

Mesure de la conductivité et de la diffusivité thermique d'un solide en travaux pratiques

par Patrice JENFFER, Claudine BÉTRENCOURT,
Jean-Claude DEROCHE et Etienne GUYON

Physique SNV, Bât. 336 - Université Paris-Sud, 91405 Orsay
et Palais de la Découverte - Avenue F. Roosevelt, 75008 Paris

1. INTRODUCTION

L'étude des phénomènes de diffusion n'occupe pas, dans l'enseignement de physique, une place comparable à celle des ondes ou des phénomènes propagatifs. S'il ne fait de doute pour un étudiant que la distance L parcourue dans le second cas dans un temps t varie comme $L = Ct$, où C est la célérité, la relation équivalente dans le cas d'un processus diffusif, de forme beaucoup moins familière $L = \sqrt{Dt}$ (où L est une valeur moyenne comptée à partir d'une origine des temps $t = 0$ et D une diffusivité (en $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$), est moins connue. On peut trouver des explications variées pour cette inégalité (ou injustice !) dans le traitement de ces deux classes de phénomènes d'importance comparable : la première est que la diffusion, que l'on peut approcher à partir d'un concept de marche au hasard, a une origine statistique et non déterministe et s'inscrit ainsi moins directement dans les schémas d'enseignement traditionnel. La seconde raison est que, en pratique, dans les liquides et les gaz, le phénomène de diffusion, du fait de sa faible efficacité aux temps longs (la distance parcourue croît en $\sqrt{t}$ et non en t) est souvent accompagnée de mouvements convectifs (écoulements de convection induits par les variations de densité dues aux gradients de concentration ou de température ; écoulements hydrodynamiques secondaires) qui prennent le dessus et masquent alors la diffusion.

Il n'est pas étonnant que, peu formés aux phénomènes diffusifs, les auteurs d'ouvrages d'enseignement secondaire soient souvent mal à l'aise, voire confondent, la description de phénomènes telle que la conduction et la diffusion de masse ou de chaleur.

Cette note présente une manipulation de travaux pratiques que nous

faisons à Orsay à nos élèves naturalistes de DEUG mais qui pourrait être aisément étendue dans l'enseignement de lycées et collèges. Celle-ci vise à la mesure du coefficient de *conduction thermique* en présence d'un gradient de température constant (régime stationnaire) et du coefficient de *diffusivité thermique* (en régime transitoire). Nous ne rappellerons pas les notions de base et les modèles microscopiques (dans le cadre de la théorie cinétique des gaz) mais renvoyons à l'excellent livre de Reif des cours de Berkeley [1].

2. DESCRIPTION DE L'EXPÉRIENCE

2.1. Éléments de l'expérience

Le dispositif expérimental est présenté sur la figure 1. Il permet d'étudier les propriétés thermiques d'un cylindre vertical solide percé le long de son axe B (de façon à éviter les effets de mouvements de convection de chaleur) soumis à une différence de température $T_1 - T_2$ entre le rayon intérieur r_1 et le rayon extérieur r_2 . La température peut être supposée constante dans la zone intérieure de rayon inférieur à r_1 et dans la zone externe où la température reste fixée à une température T_2 tout au long de l'expérience : ceci est obtenu en plongeant le cylindre dans de l'eau à température régulée par un dispositif simple décrit en annexe. Les dimensions du cylindre sont $r_1 = 3$ mm, $r_2 = 25$ mm et sa hauteur $h = 120$ mm. Les dimensions sont ajustées suivant le choix du matériau de façon à avoir des constantes de temps de l'expérience (dont l'ordre de grandeur est donnée par $\frac{r_2^2}{K}$ où K est la diffusivité thermique du solide) de l'ordre de 5 à 30 minutes. Pour le polyméthylmétacrylate (ou plexiglass) utilisé, cette constante de temps est d'environ $5 \cdot 10^3$ s.

La température extérieure T_2 est mesurée par un thermomètre à mercure et la différence de température $T_1 - T_2$ est mesurée par un thermocouple Cu – constant dont la courbe d'étalonnage est donnée à l'étudiant. Autour de 20° on a sensiblement une différence de potentiel $42 \mu\text{V}$ par degré. Le trou borgne intérieur est rempli d'une huile silicone visant à assurer une température uniforme T_1 indépendante de r (pour $r < r_1$). Dans cette huile plonge une extrémité du thermocouple et une résistance chauffante R qui peut délivrer une puissance électrique P .

Figure 1a : Vue d'ensemble de l'expérience. L'ensemble de régulation de température extérieure Prolabo est décrit dans l'appendice.
La lecture du thermocouple différentiel est faite à l'aide d'un multivoltmètre Sefram.

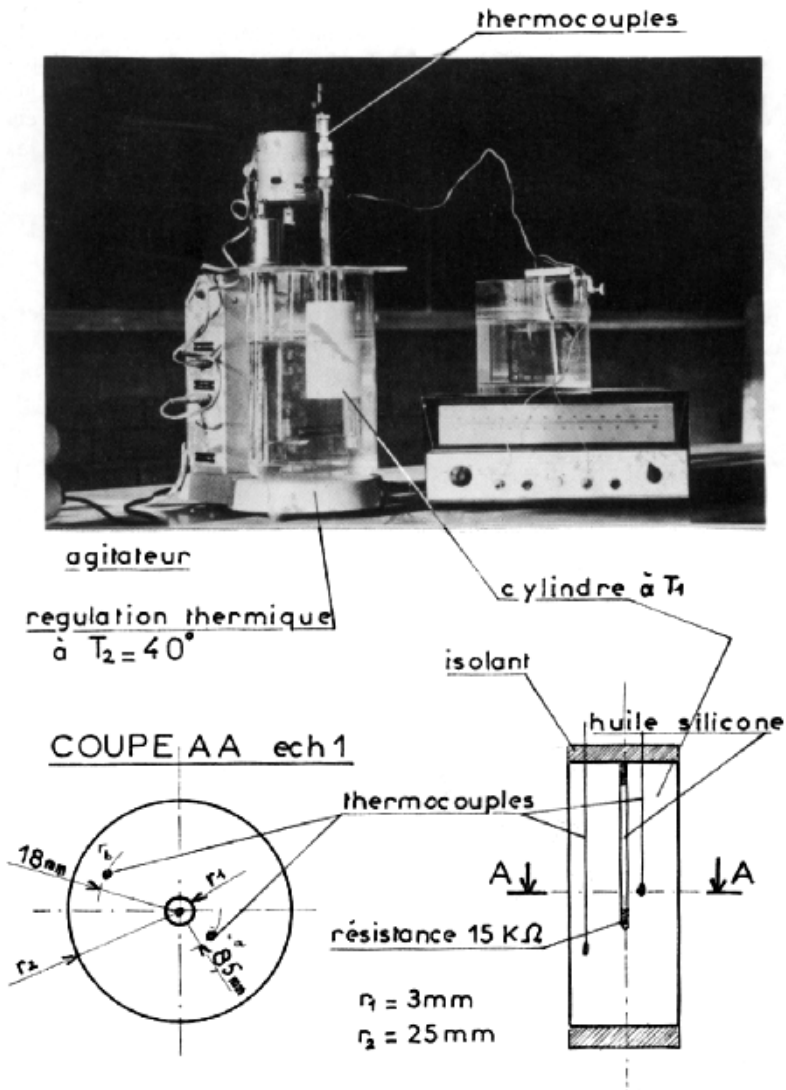


Figure 1b : Vue de dessus et de profil du cylindre d'expérience. Les orifices intermédiaires permettent de suivre la progression de la diffusion de la chaleur et d'estimer le profil de température stationnaire donné par la solution de l'équation (1).

2.2. Principe de l'expérience

Le cylindre est initialement à la température ambiante T_0 du laboratoire.

2.2.1.

Au temps $t = 0$, le cylindre est rapidement plongé dans le récipient thermostaté à une température $T_2 > T_0$. La différence de température $\delta T(t) = T(t) - T_0$ est enregistrée ou notée au cours du temps. On dispose par ailleurs d'un réseau de courbes (figure 2) calculées et portées au cours du temps donnant la solution de l'équation de la chaleur [2]

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = K \Delta \theta \quad (1)$$

pour un problème à symétrie cylindrique (cylindre de rayon r_2) avec les conditions aux limites suivantes :

$$\theta = 0 \text{ quelque soit } r \text{ pour } t < 0 \quad (2a)$$

$$\theta = 1 \text{ pour } r = r_2 \text{ pour } t > 0 \quad (2b)$$

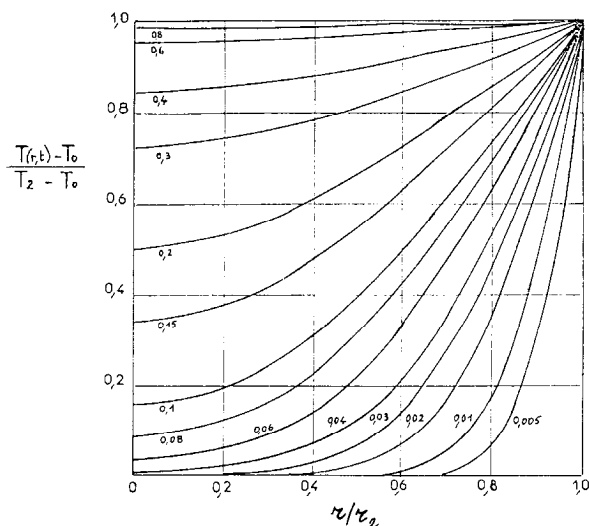


Figure 2 : Réseaux de courbes en coordonnées réduites θ , r/r_2 donnant la solution de l'équation de la chaleur pour un cylindre (1) avec les conditions aux limites (2) à des temps différents mesurés par la variable réduite tK/r_2^2 .

L'objectif est de relier l'information expérimentale et les données de ces courbes portées en figure 3a et 3b par une estimation de la diffusivité thermique K

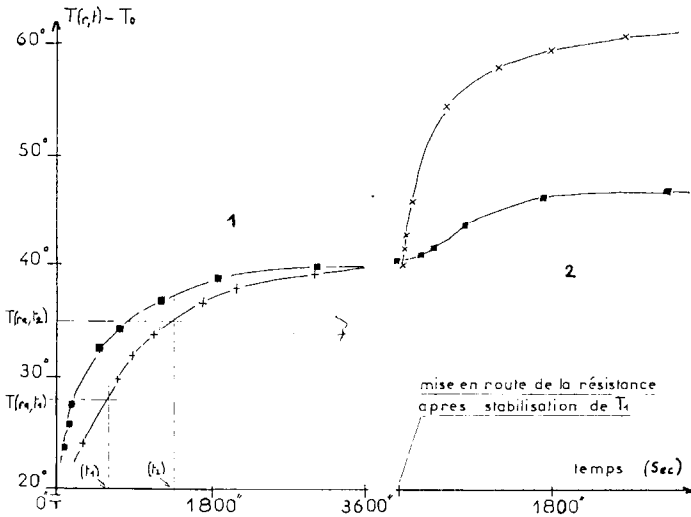


Figure 3 : Évolution de la température par 2 thermocouples situés respectivement à 8.5 mm courbes a (carrés) et 18 mm courbes b (croix) de l'axe du cylindre dans les 2 phases de l'expérience. La mesure des temps t_1 , t_2 donne accès à une estimation de la diffusivité thermique dans le régime instationnaire (1). Le régime stationnaire de distribution de température en fin de phase 2 conduit à la mesure de la conductivité thermique.

2.2.2.

Au bout d'un temps suffisamment long, la température du cylindre intérieur prend la valeur constante $T_1(t) = T_2$. On branche alors la résistance chauffante R qui est placée dans la même cavité centrale où plonge la branche du thermocouple qui mesure la valeur $T_1(t)$. On enregistre de nouveau à partir de la nouvelle origine de temps, la variation de température positive :

$$-\delta T(t) = T_1(t) - T_2$$

Le régime transitoire dépend de façon cruciale de la position du thermocouple intérieur par rapport à la résistance chauffante et présente peu d'intérêt. On s'intéresse alors essentiellement au régime stationnaire pour lequel la différence de température $-\delta T(t)$ tend vers une

limite fixe $-\delta T_1$. Le rapport entre la puissance dissipée dans la résistance, P , et la différence de température $-\delta T_1$ conduit à la valeur de la conductivité thermique k .

2.2.3.

De façon annexe on a placé quelques thermocouples à des distances variables de l'axe afin d'évaluer qualitativement la progression du front de diffusion de la chaleur ainsi que le montrent les 2 ensembles de courbes de la figure 2.

3. INTERPRÉTATION ET RÉSULTATS

3.1. Théorie

Le cylindre solide est assez long pour que l'on puisse considérer le flux de chaleur comme radial. L'erreur est de l'ordre du rapport entre la hauteur résiduelle non percée du trou intérieur sur la hauteur totale, si on a pris soin de faire reposer le cylindre sur le fond du thermostat pour limiter les échanges de chaleur par le fond (on peut aussi recouvrir les extrémités du cylindre d'une feuille de polyéthylène expansé).

3.1.1.

Il n'y a pas de solution analytique simple du régime transitoire, mais la solution numérique de l'équation de la chaleur pour un cylindre plein est bien connue [2]. Si le rayon r_1 est assez petit, on peut considérer que la valeur de la température $T_1(t)$ est celle au centre d'un cylindre plein.

L'utilisation de données exprimées en coordonnées réduites et d'abaques est pour les élèves un exercice de formation très important : comment passer des données du problème réel à celui du problème «réduit» où les échelles d'abscisses et d'ordonnées sont données entre 0 et 1. C'est peut être aussi le moment où on peut faire comprendre que cette abaque pourrait conduire à la solution d'autres problèmes justifiables de la même équation aux dérivées partielles, tel que celui de la mise en rotation d'un liquide contenu dans un récipient cylindrique profond et qu'on lance à partir du repos au temps $t = 0$. Dans ce cas, l'équation de Stokes remplace l'équation de Fourier, la viscosité cinématique remplace la diffusivité thermique et la vitesse axiale la différence de température $\delta T(t)$ [3].

3.1.2.

L'équation de la chaleur en régime stationnaire ($\partial T/\partial t = 0$) admet au contraire une solution simple qui a la même forme que, par exemple, celle de la capacité d'un diélectrique contenu entre deux conducteurs coaxiaux. Rappelons en la démonstration.

Le flux de chaleur est radial et la densité de ce flux est proportionnelle au gradient de température local (loi de Fourier) :

$$j_q = -k \frac{dT}{dr}(r) \quad (3)$$

Pour un cercle de rayon r , le flux de chaleur total :

$$J_q = -k 2\pi r L \frac{dT}{dr}(r) \quad (4)$$

est indépendant du rayon r en régime stationnaire et est égal à la puissance P fournie par la résistance chauffante. En intégrant l'équation différentielle (4) on obtient :

$$T(r) = -\frac{P}{2\pi L k} \text{Log } r + \text{cst}$$

où en tenant compte de la condition aux limites $T(r = R_2) = T_2$ et en prenant la valeur de la solution pour $r = r_1$:

$$T(r_1, t \rightarrow \infty) - T_2 = -\delta T_c = \frac{P}{2\pi L k} \text{Log } \frac{R_2}{R_1} \quad (5)$$

3.2. Analyse des résultats

Les courbes expérimentales pour un cylindre de rayon $r_2 = 25$ mm en polyméthylmétacrylate (ou plexiglass) sont données sur les courbes figures 3a et b où on distingue deux zones distinctes correspondant aux régimes suivants :

- régime 1 : plongée du cylindre dans le bain thermostaté
- régime 2 : mise en route de la résistance chauffante de 14 k Ω avec une tension de 220 Volts et $I \sim 15$ mA soit $P \sim 3,3$ watts.

3.2.1.

La diffusivité thermique peut être estimée sur les différentes courbes. Prenons par exemple la courbe figure 3a pour un temps t_1 tel que la température à une distance $r_a = 8,5$ mm du centre du cylindre creux soit :

$$T_2 - T(r_a, t_1) = 1/2 (T_2 - T_0) \quad (5)$$

avec T_2 température du bain thermostaté = 40°C ; T_0 température du laboratoire (étalonnage du thermocouple = 22°C).

A l'instant t_1 , on mesure = 28°C ce qui nous donne un temps de 600 s correspondant sur l'abaque à un temps réduit de $t^* = 0,125$ en tenant compte de :

$$r_a/r_2 = \frac{8,5}{25} = 0,34 \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T(r, t_1) - T_0}{T_2 - T_0} = 0,333$$

d'où :

$$t^* = \frac{Dt}{a^2} \sim 0,125$$

et une valeur de :

$$D = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

Choisissons une autre température $T(r_a, t_2) = 35^\circ$ ou $T^* = 0,72$. On a alors $t_2 = 1345$ s ce qui correspond à un temps réduit de 0,28 et nous donne une valeur identique de $D = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

On obtient un même résultat très semblable avec les résultats de la courbe figure 3b.

3.2.2.

La puissance dissipée dans l'expérience était de $P = 3,3$ watts. En utilisant la formule (4), on trouve une valeur $k = 0,228 \text{ J/(m s } ^\circ\text{C)}$.

Si on utilise les valeurs données dans les tables du fournisseur [4] pour la masse volumique $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ et la chaleur spécifique $C_p = 0,35 \cdot 10^{-3} \text{ cal/kg } ^\circ\text{C}$ (ou, en MKS, $1463 \text{ J/kg } ^\circ\text{C}$), on trouve une valeur de diffusivité thermique

$$K = \frac{k}{\rho C_p} = 1,3 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$$

qui est en bon accord la valeur donnée directement en 3.2.1.

En résumé, l'expérience permet de mesurer à la fois la conductivité (régime stationnaire) et la diffusivité (régime instationnaire) thermique. Elle conduit aussi à la comparaison avec une abaque pour laquelle l'utilisation de variables réduites qu'il convient de rattacher à leur signification physique est nécessaire.

APPENDICE

Régulation thermique du thermostat :

Nous utilisons des bains thermostatique PROLABO (réf. 03 720 020) d'usage courant à cuve cylindre en verre de 4 litres de volume d'eau avec une résistance chauffante (puissance 220 W), un thermocontact qui nous permet d'obtenir une précision de chauffage de l'ordre de $+ 0,05^{\circ}\text{C}$, un moteur 220 V, 50 Hz avec agitation pour homogénéiser le bain.

RÉFÉRENCES

- [1] Physique Statistique (1964) - F. Reif - Cours de Berkeley, volume 5 - chapitre 8 - librairie Armand Colin.
- [2] Conduction of heat in Solids (1986) - H. S. Carslaw & J. C. Jaeger Oxford Press (New York).
- [3] Hydrodynamique Physique (1990) - E. Guyon, J. P. Hulin & L. Petit - chapitre 2 - Interéditions - CNRS.

La correspondance entre le problème thermique et hydrodynamique est rigoureuse pour un cylindre infiniment long. Par suite de la présence du fond qui impose une relation en bloc du liquide dès l'instant initial, apparaissent des écoulements secondaires - ceux mentionnés dans l'introduction - qui transportent la quantité de mouvement de façon convective et non plus diffusive. Ce sont eux qui joueront le rôle dominant pour assurer la mise rotation en bloc des régions centrales du liquide dans le cylindre au temps long et non la diffusion de la quantité de mouvement. Un exemple spectaculaire de ces écoulements secondaires est le rassemblement des feuilles de thé au centre d'une tasse

lorsqu'on fait tourner le liquide, problème discuté par A. Einstein (die Naturwissenschaften 14 (1962 cité dans Einstein, le livre du Centenaire - édit. Hier et demain (1979)).

- [4] Vacour, 15 rue Président Krüger - 92400 Courbevoie - France
- masse volumique $\rho = 1,2 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$
 - conductivité thermique k entre 0,1 et 0,35 J/(m s °C)
 - chaleur spécifique $C_p = 1463 \text{ J/(kg °C)}$