresser.

#### **APPENDICE : La séparation des variables dans le formalisme hamiltonien**

##### **L'équation de Hamilton-Jacobi**

La mécanique lagrangienne (se reporter pour cela à l'ouvrage de référence [2]), par l'intermédiaire du principe de moindre action, permet d'introduire les notions de Lagrangien d'une particule  $L(q, \dot{q}, t)$ , où  $t$  représente le temps,  $q$  l'ensemble des variables de position,  $\dot{q}$  leurs dérivés par rapport à  $t$  ; et d'action  $S(q, t)$ .

Le Lagrangien d'un point matériel soumis à un potentiel  $V$  est, par exemple, égal à la différence de l'énergie cinétique de ce point et de potentiel.

On définit l'Hamiltonien de la particule par  $H(p, q) = \sum_i p_i \dot{q}_i - L$ ,

où  $p$  représente les impulsions généralisées  $p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$ . Dans l'exemple introduit, l'Hamiltonien est égal à la somme de l'énergie cinétique du point matériel et de ce potentiel.

Sachant que :

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial \dot{q}_i} \quad (24)$$

on peut alors montrer que :

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}, t\right) = 0 \quad (25)$$

équation dite de Hamilton-Jacobi. Dans le cas particulier d'un système conservatif, c'est-à-dire où l'Hamiltonien ne dépend pas explicitement du temps, cette équation se ramène à :

$$H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = E \quad (26)$$

où  $E$  est une constante, qui représente bien sûr l'énergie de la particule. Cette équation est à la base d'une méthode générale d'intégration des équations du mouvement. Elle est surtout très efficace, si elle est combinée à une méthode de séparation des variables, qui suppose alors une recherche soigneuse des systèmes de coordonnées utilisables.

### Application aux problèmes à variables séparables

Pour un système conservatif, l'action peut s'écrire sous la forme  $S(q, t) = -Et + S_0(q)$ . On appelle problème à variables séparables, un mouvement tel que :

$$S_0(q) = S_0(q_1, q_2, q_3) = \sum_i S_i(q_i) \quad (27)$$

L'équation de Hamilton-Jacobi fournit alors des équations découplées pour les fonctions  $S_i(q_i)$ . Leur résolution introduit des constantes d'intégration, caractéristiques du mouvement, liées le plus souvent à l'énergie et au moment cinétique (par exemple, dans l'étude du problème coulombien, l'utilisation de coordonnées convenables fait apparaître comme constantes des coordonnées du fameux vecteur de Runge-Lenz). En dérivant l'action  $S$  par rapport à ces constantes, on obtient la solution générale des équations du mouvement.

Tout l'intérêt de cette méthode réside donc dans la recherche d'un jeu de variables qui *séparent* l'Hamiltonien, permettant ainsi une résolution plus simple du problème. Ces méthodes sont bien connues, on pourra par exemple consulter l'ouvrage [3].

### REMERCIEMENTS

Je remercie vivement Mr. Dominique DELANDE, chargé de recherche au CNRS, de m'avoir permis de m'inspirer des idées qu'il a développé dans une petite partie de sa thèse (voir [1]), en ce qui concerne l'étude de l'effet Stark classique.

**RÉFÉRENCES**

- [1] D. DELANDE, Thèse de doctorat d'état ès Sciences Physiques, Université P. et M. Curie (1988).
- [2] LANDAU et LIFCHITZ, Mécanique, Ed. Mir, Moscou (1969).
- [3] SOMMERFELD, Mechanics, Ed. Academic Press, New York (1942).