Sujet du concours général

SESSION DE 1990

COMPOSITION DE SCIENCES PHYSIQUES

(Classes terminales C, D et E)

DURÉE : 5 heures

FACTEUR DE QUALITÉ DE SYSTÈMES INTERFÉRENTIELS À ONDES MULTIPLES

I. PROLOGUE

Ce prologue rassemble quelques résultats utiles pour la résolution du problème.

1. Une branche de circuit comprenant en série une résistance R, une inductance L et une capacité C est soumise à une tension alternative sinusoïdale de valeur efficace U et de pulsation ω. On considère que U est fixé mais que l'on peut faire varier ω. On supposera que le régime d'oscillations forcées est atteint.

   a. Exprimer la puissance moyenne P dissipée dans la branche de circuit et représenter l'allure des variations de P avec ω.

   b. P prend la valeur maximale P_0 pour la pulsation ω_0. D'autre part, P est supérieur à $P_0/2$ quand ω est dans l'intervalle $[\omega_1, \omega_2]$. On appelle *facteur de qualité* du circuit le rapport $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1}$. Exprimer Q en fonction de R, L et ω_0. Discuter la formule obtenue.

   c. Soit $< w >$ l'énergie *moyenne* emmagasinée par l'ensemble inductance + condensateur lorsque $\omega = \omega_0$. Exprimer Q en fonction du rapport $< w > / P_0$ et de ω_0. Exprimer P_0 en fonction de $< w >$ et de la largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ de la bande passante.

   d. Connaissez-vous d'autres définitions du facteur de qualité d'un circuit R, L, C série ?

2. On considère N signaux sinusoïdaux s_n de même pulsation ω et de même amplitude a, mais dont les phases successives forment une progression arithmétique de raison φ, soit :

   $$s_n = a\cos(\omega t - n\varphi) \quad \text{avec} \quad n \text{ entier} : 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

   où φ est un déphasage constant.

   a. En utilisant la construction de Fresnel, montrer que le signal :

   $$S = \sum_{n=0}^{N-1} s_n$$

   a pour amplitude :

   $$A(\varphi) = a\left|\frac{\sin N\varphi/2}{\sin\varphi/2}\right| \qquad (1)$$

   b. Étudier sommairement la fonction $A(\varphi)$. Quelle est la période de cette fonction ? Pour quelles valeurs de φ, $A(\varphi)$ est-elle minimale ? Montrer que $A(\varphi)$ possède des maximums dits principaux et des maximums dits secondaires. Déterminer les valeurs de φ correspondant aux maximums principaux. Décrire l'allure de la courbe $A(\varphi)$. Cas où $N \to \infty$.

3. *a.* Un système linéaire amplificateur de gain $g\,(g > 1)$ est tel qu'à une grandeur d'entrée $X > 0$ correspond une grandeur de sortie $X' = gX$, g étant indépendant de X. On réinjecte à l'entrée de l'amplificateur une fraction rX' $(0 < r < 1)$ du signal de sortie X' (figure 1). Ainsi, quand la grandeur d'entrée est X_0, l'amplificateur reçoit $X = X_0 + rX'$. Calculer en fonction de g et de r le nouveau gain $g' = X'/X_0$ du dispositif.

   b. Que se passe-t-il pour $r \geqslant 1/g$? En fait, la linéarité n'est assurée que pour les petites valeurs de X. Ensuite, quand X augmente, le signal X' tend vers la limite X'_s (saturation). Donner l'allure de la variation de X' en fonction de X. Pour X petit, g est pratiquement constant et égal à g_0. Le signal X_0 étant donné, obtenir par une construction graphique simple la valeur de X'. Le signal de sortie X' peut exister même si $X_0 = 0$, c'est-à-dire en l'absence de signal d'entrée, à condition que le produit rg_0 satisfasse à une inégalité que l'on établira. D'où vient alors l'énergie nécessaire ?

II. RÉSEAUX OPTIQUES

1. On considère un réseau optique plan par transmission. Ce réseau comporte N fentes parallèles et équidistantes occupant au total une longueur L de sorte que l'équidistance des fentes est $h \approx L/N$. La lumière arrive perpendiculairement au plan du réseau. Une direction de diffraction est repérée par l'angle θ (figure 2). On suppose N grand devant 1, de sorte qu'on puisse confondre N et $N - 1$.

   a. La lumière incidente est monochromatique de fréquence f (et de longueur d'onde dans le vide λ). Établir la relation donnant les directions θ_p (p entier) correspondant à des interférences constructives. Comment observer effectivement ces interférences ?

   b. Pour une direction de diffraction donnée (θ donné), calculer les fréquences f_p correspondant aux interférences constructives.

   Application numérique : On donne $\theta = 20°$, $h = 2 \cdot 10^{-3}$ mm, $0{,}40\ \mu m < \lambda < 0{,}75\ \mu m$.

   Déterminer la ou les fréquences f_p correspondantes.

   c. Pour étudier en détail la figure d'interférence, on est amené à considérer, pour chaque direction définie par une valeur de l'angle θ, la superposition de N ondes de même amplitude a correspondant chacune à l'onde diffractée par une fente. En utilisant le résultat obtenu en 1.2.*a.*, montrer que l'amplitude $A(f)$ de l'onde résultante est donnée par la formule (1) où l'on exprimera φ en fonction de h, $\sin\theta$, f et c (célérité de la lumière dans le vide). À quoi correspondent les maximums principaux ?

   d. Pour une direction θ donnée, on étudie le comportement du réseau pour les fréquences lumineuses f voisines de l'une des fréquences f_p (voir II.1.*b.*). On pose ainsi $f = f_p + \delta f$ avec $\left|\frac{\delta f}{f_p}\right| \ll 1$. Calculer le rapport $T(f) = \frac{A(f)}{A(f_p)}$ (réponse fréquentielle du réseau). Représenter sommairement la fonction $T(f)$ au voisinage de $f = f_p$. Calculer la valeur B de $|\delta f|$ qui annule $T(f)$ une première fois de part et d'autre du maximum principal.

   e. Montrer que, pour θ fixé, le réseau se comporte comme un filtre. Comment augmenter sa sélectivité ? Calculer le facteur de qualité (ou pouvoir de résolution) du réseau, soit : $Q_p = f_p / B$. On justifiera cette définition et on tirera les conséquences du résultat obtenu.

   f. On pose $\tau = 1/B$. Quelle est la signification physique de τ ? La lumière émise par la source est constituée de trains d'ondes aléatoires dont la durée est de l'ordre de 10^{-8} s. Quelle limitation sur B en résulte-t-il ?

   Application numérique : En reprenant les données numériques du II.1.*b.*, quelle est dans ces conditions la valeur maximale de Q_p ?

2. On considère maintenant un réseau « *échelon* » par réflexion. Le réseau comporte N échelons de largeur e. L'angle θ de réflexion est supposé petit (figure 3).

   a. Calculer l'ordre de grandeur de τ pour un tel réseau.

   b. En admettant qu'on puisse généraliser les résultats II.1.*e.* et *f.* calculer le facteur de qualité Q du réseau. On exprimera Q en fonction de N, e et de la longueur d'onde λ de la lumière incidente.

   Application numérique : $N = 200$, $e = 2$ mm, $\lambda = 0{,}60\ \mu m$.

3. Quelles conclusions générales pouvez-vous tirer des résultats obtenus en II.1. et en II.2. quant à la conception et la réalisation des réseaux optiques ? Quelles utilisations connaissez-vous des réseaux ?

III. PRINCIPE D'UN FILTRE À ONDE ACOUSTIQUE DE SURFACE

La figure 4 représente le schéma de principe d'un « filtre à onde acoustique de surface ». Le filtre comporte un réseau d'électrodes émettrices fixées sur un support en quartz. Le fonctionnement du dispositif est basé sur une propriété particulière du cristal de quartz, dite « effet piézo-électrique » : sa capacité à transformer un signal mécanique en signal électrique, et réciproquement.

Un signal électrique d'entrée est ainsi converti au niveau de chaque paire d'électrodes en un signal mécanique se propageant en surface (onde acoustique). Cette onde acoustique de surface arrive sur deux électrodes réceptrices où elle est transformée en signal électrique de sortie. Un traitement approprié supprime les réflexions de l'onde acoustique aux extrémités. La célérité V de cette onde acoustique est de l'ordre de quelques kilomètres par seconde. On négligera la dépendance de V vis-à-vis de la fréquence, c'est-à-dire la dispersion.

1. La fréquence f des signaux étant fixée, que peut-on dire de la longueur d'onde Λ correspondante de l'onde acoustique par rapport à celle des lignes électriques usuelles pour lesquelles la célérité des signaux est de l'ordre de c ? Conclure quant à l'intérêt du dispositif.

2. *a.* Le signal électrique d'entrée $e(t)$ est sinusoïdal de fréquence f. Le signal mécanique produit au niveau de chaque électrode est strictement proportionnel (donc en particulier sans déphasage) au signal électrique qui le produit. Montrer que le signal de sortie recueilli $s(t)$ est la somme de N signaux de même amplitude a, mais déphasés de Φ, $2\,\Phi$, ... $(N-1)\,\Phi$, N désignant le nombre de *paires* d'électrodes émettrices. Exprimer Φ en fonction de V, f et de L, distance constante entre deux électrodes successives (figure 4). On considérera dans la suite $N \gg 1$.

   b. Exprimer l'amplitude $A > 0$ du signal de sortie. Calculer les fréquences f_p de résonance du dispositif. Exprimer la relation entre L et la longueur d'onde correspondante Λ_p.

   Application numérique : Calculer f_1 $(p = 1)$ pour $V = 3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$ et $L = 3 \cdot 10^{-2}$ mm.

3. On étudie le comportement du dispositif pour des fréquences f très voisines d'une fréquence de résonance f_p. Définir la réponse fréquentielle et calculer les grandeurs B et Q_p correspondantes (voir II.1.*d*.). Montrer que le dispositif se comporte comme un filtre fréquentiel. Comment en augmenter la sélectivité ?

   Application numérique : Calculer B et Q_p pour $p = 1$, $V = 3\ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$, $L = 3 \cdot 10^{-2}$ mm, $N = 200$.

4. Le signal électrique d'entrée $e(t)$ est maintenant une impulsion de durée infiniment brève (impulsion de Dirac). Montrer que le signal de sortie correspondant $S(t)$, appelé *réponse impulsionnelle* du filtre, est une fonction périodique de durée τ, nulle en dehors de cet intervalle de temps. Déterminer τ et la fréquence f du signal $S(t)$. Quelle relation y a-t-il entre τ et B (déterminé en III.3.) ? Commenter le résultat.

5. Parmi les hypothèses faites concernant la réponse du filtre, quelle est celle qui vous paraît la plus contestable ?

IV. PRINCIPE D'UN LASER MULTIMODES

Une cavité laser est constituée par un milieu gazeux enfermé entre deux miroirs plans parallèles M et M' séparés par une distance L (figure 5). Le miroir M est totalement réfléchissant tandis que le miroir M' réfléchit vers la cavité une partie de la lumière produite dans le milieu, l'autre partie étant évacuée vers l'extérieur. Le rapport des amplitudes de l'onde réfléchie et de l'onde incidente arrivant sur M' est r avec $0 < r < 1$. Le milieu a un rôle amplificateur de sorte qu'après chaque aller et retour complet, l'amplitude de l'onde, abstraction faite de la transmission par M', est multiplié par un facteur $g_0 > 1$. Le rôle de la cavité est ainsi d'augmenter l'énergie de l'onde en obligeant une fraction de cette onde à effectuer des aller et retour dans le milieu amplificateur.

1. *a.* En utilisant l'analogie avec le système de la question I.3., trouver la condition que doivent satisfaire r et g_0 pour que l'émission puisse s'amorcer. Quel phénomène limite la puissance émise hors de la cavité par le laser ?

   b. En fonctionnement à puissance donnée, le facteur g_0 est une fonction de la fréquence f de l'onde, cette fonction $g_0(f)$ passant par un maximum aigu pour une valeur f_0 de f caractéristique du milieu (figure 6). En déduire, par examen de la courbe $g_0(f)$, que le laser ne peut émettre que sur une plage de fréquences $B = \Delta f_0$ autour de f_0 (plage d'accrochage du laser).

— 4 —

2. La célérité des ondes dans le milieu est supposée indépendante de f et pratiquement égale à $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Donner la condition pour que, les ondes ayant effectué des nombres différents d'aller et retour, elles interfèrent de manière constructive. Calculer l'équidistance Δf_p des *modes propres* ainsi déterminés. Montrer que le laser émet sur un nombre N de modes propres sélectionnés autour de la fréquence f_0.

Application numérique : On donne $L = 1$ m, $N = 43$; calculer numériquement Δf_p ainsi que $B = \Delta f_0$ (plage d'accrochage) défini en IV.1.*b*.

3. *a.* En utilisant la définition énergétique du facteur de qualité (question I.1.*c*.), calculer pour le mode de fréquence f_p (p entier) le facteur de qualité Q_p de la cavité, défini en considérant l'énergie évacuée par la cavité. On indique que le facteur de réflexion *énergétique* pour le miroir M' est égal à r^2.

   Exprimer Q_p uniquement en fonction de r^2 et du nombre entier p fixant le mode considéré.

   Application numérique : On donne $r^2 = 0{,}98$, $f_0 = 4{,}46 \cdot 10^{14}$ hertz. Calculer Q_p. À quel domaine électromagnétique appartient la radiation de fréquence f_0 ?

   b. Calculer la « largeur de raie » $\Delta f'_p$ associée à Q_p. En déduire le rapport $\dfrac{\Delta f'_p}{\Delta f_p}$ et conclure. On utilisera les données numériques précédentes.

4. *a.* On suppose qu'aux modes ainsi sélectionnés par la cavité correspondent $N = 2j + 1$ ondes sortant de la cavité, de même amplitude a et synchronisées. À l'onde p on peut de la sorte associer le signal sortant $s_p = a \cos 2\pi f_p t$, la bande de fréquences f_p étant centrée sur f_0. Déterminer l'amplitude $A(t) > 0$ de l'onde totale sortant de la cavité.

   b. Étudier sommairement les variations de $A(t)$ en fonction de t. Calculer la largeur τ séparant un maximum principal du minimum qui le suit. Quelle relation simple lie τ et la plage d'accrochage en fréquence $B = \Delta f_0$? (On confondra N et N − 1.)

   Application numérique : Calculer numériquement τ en utilisant les données des questions précédentes.

   c. Montrer que ce « laser multimodes » émet des impulsions dont on déterminera l'ordre de grandeur de la durée. Quel est l'intervalle de temps séparant deux impulsions successives ? Le calculer numériquement.

   d. La puissance du laser est de 1 mW ; calculer en MeV ($1 \text{ MeV} = 10^6 \text{ eV}$) l'énergie d'une impulsion. Comparer à l'énergie d'un photon ($h = 6{,}62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$, $e = 1{,}60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$).

5. Quelle analogie peut-on établir avec le filtre à ondes acoustiques (partie III) ? On considérera pour chaque cas, les domaines temporels et fréquentiels et on comparera, en particulier, les fonctions $T(f)$ (question III.3.) et $A(t)$ (question IV.4.*a*.). On s'aidera de diagrammes temporels et fréquentiels.

V. ÉPILOGUE

À la lumière de l'étude précédente, expliquer l'intérêt qu'il peut y avoir, en télécommunications, à augmenter la fréquence de l'onde porteuse. Illustrer votre réponse sur des exemples.

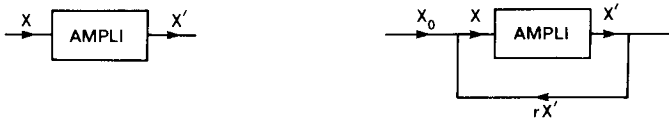

Figure 1

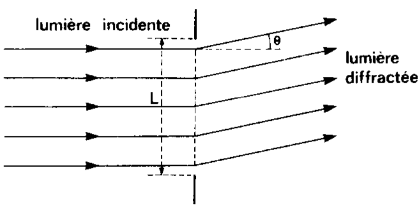

Figure 2

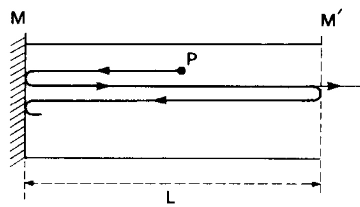

Figure 5. – *Cavité laser*

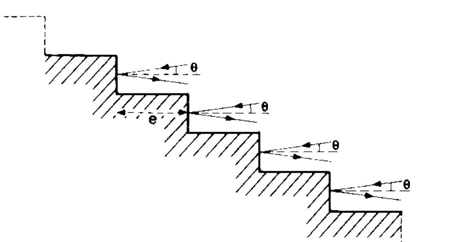

Figure 3. – *Réseau « échelon »*

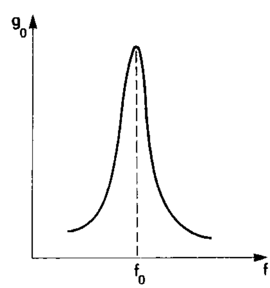

Figure 6

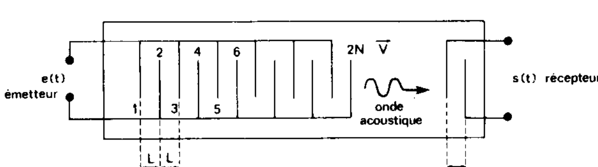

Figure 4. – *Schéma du filtre à onde acoustique*