

Corrigé du concours général

par H. GIÉ et les membres du Jury

I PROLOGUE

1)

a. La puissance est consommée uniquement par effet Joule dans la résistance. La puissance moyenne a ainsi pour expression :

$$P = R I^2 = R \frac{U^2}{Z^2}$$

avec pour valeur de l'impédance Z :

$$Z = \left[\left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2 + R^2 \right]^{1/2}$$

P passe par un maximum P_0 pour $\omega = \omega_0$ telle que $LC\omega_0^2 = 1$ (résonance) soit :

$$P_0 = \frac{U^2}{R}$$

puisque dans ces conditions $Z = R$.

b. Les valeurs ω_1 et ω_2 qui définissent la bande passante à -3db sont telles que :

$$P = \frac{P_0}{2}$$

soit $Z = R\sqrt{2}$, d'où l'équation :

$$L\omega - \frac{1}{C\omega} = \pm R$$

conduisant à :

$$\omega_2 - \omega_1 = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad Q = \frac{L\omega_0}{R}$$

On note que le facteur de qualité Q est d'autant plus grand que R est faible c'est-à-dire que la résonance est plus aigüe.

$$c. \text{ On a : } \langle W \rangle = \frac{1}{2} L \langle i^2 \rangle + \frac{1}{2} C \langle u^2 \rangle = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2} CU^2$$

$$\text{avec } U = I / C\omega_0,$$

soit pour $\omega = \omega_0$:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} I^2 \left(L + \frac{1}{C\omega_0^2} \right) = LI^2$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\langle W \rangle}{P_0} = \frac{LI^2}{RI^2} = \frac{L}{R}$$

$$\text{d'où } \boxed{Q = \omega_0 \frac{\langle W \rangle}{P_0}} \longleftrightarrow \boxed{P_0 = \Delta\omega \langle W \rangle} \quad (1)$$

La relation (1) sert de définition énergétique au facteur de qualité.

d. La définition classique qui définit l'intervalle ω_1, ω_2 par la condition $I > I_R / \sqrt{2}$ où $I_R = \frac{U}{R}$ est l'intensité efficace à la résonance est en fait identique à la définition énergétique utilisée en a).

2)

a. La construction de Fresnel revient à ajouter N vecteurs de même module a et faisant entre eux, pour 2 vecteurs successifs, un même angle φ .

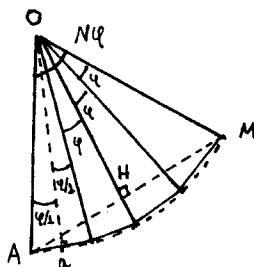


Figure 1

On a :
$$A(\varphi) = AM = 2AH = 2OA \left| \sin \frac{n\varphi}{2} \right|$$

et :
$$OA = \frac{a}{2} \frac{1}{\sin \varphi/2}$$

d'où l'expression demandée :

$$A(\varphi) = a \left| \frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2} \right| \quad (2)$$

b. La fonction $A(\varphi)$ possède une périodicité égale à 2π . Les maximums principaux sont tels que $\varphi = 2\pi p$ (p entier positif, négatif ou nul).

Les minimums sont tels que :

$$N\varphi/2 = k\pi$$

soit :

$$\varphi = \frac{2k\pi}{N}$$

avec $1 \leq k \leq N-1$ pour la 1^{ère} période. La fonction $A(\varphi)$ étant alors nulle.

D'autres maximums, dits secondaires, encadrent les minimums. La figure 2 donne l'allure de la fonction $A(\varphi)$ sur une période.

Si $N \rightarrow \infty$, les maximums secondaires s'aplatissent et la courbe est «lissée» entre les maximums principaux qui subsistent seuls pour N infini

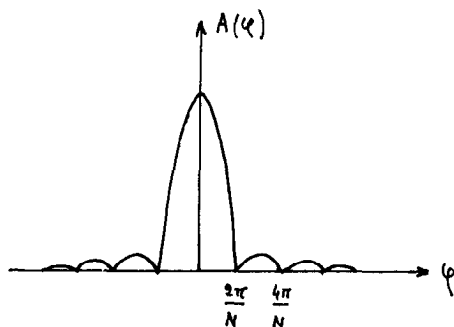


Figure 2

3)

a. On a d'après les définitions :

$$X_0 = X - rX'$$

et

$$X' = gX$$

d'où

$$g' = \frac{X'}{X_0} = \frac{g}{1 - rg} \quad (3)$$

b. Lorsque le produit rg s'approche de 1, g' tend à devenir infini. En fait intervient la non linéarité de l'amplificateur, X' tendant vers une valeur limite X'_s quand X augmente indéfiniment (saturation, figure 3) de sorte que $g \rightarrow 0$. Quand X_0 (ou X) augmente g décroît ainsi de g_0 à 0, la courbe représentant X' en fonction de X tendant vers une asymptote d'ordonnée X'_s . Le point M de fonctionnement correspond à l'intersection de cette courbe avec la droite d'équation :

$$X' = \frac{X - X_0}{r}$$

de pente $\frac{1}{r} > 1$ (figure 3). X' reste fini et la condition $rg = 1$ est, en fait, impossible à satisfaire car, comme le montre la figure 3b, on a nécessairement $g < 1/r$.

On note ainsi que si $\frac{1}{r} < g_0$, soit $rg_0 > 1$, le point de fonctionnement M existe, même si $X_0 = 0$. Le système peut alors auto osciller. L'énergie est évidemment fournie par l'alimentation de l'amplificateur.

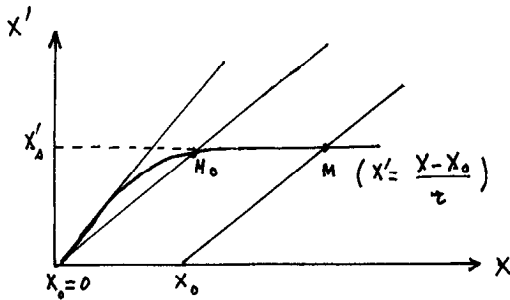


Figure 3

II. RÉSEAUX OPTIQUES

1)

a. Soit δ la différence de marche entre les rayons diffractés par deux fentes successives dans la même direction d'angle θ :

$$\delta = h \sin \theta$$

La condition d'interférence constructive est :

$$\delta = h \sin \theta_p = p\lambda \quad (p : \text{entier})$$

avec :

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

d'où :

$$h \sin \theta_p = p \frac{c}{f} \quad (4)$$

On observera ces interférences dans le plan focal image d'une lentille.

b. On a :

$$h \sin \theta = p \frac{c}{f_p} \Rightarrow f_p = \frac{pc}{h \sin \theta} \quad (5)$$

On doit limiter f_p au domaine $[4.10^{14} \text{ Hz}, 7.5.10^{14} \text{ Hz}]$.

La seule valeur possible est $p = 1 \Rightarrow f_p = 4,386 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$.

c. Pour θ donné, on est amené à ajouter N signaux de même amplitude a et présentant des déphasages successifs $\varphi, 2\varphi \dots (N-1)\varphi$ avec

$\varphi = 2\pi \frac{\delta}{\lambda} = 2\pi f \frac{h}{c} \sin \theta$. Le résultat obtenu en I.2.a donne :

$$A(f) = a \left| \frac{\sin(N\pi f h \sin \theta / c)}{\sin(\pi f h \sin \theta / c)} \right| \quad (6)$$

Les maximums principaux sont tels que :

$$\varphi = 2\pi p$$

soit :

$$f_p = \frac{pc}{h \sin \theta}$$

qui exprime la condition (5) d'interférences constructives.

d. On développe (6) au voisinage de $f = f_p$ d'où :

$$T(f) = \frac{A(f)}{A(f_p)} = \left| \frac{\sin N u}{N \sin u} \right| \approx \left| \frac{\sin N u}{N u} \right| \quad (7)$$

avec :
$$u = \pi p \frac{\delta f}{f_p}$$

où l'on a utilisé l'approximation $\sin u \approx u$.

La figure 4 donne l'allure de la fonction $T(f)$ au voisinage de $f = f_p$. Cette fonction indique comment le réseau transmet la lumière dans la direction θ au voisinage de la fréquence f_p .

$T(f)$ s'annule une première fois de part et d'autre du maximum principal pour :

$$|u| = \frac{\pi}{N}$$

soit :
$$\frac{\pi p B}{f_p} = \frac{\pi}{N} \Rightarrow B = \frac{f_p}{pN} \quad (8)$$

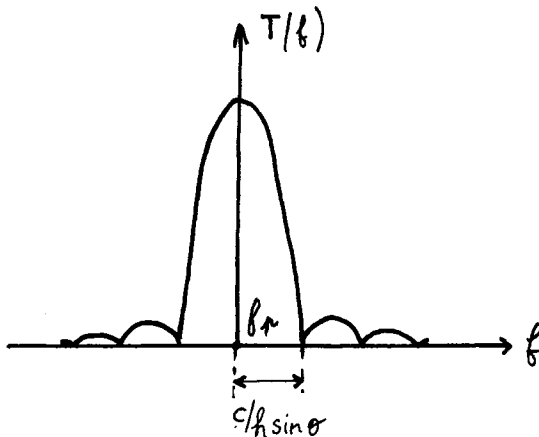


Figure 4

e. On voit que le réseau, dans la direction θ , ne laisse pratiquement passer que la lumière dans la bande de fréquences autour de f_p définie par :

$$f_p - B < f < f_p + B$$

Il agit comme un filtre fréquentiel.

La sélectivité de ce filtre est définie en comparant B et f_p soit par le rapport significatif :

$$Q_p = \frac{f_p}{B} = pN \quad (9)$$

Le réseau est d'autant plus sélectif que Q_p est grand donc que le nombre total N de fentes est grand. On retrouve avec (9) la définition usuelle du facteur de qualité appelée en I.1.b.

f. On a :

$$\tau = \frac{1}{B} = \frac{pN}{f_p} = \frac{N \sin \theta}{c}$$

$N \sin \theta$ est la différence de marche entre les rayons extrêmes arrivant sur le réseau et diffractés dans la direction θ .

Il en résulte que τ désigne le décalage temporel correspondant à cette différence de marche.

Si l'on veut observer des interférences non brouillées il faut que ce temps τ reste nettement inférieur à 10^{-8} s soit $B > 10^8$ Hz.

Pour $f_p = 4,386 \cdot 10^{14}$ Hz le facteur de qualité maximal est :

$$Q_{p \max} = \frac{f_p}{B} \approx 4 \cdot 10^6 \quad (10)$$

Pour les réseaux du type considéré ici on est loin d'atteindre cette limite. Ainsi pour un réseau de longueur 5 cm possédant 500 fentes par mm : $Q = N = 25\,000$, pour $p = 1$.

2)

a. Chaque échelon correspond à la différence de marche $2e$. Pour l'ensemble du réseau :

$$\tau = \frac{2Ne}{c}$$

b. Généralisant le résultat II.1.e.f :

$$B = \frac{1}{\tau}$$

et
$$Q = \frac{f}{B} = f\tau = \frac{2Nef}{c} = \frac{2Ne}{\lambda}$$

Application numérique :

$$Q = \frac{2 \times 200 \times 2 \cdot 10^{-3}}{6 \cdot 10^{-7}} \approx 10^6$$

On augmente ainsi considérablement le facteur de qualité (ou pouvoir de résolution) la valeur obtenue ici approchant la valeur limite (10^8) liée à la nature aléatoire de l'émission des trains d'ondes.

3)

L'étude précédente montre comment selon le type de réseau augmenter la sélectivité.

– Soit en augmentant N c'est-à-dire, pour un réseau de largeur donnée, en augmentant le nombre de traits par unité de longueur pour un réseau classique.

– Soit en donnant à N une valeur beaucoup plus faible (réseau échelon) mais en augmentant alors considérablement la différence de marche entre rayons successifs (facteur $\frac{2e}{\lambda}$) introduit par chaque échelon.

En résumé, il faut accroître la différence de marche entre rayons extrêmes mais aussi faire en sorte de disposer de suffisamment de lumière.

Les réseaux sont l'outil privilégié de la spectrographie.

La physique atomique, l'astrophysique ont besoin de réseaux très sélectifs.

III PRINCIPE D'UN FILTRE À ONDE ACCOUSTIQUE DE SURFACE

1)

On a $\Lambda = \frac{V}{f} = \frac{V}{c} \lambda$. La longueur d'onde Λ de l'onde acoustique ultra sonore est beaucoup plus petite que celle λ des ondes électriques sur les lignes.

Cela permet la réalisation mécanique de filtres interférentiels (idée de base du dispositif étudié ici).

2)

a. La période spatiale du système d'électrodes émettrices est $2L$ ce qui correspond, à l'arrivée sur les électrodes réceptrices à des déphasages

$$\Phi, 2\Phi, (N-1)\Phi, \text{ avec : } \Phi = 2\pi \frac{2L}{\Lambda} = \frac{4\pi Lf}{V}$$

b. On retrouve ici encore le calcul I.2.a :

$$A = a \left| \frac{\sin N \frac{\Phi}{2}}{\sin \frac{\Phi}{2}} \right|$$

$$\text{soit : } A(f) = a \left| \frac{\sin \frac{2\pi N L f}{V}}{\sin \frac{2\pi L f}{V}} \right| \quad (11)$$

de même forme que (6) comme fonction de f .

Les fréquences de résonance correspondent à : $\Phi/2 = p\pi$ soit :

$$f_p = p \frac{V}{2L} \quad \text{a)}$$

$$\text{ou encore } L = p \frac{\Lambda}{2} \quad \text{b)} \quad (12)$$

Cette dernière relation est classique lorsqu'on étudie la résonance des cordes vibrantes par exemple.

Application numérique :

$$f_1 = \frac{3 \cdot 10^3}{6 \cdot 10^{-5}} = 5 \cdot 10^7 \text{ Hz.}$$

3)

On définira la réponse fréquentielle par :

$$T(f) = \frac{A(f)}{A(f_p)} \approx \frac{\sin Nu}{Nu} \quad (13)$$

avec ici : $u = \pi p \frac{\delta f}{f_p}$ (dans l'approximation $\sin u \approx u$)

On retrouve une parfaite analogie avec le réseau, le dispositif se comportant comme un filtre fréquentiel caractérisé par $T(f)$ (figure 4).

La bande passante B est donnée par (8), soit :

$$B = \frac{f_p}{pN} = \frac{V}{2NL} = \frac{f_1}{N}$$

si f_1 est la fréquence de résonance la plus basse.

On a : $Q_p = f_p/B = pN$

On augmente la sélectivité en augmentant N c'est-à-dire le nombre d'électrodes.

Application numérique :

$$B = \frac{5 \cdot 10^7}{2 \cdot 10^2} = 2,5 \cdot 10^5 \text{ Hz}$$

$$Q_1 = N = 200$$

4)

Chaque paire d'électrodes émet un pulse se propageant à la vitesse V . Les arrivées sur le récepteur de ces signaux vont être décalées, de sorte que :

$$\tau = t_n - t_1 = (N-1) \frac{2L}{V} \approx 2N \frac{L}{V}$$

La fréquence f du signal est l'inverse du temps que met le signal pour parcourir la distance interélectrode L soit :

$$f = \frac{V}{2L} = f_1$$

On note que $B = 1/\tau$.

Le temps τ indique l'étalement dans le temps produit par le filtre sur la réponse à un signal impulsionnel infiniment bref. Il mesure en quelque sorte la «précision» temporelle du filtre et la finesse d'analyse temporelle du dispositif. Deux impulsions émises dans un intervalle de temps inférieur à τ ne pourront être séparées à la sortie. Si l'on veut diminuer τ , il faut augmenter la bande passante B . On touche ici à un résultat très général : plus la réponse temporelle doit être brève, plus l'incursion en fréquence doit être grande. Inversement, si on veut affiner l'analyse fréquentielle (filtre), il faut augmenter l'incursion temporelle des signaux.

5)

Bien que la célérité des sons et ultrasons dépende très peu de la fréquence l'hypothèse d'une célérité constante sur tout le spectre de fréquences reste discutable en particulier si on considère la propagation d'impulsions. Toutefois, la prise en compte de la dispersion conduit à de sérieuses difficultés théoriques.

IV PRINCIPE D'UN LASER MULTIMODES

1)

a. On notera l'analogie entre le dispositif laser décrit ici et le dispositif général considéré en 1.3, une fraction de l'énergie générée par le milieu amplificateur étant réinjectée à l'entrée. Là encore intervient par une puissance trop grande un effet de saturation. L'émission peut s'amorcer si $rg_0 > 1$ (voir I.3.b).

L'énergie est fournie par un rayonnement envoyé sur le milieu amplificateur.

b. La condition $g_0(f) > \frac{1}{r}$ implique l'existence d'une plage de fréquences $B = \Delta f_0$ (figure 5), plage dite «d'accrochage» du laser.

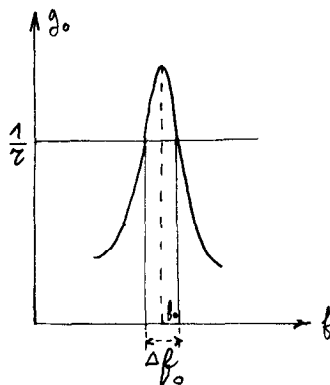


Figure 5

2)

La condition d'interférence constructive est :

$$2L = p \lambda_p \text{ (identique à 12 b).}$$

la différence de marche pour un aller et retour étant $2L$.

En terme de fréquence :

$$f_p = p \frac{c}{2L} \quad (14)$$

d'où l'équidistance Δf_p des modes propres :

$$\Delta f_p = \frac{c}{2L} \quad (15)$$

On a ainsi N modes propres sélectionnés autour de la fréquence f_0 , N étant tel que :

$$N - 1 = \frac{\Delta f_0}{\Delta f_p} \quad (16)$$

où Δf_0 est la largeur de la plage d'accrochage.

Application numérique :

$$\Delta f_p = \frac{3 \cdot 10^8}{2} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz.}$$

$$B = \Delta f_0 = (N - 1) \Delta f_p = 42 \times 1,5 \cdot 10^8 = 6,3 \cdot 10^9 \text{ Hz.}$$

3)

a. Nous utilisons ici la relation (1) :

$$Q_p = 2\pi f_o \frac{\langle W \rangle}{P_o}$$

Si W_L est l'énergie moyenne contenue par unité de longueur de la cavité laser :

$$\langle W \rangle = W_L \cdot L$$

Par unité de temps, la cavité évacue l'énergie $P_o = W_L c (1-r^2)/2$, le facteur 1/2 correspondant au fait que la moitié seulement de l'énergie lumineuse localement présente se propage, à chaque instant, vers le miroir M' .

$$Q_p = 2\pi f_p \frac{2W_L L}{W_L c (1-r^2)} = 2\pi f_p \frac{2L}{c (1-r^2)}$$

soit en utilisant l'expression (14) de f_p :

$$Q_p = \frac{2p\pi}{1-r^2} \quad (17)$$

Application numérique :

On note que $B/f_o = \frac{6,3 \cdot 10^9}{4,46 \cdot 10^{14}} \approx 1,5 \cdot 10^{-5}$ de sorte que toutes les fréquences f_p des modes propres sont pratiquement égales à f_o d'où :

$$\begin{aligned} Q_p &\approx 2\pi f_o \frac{2L}{c (1-r^2)} \\ &= 4\pi \times 4,46 \cdot 10^{14} \times \frac{1}{3 \cdot 10^8 \times 0,02} \approx 9,3 \cdot 10^8 \end{aligned}$$

valeur élevée qui indique une très grande sélectivité sur les modes propres.

Le laser émet sur les longueurs d'onde $\lambda \approx 0,67 \mu m$ c'est-à-dire dans le rouge.

b. La «largeur de raie» $\Delta f'_p$ d'un mode vaut :

$$\Delta f'_p = \frac{f_o}{Q_p} = \frac{1}{4\pi L} \frac{c}{(1-r^2)}$$

d'où en utilisant l'expression (15) de l'équidistance Δf_p des modes :

$$\frac{\Delta f'_p}{\Delta f_p} = \frac{1-r^2}{2\pi}$$

Avec les valeurs numériques utilisées $\frac{\Delta f'_p}{\Delta f_p} \approx 3.10^{-3} \ll 1$.

Le faisceau laser contiendra donc des modes très bien séparés, localisés sur la plage d'accrochage de fréquence centrale f_0 .

4)

a. Le passage d'un mode au suivant correspond à un déphasage $\varphi = 2\pi\Delta f_p t = 2\pi \frac{c}{2L} t$. On doit ainsi additionner N signaux de déphasages successifs $\varphi, 2\varphi, \dots$. L'amplitude $A(t)$ du signal résultant est donnée par (2) :

$$A(t) = a \left| \frac{\sin \frac{N\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right|$$

soit :

$$A(t) = a \left| \frac{\sin \pi N \Delta f_p t}{\sin \pi \Delta f_p t} \right| \quad (18)$$

b. La figure (2) donne l'allure de la variation de $A(t)$. Les premiers minimums de part et d'autre du maximum principal sont tels que :

$$\frac{N\varphi}{2} = \pm \pi$$

soit :

$$N \Delta f_p \tau = 1 \Rightarrow \tau = \frac{1}{N \Delta f_p} \quad (19)$$

ou, en confondant N et $N-1$, d'après (16) :

$$B\tau = 1$$

Application numérique :

$$\Delta f_p = 1,5 \cdot 10^8 \text{ Hz} \rightarrow \tau = 1,55 \cdot 10^{-10} \text{ s}$$

en utilisant (19).

c. La durée d'une impulsion laser est de l'ordre de 2τ soit $3 \cdot 10^{-10} \text{ s}$. La durée séparant deux impulsions consécutives est :

$$\tau' = N\tau = \frac{1}{\Delta f_p} \quad (\varphi = 2\pi)$$

Numériquement : $\tau' = 43\tau \approx 6,7 \cdot 10^{-9} \text{ s}$.

On note que $\tau' = \frac{2L}{c}$ est la durée d'un aller retour de la lumière dans la cavité. Il y a ainsi une impulsion par aller et retour.

d. Le nombre d'impulsions par seconde est $1/\tau'$. Si P est la puissance laser, chaque impulsion transporte l'énergie $P\tau'$. Chaque photon a une énergie hf_0 d'où le nombre de photons par impulsion :

$$n = \frac{P\tau'}{hf_0}$$

Application numérique :

$$\text{Énergie d'une impulsion : } \frac{10^{-3} \times 6,7 \cdot 10^{-9}}{1,6 \cdot 10^{-13}} \approx 42 \text{ MeV}$$

$$\text{Énergie d'un photon : } \frac{6,62 \cdot 10^{-34} \times 4,46 \cdot 10^{14}}{1,6 \cdot 10^{-19}} \approx 1,86 \text{ eV}$$

soit : $n \approx 2,27 \cdot 10^7$.

5)

L'analogie repose sur les rôles similaires joués par les variables f et t : il y a simple permutation des représentations temporelles et fréquentielles. Dans les 2 cas, comme dans celui des réseaux d'ailleurs, la bande passante B qui précise l'étendue fréquentielle et la durée τ qui, elle, précise l'étendue temporelle sont liées par la relation fondamentale :

$$B\tau = 1$$

Selon les appareils on veut :

- soit diminuer B de manière à avoir un filtre sélectif (réseaux, filtre à onde acoustique...) ; il faut alors augmenter le délai τ , soit en augmentant la différence de marche (réseaux échelon), soit en diminuant la célérité (ondes acoustiques).
- soit diminuer τ pour percevoir des signaux très brefs et augmenter ainsi la quantité d'information ; il faut alors augmenter la bande passante B .

V ÉPILOGUE

En télécommunications, on souhaite précisément augmenter la quantité d'information transmise d'où la nécessité d'utiliser des signaux très brefs. Il faut donc augmenter B mais cela risque de provoquer ainsi des empiètements des bandes de fréquences autour des fréquences choisies pour les différents canaux. On a donc intérêt à augmenter les fréquences porteuses (MF, télécommunications optiques par fibres) de manière à disposer de davantage «d'espace» autour de chaque fréquence porteuse.