84^e Année - N° 724 Publication Mensuelle Mai 1990

Bulletin de l'Union des Physiciens

Association de professeurs de Physique et de Chimie

Introduction à l'étude des systèmes non linéaires

2 - Le chaos et l'approche du chaos

par J. M. VIGOUREUX
Laboratoire de Physique Moléculaire
Université de Besançon 25030 Besançon Cedex

1. INTRODUCTION

Nous nous contenterons, en introduction, de résumer nos résultats précédents :

Nous étudions l'évolution d'une population d'insectes installés sur une île. Nous notons x_j la valeur de cette population l'année j.

Pour décrire la dynamique de ce problème, une équation linéaire du type $x_{j+1} = a\ x_j$ peut conduire (lorsque a > 1) à des valeurs de x «tendant vers l'infini». Elle ne doit donc être considérée qu'en tant que

Cet article fait suite à un texte du même auteur, paru dans le numéro de Mars page 331.

«première approximation». Pour la corriger, il est possible d'y introduire un terme négatif et de puissance supérieure à 1 :

$$x_{j+1} = a\, x_j - r\, x_j^2 \tag{13}$$

Ce second terme, dont l'influence devient de plus en plus importante au fur et à mesure que x_j augmente, vient ainsi freiner l'augmentation démographique. Par un changement de variable approprié nous avons transformé cette équation en :

$$X_{j+1} = a\, X_j\, (1 - X_j) \qquad X_j \in [0, 1] \tag{14}$$

plus facile à discuter et permettant une étude numérique plus simple. Une telle équation est dite «non linéaire». Nous en avons discuté en détail les principales propriétés :

– si $a < 1$, les insectes voient leur population diminuer chaque année et tendre vers 0 : le milieu est «inhospitalier».

– si $a > 1$, le milieu est au contraire «hospitalier» ; nous pouvons donc nous attendre à une croissance de la population. Cette dernière toutefois ne se traduit pas par une augmentation «infinie» du nombre d'insectes puisque le terme non linéaire a justement été introduit pour empêcher un tel comportement «non physique» : la population tend vers une limite x_l dont la valeur dépend de a. Résultat frappant, la même limite x_l est atteinte quelle que soit la valeur initiale x_0 de la population : x_l est un **attracteur**.

L'étude de l'équation (14) nous a permis d'introduire les notions d'**attracteur**, de **système dissipatif** et de **catastrophe**. Nous avons cependant terminé en révélant que le raisonnement employé pour trouver la limite x_l comportait une grave erreur. Cette erreur ne met pas en cause les résultats énoncés, mais à cause d'elle, avons dit, de nombreuses solutions ont été oubliées.

De quelle erreur s'agit-il ? Nous avons inconsciemment postulé la solution finale et organisé notre démonstration pour trouver la forme précise du résultat cherché. C'est une erreur grave... et pourtant courante ! Parfois même, cet écueil peut sembler inévitable.

Reprenons notre démarche :

– Nous sommes sûrs que la population ne tend pas vers l'infini, *donc* nous postulons l'existence d'une limite que nous calculons. La limite ainsi trouvée existe effectivement... mais n'aurions nous pas également pu trouver «autre chose» si nous avions su chercher «autre chose» ?

Le problème est bien là : la nature ne répond qu'aux questions bien posées. Nous lui avons demandé si la population tendait vers une limite x_1. Elle a répondu par l'affirmative et cette limite existe effectivement, mais nous avons omis de lui demander si la dynamique de croissance pouvait tendre vers «autre chose» qu'une limite ! Oubliant pendant longtemps de se poser cette question, les physiciens et mathématiciens ont ainsi oublié de nombreuses autres solutions possibles... ignorant ainsi tout une classe de phénomènes étonnants. C'est pour insister sur ce point que nous avions intitulé notre premier article : «les solutions oubliées».

Ce sont ces solutions que nous voulons maintenant chercher.

Remarques :

– pour une raison de commodité, nous continuerons à numéroter les relations utilisées ainsi que les figures à la suite de celles du notre précédent article.

– il n'est pas inutile de rappeler que si l'exemple choisi permet une étude algébrique simple des phénomènes étudiés, il est néanmoins intéressant de pouvoir l'explorer de manière numérique. L'usage d'un micro-ordinateur présente pour cela l'avantage de permettre de visualiser l'évolution démographique en traçant des courbes. Une simple calculette programmable est cependant suffisante.

2. LES SYSTÈMES PÉRIODIQUES

a) La première solution oubliée

Quel processus nouveau pourrions nous chercher ? Il serait par exemple possible d'envisager un système qui se mette à osciller éternellement sans jamais se stabiliser :

– une année, les insectes sont trop nombreux pour les possibilités d'accueil sur l'île ; mal nourris, vivants dans de mauvaises conditions, ils ne peuvent pas survivre et laissent finalement peu d'œufs.

– l'année suivante, la population, restreinte et vivant donc dans l'abondance, pond au contraire un grand nombre d'œufs...

– ... préparant ainsi pour la troisième année une population à nouveau trop nombreuse qui, à nouveau, dépérira... !

Ainsi, les années impaires verront une population trop importante pour l'île qui, les années paires, sera sous peuplée.

Voilà un processus auquel nous n'avions pas songé ! Où peut-il se cacher ?

Pour découvrir s'il existe, il nous faut l'écrire de manière mathématique : il ne s'agit pas d'une «limite» puisque la population variera d'une année sur l'autre, mais de «quelquechose» qui ressemblera quand même à une limite puisque, si le phénomène existe, il correspondra à une solution stable vers la quelle «tendra» la population. Nous pouvons appeler cette solution une «oscillation limite» entre deux valeurs. Cette précision nous permet de traduire notre question en équation : si lorsque cette «solution limite» est atteinte, la population passe successivement de X' à X'' nous pouvons écrire :

(15 a) années impaires : $X'' = aX' (1 - X')$

(la population qui valait X' l'année N passe à X'' l'année N + 1) et

(15 b) années paires : $X' = aX'' (1 - X'')$

(la population qui vaut X'' l'année N + 1 revient à sa valeur X' l'année N + 2)

Notre problème est maintenant mathématiquement clair :

– si le système formé par les équations (15 a) et (15 b) admet une solution unique $X' = X''$, il se réduit à la seule équation (10) :
$X = aX (1 - X)$. On pourra dire alors que la population étudiée tend bien vers une limite, et nous retrouverons le cas précédemment étudié.

– si nous obtenons deux solutions distinctes $X' \neq X''$, cela démontrera que la population peut ne pas se stabiliser sur une limite mais se mettre à osciller indéfiniment révélant ainsi une première «**solution oubliée** ».

Le moyen le plus simple, pour résoudre le système (15) est d'opérer par substitution. En portant (15 b) dans (15 a), nous trouvons :

(16) $X' = a\,[aX' (1 - X')]\,[1 - aX' (1 - X')]$

avec, bien sûr, la même équation pour X''. En effectuant les parenthèses :

$$(17) \qquad X' \left[aX'^3 - 2aX'^2 + X'(1 + a) - (a^2 - 1)/a^2\right] = 0$$

Notre question devient ainsi : pour quelles valeurs de a cette équation (17) a-t-elle des solutions distinctes ? Pour y répondre il nous faut résoudre l'équation du troisième degré qui annule le second facteur. Il est utile pour cela de remarquer que la solution stable $X_1 = (a - 1)/a$ trouvée précédemment est nécessairement solution du système (15) et donc de (17) puisqu'elle est un point fixe de la transformation étudiée : si on donne à X' cette valeur X_1 dans la première équation (15 a) on trouvera obligatoirement $X'' = X_1$ (voir l'équation (10)) et la population étudiée gardera cette valeur constante quel que soit le nombre d'itérations. *En d'autres termes : si la population garde tous les ans la même valeur (eq.10), elle la conserve a fortiori tous les deux ans (eq 15).*

Cette remarque nous permet de résoudre assez simplement le système d'équations (15) : en mettant directement cette racine en évidence l'eq (17) peut s'écrire :

$$(18) \qquad X\left[X - (a - 1)/a\right]\left[AX^2 + BX + C\right] = 0$$

Par identification de (17) et de (18), ou par division de polynômes, on trouve les coefficients A, B et C :

$$(19) \qquad A = a$$

$$B = -(a + 1)$$

$$C = (a + 1)/a$$

Les quatre racines cherchées se trouvent alors facilement :

$$(20) \qquad x_a = 0$$

$$x_b = (a - 1)/a$$

$$x_c = \left[(a + 1) + \sqrt{(a+1)(a-3)}\,\right]/2a$$

$$x_d = \left[(a + 1) - \sqrt{(a+1)(a-3)}\right]/2a$$

Ce résultat est d'une étonnante richesse :

– si $a < 3$, x_c et x_d n'existent pas (à cause du terme en $\sqrt{(a-3)}$ et seules demeurent les deux premières solutions que nous avions trouvées en résolvant l'équation (10) : la population tend bien vers la valeur limite $x_b = (a-1)/a$ quelle que soit sa valeur initiale, à condition que celle ci ne soit pas nulle. Dans ce dernier cas, la solution constante est x_a.

– si $a > 3$, le système a deux solutions supplémentaires x_c et x_d et l'oscillation cherchée existe bien : après avoir évolué un certain temps à la recherche d'un équilibre, la population va finir par se mettre à osciller «éternellement» entre ces deux valeurs.

Un tel comportement est illustré sur la figure 9 : on y voit la population se mettre à croître, puis à décroître, jusqu'à ce qu'elle ait atteint ce comportement final qu'elle garde ensuite en permanence ; il s'agit bien d'un «comportement limite», mais il ne correspond pas, bien sûr, à la notion usuelle de limite.

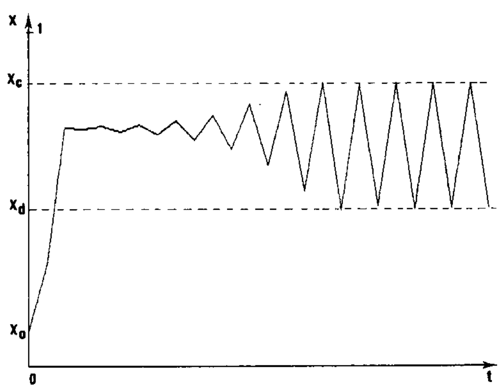

Figure 9 : Évolution de la population de l'île dans le cas où la valeur de la population initiale est $X_0 = 0.2$ et où $a = 3{,}2$. Après avoir cherché quelques temps son «équilibre dynamique», la population trouve son «comportement limite» dans une oscillation entre deux valeurs fixées. x_c et x_d.

On peut également comprendre ce cheminement en considérant la figure 10. Comme la figure 6, la dynamique démographique peut s'y lire dans les «rebondissements» horizontaux et verticaux successifs entre la courbe représentative de f(x) et la première diagonale. Nous voyons que la stabilisation du système sur une oscillation périodique correspond à l'existence de deux points M et N de la courbe situés de part et d'autre de la première diagonale. La population prenant la valeur

M une année, se retrouve l'année suivante en N ; la «trajectoire » décrite est alors un carré et se répète donc indéfiniment : la recherche d'un équilibre (au sens classique du terme) est bloquée.

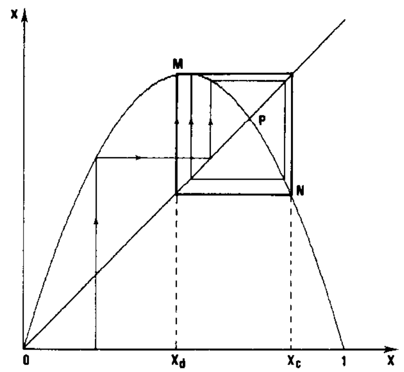

Figure 10 : Évolution temporelle de la population d'insectes dans le cas où a = 3.35. La condition a > 1 impose à la courbe représentative de la fonction y = ax (1 – x) d'être partiellement au dessus de la première diagonale. L'évolution ressemble donc à celle de la figure 6. Dans ce cas particulier toutefois, la position de la courbe est telle que l'on finit par passer indéfiniment de la position M à la position N sans jamais pouvoir atteindre le point P : après une période d'adaptation plus ou moins longue, la population oscille «éternellement » entre ces deux valeurs.

Nous avons ainsi analysé cette «solution périodique» inattendue. Il est intéressant de se demander, dans le cas où elle existe, quel est le sens physique des deux autres solutions x_a et x_b trouvée en (20) :

– comme précédemment, la solution $x_a = 0$ est un **point fixe** de la transformation. C'est aussi une **solution instable** : elle n'existe que si la valeur initiale x_0 est rigoureusement nulle ; dès que x_0 est différent de 0, aussi petit soit-il, la population va se mettre à croître pour tendre vers la solution périodique trouvée.

– la solution $x_b = (a - 1)/a$, reste, elle aussi, **un point fixe** : si la population initiale a exactement cette valeur, elle la garde «éternellement». On peut voir cependant que, de stable qu'elle était pour a < 3, cette solution est maintenant devenue, elle aussi, **instable** : si la valeur initiale diffère d'une valeur aussi petite que l'on veut de x_b, la population se met à croître pour tendre vers l'oscillation que nous venons de décrire.

Pour a = 1, le point fixe x = 0 (trouvé pour a < 1) avait perdu sa stabilité au profit de la limite stable $x_1 = (a - 1)/a$. C'était notre première «catastrophe».

Pour a = 3, le point fixe $x_1 = (a - 1)/a$ perd à son tour sa stabilité au profit d'un nouveau comportement stable : l'oscillation périodique. C'est une seconde «catastrophe».

Notons toutefois qu'en toute rigueur, la valeur a = 3 ne correspond pas à une catastrophe au sens usuel de la théorie des catastrophes de R. Thom : les sept catastrophes élémentaires analysées dans cette théorie ne concernent en effet que les systèmes dissipatifs (systèmes qui tendent vers un état d'équilibre). Le terme peut cependant se généraliser ici car il s'agit bien d'un phénomène du même type.

Nous avons résumé nos résultats sur la figure 11 qui «prolonge» ainsi la figure 7 pour de plus grandes valeurs de a.

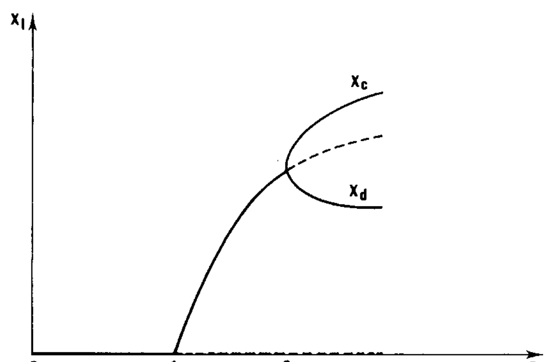

Figure 11 : Variations du «comportement limite» de la population de l'île en fonction du paramètre a. Les solutions stables sont en traits pleins, les solutions instables sont en pointillés. - Pour a < 1 la solution stable est x = 0 ; la population tend toujours vers 0. - Pour 1 < a < 3, la population tend vers la valeur limite x = (a – 1)/a ; la solution x =0 est alors instable. - Pour a > 3, deux branches apparaissent : une valeur donnée de a correspond à deux valeurs distinctes de la population limite ; le comportement dynamique du système correspond à une oscillation entre ces deux valeurs. La solution x = (a – 1)/a devient à son tour instable.

Remarque : On remarquera de plus que la *limite périodique atteinte ne dépend pas de la valeur x_0 de la population mais seulement de a : le comportement de la population ne dépend pas de sa valeur initiale, mais seulement des «conditions de vie a» dans l'île...* sauf pour les **deux** points fixes $x_a = 0$ et $x_b = (a - 1)/a$. (On notera en passant qu'il y en a maintenant deux au lieu d'un seul). La solution périodique trouvée apparaît ainsi comme un **attracteur** de tous les états possibles du système autre que ces deux points fixes.

b) Discussion générale

Avant d'entrer dans le détail des questions soulevées par de tels phénomènes, donnons en quelques exemples :

Le premier illustre l'oscillation possible des **systèmes «prédateurs-proies»**. En toute rigueur, un tel exemple est plus complexe que celui que nous venons d'étudier puisque deux populations au lieu d'une seule y sont maintenant en présence. Il s'agit cependant du même type de phénomène. La figure 12 représente l'évolution d'une population de petits poissons confrontés, dans un même étang, à la présence de gros poissons carnivores :

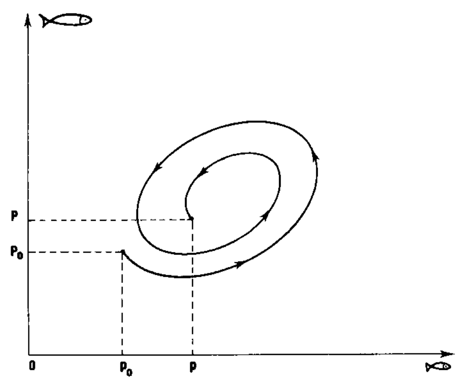

Figure 12 a : Pour certaines valeurs du paramètre d'hospitalité de l'étang, le système est attiré vers un équilibre correspondant à un nombre limite constant p et P de petits et de gros poissons.

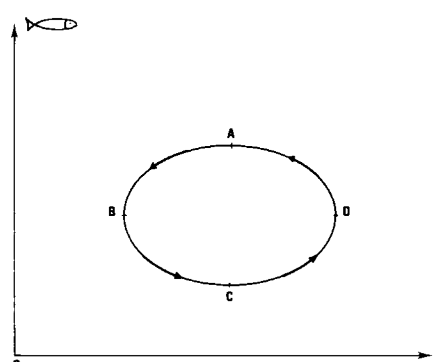

Figure 12 b : Pour d'autres valeurs du paramètre d'hospitalité, le système «prédateurs-proies » est attiré vers une solution cyclique dans laquelle le nombre de petits et de gros poissons oscille indéfiniment.

Pour comprendre le processus de la figure 12 b partons du point 0 :

– Dans la première partie du cycle, les gros poissons, dans un milieu où la nourriture est abondante, se développent au détriment des petits dont le nombre diminue. Nous nous retrouvons ainsi en A.

– à partir de ce point, les petits poissons ne sont plus assez nombreux pour satisfaire les besoins alimentaires des gros. Ceux-ci commencent donc à dépérir et leur nombre baisse. Celui des petits, qui continuent cependant à leur servir de nourriture continue de baisser lui aussi.

– à partir de B, le nombre des gros poissons est devenu très faible. Il continue à baisser car la population restante, très réduite ne peut plus se reproduire beaucoup. Les petits poissons qui ne peuvent que s'en réjouir en profitent et recommencent à se développer.

– à partir de C, les gros poissons, dans un milieu naturel redevenu favorable reprennent leur croissance...

C'est là notre premier exemple. Un autre, particulièrement intéressant pour les chimistes, concerne les **réactions chimiques oscillantes :**

La plus connue est la réaction d'oxydo-réduction de Beloussov et Zhabotinsky : en 1958, Beloussov s'apercevait fortuitement qu'un mélange d'acide citrique et d'acide sulfurique contenant du bromate de potassium et un sel de cérium changeait périodiquement de couleur en passant successivement du jaune (révélant la présence d'ions cériques) à un état incolore (ions céreux). Une réaction du même type avait déjà été décrite, par W. Bray en 1917 mais n'avait pas attiré l'attention, tant l'habitude de considérer des réactions d'équilibre étaient ancrée dans les esprits. Depuis 1960 des études systématiques de ces phénomènes ont été entreprises ; elles ont conduit à la découverte de nombreux autres cas d'oscillations chimiques. Parmi eux certains présentent l'avantage de se réaliser facilement à température ambiante tout en n'employant que des composés non toxiques. Une d'entre elles est présentée en détail dans l'article de J. Walker : «expérience d'amateurs», publié dans «Pour la Science » en 1978.

Mais il ne suffit pas de présenter des exemples. *Il faudrait encore essayer de comprendre pourquoi de telles solutions, dont le principe est somme toute assez simple, ont toujours été «oubliées».*

Une raison essentielle de cet «oubli» provient sans doute de la présentation habituellement donnée du «**second principe de la thermodynamique**». D'après ce principe, un système fermé, c'est-à-dire ne recevant aucun apport extérieur de matière ou d'énergie, ne peut qu'évoluer vers un état d'équilibre : si, passsant par l'état A, il évolue, vers l'état B, *il ne peut en aucun cas revenir de lui même en A.* C'est ce que l'on exprime aussi en disant que l'entropie (ou encore le «désordre») d'un système fermé est une fonction toujours croisssante. Mais alors, à la lumière de cet énoncé, qu'en est-il de notre système qui repasse périodiquement de la valeur A à la valeur B ?

Une seule piste semble possible pour résoudre ce paradoxe : les solutions oscillantes comme celles que nous venons de décrire n'ont sans doute pas leur place dans ce contexte de la thermodynamique. C'est Il y a Prigogine, de l'Université Libre de Bruxelles, qui le premier a attiré l'attention sur le fait que *cette formulation du second principe ne pouvait concerner que les systèmes fermés et proches de l'équilibre ;* les autres systèmes, appelés «systèmes non dissipatifs», ne sont pas contraints à évoluer vers le repos, mais peuvent au contraire tourner «indéfiniment» sur une trajectoire périodique.

Ainsi, **l'énoncé habituel du «second principe» n'est applicable** :

– **ni pour des systèmes «hors d'équilibre»** (des réactions chimiques qui viennent de s'amorcer, des systèmes physiques très fortement perturbés...)

– **ni pour des systèmes ouverts** (qui sont en situation d'échanges avec l'extérieur).

De tels systèmes ne sont pas soumis à cette loi de «désordre» ou de «désorganisation progressive». *Pour eux, au contraire, un ordre peut même émerger soudainement et se construire.*

Tous ces résultats constituent la base de ce que l'on appelle la «**thermodynamique des processus irréversibles**» ; ils ont valu à leur auteur le prix Nobel de Chimie en 1977.

Nous avons ainsi expliqué pourquoi de telles solutions avaient pu être oubliées : elles ne pouvaient pas venir à l'esprit tant elles étaient contraires aux habitudes de penser. Il nous reste cependant un fait troublant à éclaircir : *les résultats ci-dessus ne démontrent-ils pas la possibilité d'un mouvement perpétuel ?* Que devons nous entendre par «solution finale oscillante» ?

– La première chose à souligner est que le système dont nous parlons est un système «ouvert» : pour vivre et se multiplier, nos insectes reçoivent de l'île l'énergie qui leur est nécessaire et en restituent une partie sous forme de déchets.

– Le second point important est de voir que de *telles oscillations ne peuvent se maintenir que parce que le système est ouvert et reçoit donc de l'énergie qui les entretient* : si les conditions de vie «a» changeaient brusquement, (par exemple à cause d'un gigantesque incendie ou d'une éruption volcanique), l'île pourrait devenir «inhospitalière », et la population d'insectes disparaitrait. Ainsi, *le fait que notre paramètre «a» soit plus grand que un et constant a une signification physique profonde : le système est «hospitalier», donc «ouvert» ; la population reçoit en permanence l'énergie dont elle a besoin pour vivre.*

Tout cela permet de schématiser la «réaction » du système :

– l'île est le lieu d'une transformation d'énergie : la nourriture s'y dégrade en déchets.

– cette «dégradation» est irréversible car jamais les déchets ne redeviendront d'eux mêmes «nourriture initiale» ; l'île satisfait ainsi aux lois habituelles de la thermodynamique.

– mais, ce flux d'énergie, qui passe ainsi de manière irréversible d'un état initial (nourriture) à un état final (déchets) crée l'apparition de «réactions intermédiaires» qui, elles, localement, sont indéfiniment oscillantes.

On peut ainsi énoncer le résultat général suivant : **une réaction oscillante ne peut se présenter que sur les produits intermédiaires d'une réaction effectuée en milieu ouvert et qui évolue de manière irréversible d'un état initial à un état final.**

– C'est ce qui se passe dans la réaction de Beloussov-Zhabotinski : les produits initiaux de la réaction tendent irréversiblement vers les produits finaux : ils s'usent et si on ne les renouvelle pas (milieu «ouvert») la réaction au bout d'un certain temps s'arrête ; au cours de ce «flux» entre produits initiaux et produits finaux, apparaît un «tourbillon de produits intermédiaires» qui eux passent indéfiniement d'un état à l'autre, (ions céreux, ions cériques) dans une ocillation permanente.

– C'est aussi ce qui se passe dans les phénomènes de turbulence : l'eau d'un torrent coule irrémédiablement de la source vers la mer... mais ce flux peut permettre quelque part la naissance d'un tourbillon dans lequel les mêmes molécules d'eau puissent indéfiniment tourner sur la même trajectoire.

Globalement l'énergie se dégrade toujours : la population de l'île ne peut se maintenir que parce qu'elle perçoit en permanence de l'énergie extérieure ; le tourbillon ne peut exister de manière stable que parce qu'il reçoit en permanence de l'eau de la source. Toutes ces oscillations cesseraient s'il n'y avait pas ce flux permanent d'énergie. Il n'y a donc **pas de mouvement perpétuel**. Il reste néammoins passionnant de constater que ce flux qui correspond bien à une «dégradation d'énergie» et donc à une augmentation du «désordre» de la nature, peut provoquer comme phénomène intermédiaire, **l'émergence d'un ordre, d'une complexification, d'une auto-organisation dynamique du système.**

La physique classique avait déjà observé de tels phénomènes dans lesquels un «non-équilibre» peut être une source d'ordre. La thermodiffusion, déjà observée, le siècle dernier, en est un exemple : lorsque l'on place un mélange de deux gaz dans une enceinte dont une paroi est chaude et une autre froide (déséquilibre thermique) on observe près de la paroi chaude un enrichissement de l'un des gaz alors que l'autre se rassemble près de la paroi froide. Cet exemple curieux n'avait cependant pas attiré l'attention. Il est à l'origine de la perspective adoptée par l'école de Bruxelles.

On comprend que cette «première solution oubliée» puisse venir bouleverser nos habitudes de penser et ouvrir bien des pistes. Ne pourrait-elle pas apporter une ouverture toute nouvelle sur les questions concernant l'apparition de la vie et la compréhension du vivant : un être vivant est un exemple typique de système ouvert et hors de l'équilibre !

3. LES 2n CYCLES

Ce phénomène très simple ouvre la porte à une foule de questions nouvelles que l'équation de départ ne suggérait pas a priori : si une solution si simple a pu être oubliée, pourquoi d'autres solutions, ne seraient pas également possibles ? Y-a-t-il encore d'autres valeurs de «a» pour lesquelles l'évolution dynamique du système pourrait manifester des comportements plus complexes ?

On pourrait par exemple chercher des comportements qui seraient solution du système de quatre équations :

(21 a) $$X'' = aX' (1 - X')$$

(21 b) $$X''' = aX'' (1 - X'')$$

(21 c) $$X'''' = aX''' (1 - X''')$$

(21 d) $$X' = aX'''' (1 - X'''')$$

Un tel système, s'il admet des solutions, correspondrait à une oscillation durant laquelle la population reprendrait indéfiniment les mêmes valeurs tous les quatre ans : (x_1, x_2, x_3, x_4), $(x_1, x_2, ...)$, ...

Pour résoudre ce système, et donc savoir si une telle oscillation plus complexe est possible, le plus simple est de raisonner comme dans le paragraphe précédent en «mettant de côté» un certain nombre de solutions déjà connues : les points fixes trouvés resteront des points fixes :

– la solution $x_a = 0$ est un point fixe et donc une solution du système (21),

– la solution $x_b = (a - 1)/a$ est également solution de ce même système : en injectant cette valeur dans (21 a), elle conduit à $x'' = x_b$ et donc, en utilisant les trois autres équations, à $x'''' = x''' = x'' = x' = x_b$.

– il en est de même pour les deux autres solutins x_c et x_d trouvées en (20) et qui définissaient la solution périodique précédente. Cette solution périodique est en effet nécessairement solution de (21) : si, pour ces valeurs, la population reprend la même valeur tous les deux ans, elle reprend a fortiori ces mêmes valeurs tous les quatre ans.

Étant ainsi en présence de quatre solutions du système (21) il ne nous en resterait plus que quatre à trouver. Nous ne présenterons pas le calcul ici, nous contentant seulement d'en discuter le résultat :

– pour $3 < a < (1 + \sqrt{6}) = 3,4495...$, le système n'admet pas d'autres solutions que les quatre solutions trouvées précédemment. Sauf pour

les deux points fixes (instables) x_a et x_b, son comportement dynamique est donc une oscillation entre deux valeurs x_c et x_d, indépendantes de x_0.
– pour a > $(1 + \sqrt{6}) = 3{,}4495...$, quatre nouveaux points limites apparaissent proches deux par deux des solutions précédentes x_c et x_d. Nous les notons pour cela (x'_c et x''_c) et (x'_d, x''_d).

C'est au tour de la solution périodique trouvée de perdre sa stabilité au profit d'une nouvelle dynamique : si l'on part exactement d'une des valeurs x_c ou x_d on oscille indéfiniment entre ces deux valeurs (oscillation fixe), mais si l'on s'en écarte d'une grandeur aussi petite soit elle, le système se trouve «attiré» par une oscillation permanente entre quatre nouvelles valeurs : (x'_c, x'_d, x''_c , x''_d), (x'_c, x'_d...), ... Un tel comportement est illustré sur la figure 13.

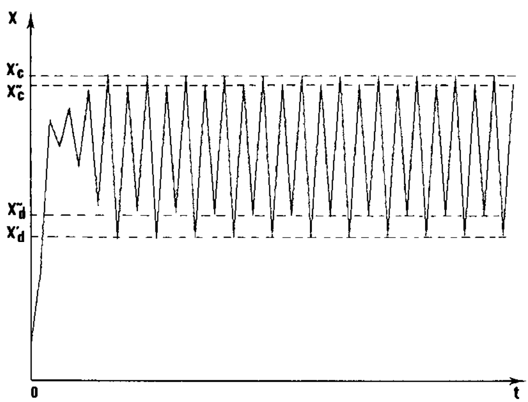

Figure 13 : Évolution de la population de l'île dans le cas où a = 3,53. Après avoir cherché quelques temps son «équilibre dynamique», la population trouve son «comportement limite» dans une oscillation entre quatre valeurs fixées.

La population ne reprend les mêmes valeurs que tous les quatre ans ; on dit que sa dynamique est 4-périodique en utilisant la définition suivante : **un système est n-périodique s'il reprend exactement les mêmes valeurs à des intervalles n.**

Donnons un exemple de système naturel pouvant être approché par un système 4-périodique. Comme celui des petits et des gros poissons, il fait intervenir plusieurs espèces en présence et ne peut donc être rigoureusement décrit par la seule équation (8) : c'est le système «prédateurs-proies» observé chez les lemmings. Ces derniers sont des petits mammifères vivant dans les pays Scandinaves ; leur dynamique démographique semble obéir au cycle quadriennal représenté sur la figure (14) :

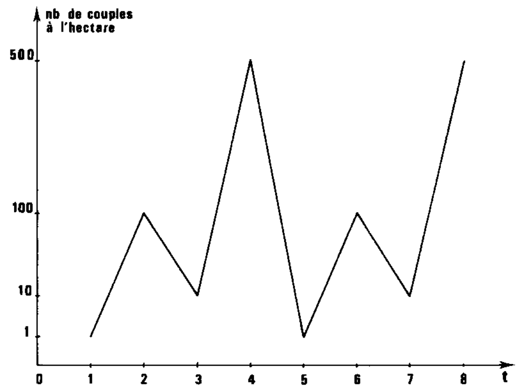

Figure 14 : cycle quadriennal observé chez les lemmings. Ce modèle est évidemment très simplifié puisque de nombreux paramètres extérieurs interviennent et varient éventuellement d'une année à l'autre (température, date du début de l'hiver etc.). Leurs «faux suicides», lorsqu'ils deviennent trop nombreux vient aussi compliquer les choses... En moyenne, on observe néammoins un tel cylce de quatre ans.

Pour le commenter, plaçons nous au début de l'été :

– au cours du premier été, le nombre de lemmings existant est si faible (**1** couple à l'hectare) que les prédateurs qui s'en nourissent habituellement sont partis ailleurs à la recherche d'une nourriture de substitution. Nos lemmings, tranquilles, en profitent pour se multiplier.

– d'un couple à l'hectare le premier été, ils se retrouvent ainsi à **100** au début de l'été suivant. Pour eux, cette seconde année du cycle commence en réalité fort mal car les naissances sont arrivées juste au début de l'été... la végétation que la chaleur estivale empêche de repartir est rare, la moitié des lemmings meurent et les prédateurs qui reviennent mangent une partie du reste.

– il ne reste ainsi que **25** couples à l'hectare au début du troisième été. Ce nombre correspond aux possibilités d'accueil du milieu. Comme les prédateurs, toujours présents, se développent moins rapidement qu'eux, les lemmings se multiplient sans problème.

– lorsque débute la dernière année du cycle, ils se retrouvent à **500** couples à l'hectare, obligés de vivre dans de mauvaises conditions : la végétation, trop intensément exploitée se fait rare, la disette freine leur ardeur reproductrice, les prédateurs qui se sont eux aussi développés sont nombreux... Certains lemmings se font dévorer ; d'autres, poussés par la faim essaient d'émigrer pour chercher ailleurs de la nourriture. Ils se noient en grand nombre en traversant les innombrables lacs scandinaves laissant ainsi croire à leurs «suicides collectifs». Les effectifs sont alors ramenés à ceux de la première année... les prédateurs vont devoir repartir...

Bien sûr, il s'agit là d'une simplification d'un système évolutif en réalité plus complexe car de nombreux facteurs peuvent venir perturber cette dynamique.

Les pistes pour étudier ce genre de dynamique démographique sont nouvelles ; le problème ne l'est pas : Aristote avait déjà décrit un tel cycle... mais il s'agissait alors des souris de Macédoine !

Cette nouvelle «solution oubliée» appelle de nouvelles questions : pourquoi ne pas essayer de résoudre, au lieu de (21), des systèmes d'équations de plus en plus nombreuses ? Pour simplifier, on pourrait d'abord envisager des cycles «pairs», correspondant à 8, 16, 32... équations. On verrait ainsi apparaître des 2n cycles... définis par des périodes 2n de plus en plus longues et notre population d'insectes ne reprendrait ainsi les mêmes valeurs que tous les 8, 16, 32... ans.

Il serait lourd et fastidieux d'entreprendre ici des calculs algébriques qui deviendrait d'ailleurs très vite inextricables. Nous pouvons cependant les observer à l'ordinateur. La figure 15 représente ainsi un cycle sur huit ans.

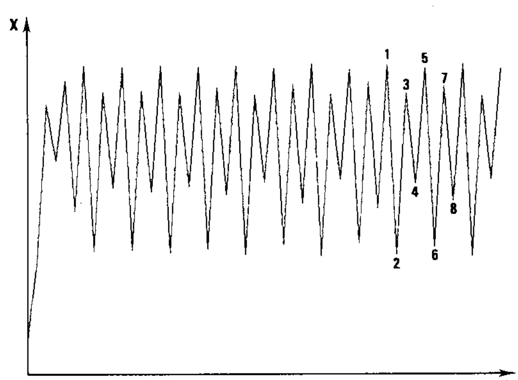

Figure 15 : Évolution de la population de l'île dans le cas où a = 3,57. Après avoir cherché quelques temps son «équilibre dynamique», la population trouve son «comportement limite» dans une oscillation entre huit valeurs précises.

Le comportement dynamique du système est résumé sur la figure 16 qui prolonge la figure 12 discutée tout à l'heure : pour certaines valeurs de a, les solutions, stables jusque là, perdent brusquement leur stabilité et se dédoublent au profit d'une nouvelle solution périodique de période plus longue. Les doublements se succèdent ainsi en cascade : les **catastrophes** se suivent de plus en plus rapprochées les unes des autres

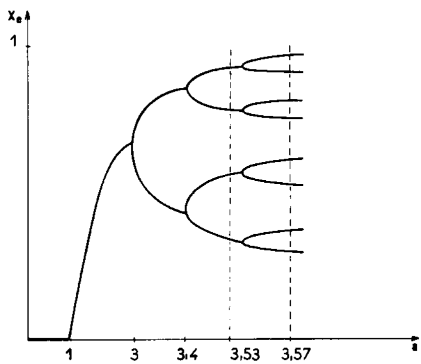

Figure 16 : Variations du «comportement limite» de la population de l'île en fonction du paramètre a. Les solutions stables sont en traits plein, les solutions instables sont en pointillés. Au fur et à mesure que a augmente la solution limite obtenue a une période de plus en plus longue :

– pour a = 3,53 la population, dans son «état limite» oscille entre quatre valeurs (figure 14)

– pour a = 3,57 par exemple, elle oscille entre huit valeurs (figure 15).

Par souci de clarté, l'échelle utilisée sur l'axe des abscisses n'est pas linéaire.

On peut entrevoir dès à présent un problème que nous devrons aborder par la suite : si la périodicité devient trop grande, un chercheur non prévenu pourra croire à un comportement complètement aléatoire ! *Quel observateur pourra s'apercevoir qu'il s'agit bien d'une solution périodique ?* Y a t-il un lien possible entre un comportement aléatoire et un comportement déterministe régit par une équation aussi simple que l'équation (8) ?

4. L'APPROCHE DU CHAOS

Fait remarquable, dans tous les cas précédents, la population, qui évolue vers des solutions de plus en plus complexes, le fait toujours indépendamment de sa valeur initiale Xo ; **la solution trouvée est**

toujours un nouvel attracteur, plus puissant que les attracteurs précédents, qui détruit leur stabilité à son profit.

Au-dessus d'un certain seuil, de nouveaux phénomènes apparaissent pourtant. Pour des raisons encore mal connues dans le cas général, tout se passe comme si l'attracteur ayant un domaine trop large de valeurs à couvrir perdait de sa «force» et de son «efficacité» : au lieu de suivre le parcours normal :

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

puis de reprendre exactement les mêmes valeurs :

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$$

le système dynamique revient vers ces valeurs *sans les retrouver exactement*... comme si l'attracteur n'arrivait plus à imposer à l'évolution démographique un comportement régulier, ou encore : *comme si, les périodes étant devenues trop longues, il avait oublié les valeurs exactes par lesquelles il était passé et ne s'en souvenait qu'à peu près.*

Ainsi, au lieu de passer par une suite de valeurs bien précises, la population prend «aléatoirement» des valeurs voisines de celles ci. Au lieu de passer d'une «**branche**» à l'autre, comme dans la figure 16, la population prend des valeurs aléatoires situées aux alentours de ces branches : des «**bandes**» de valeurs possibles apparaissent. Nous avons représenté ce nouveau comportement sur les figures 17 et 18.

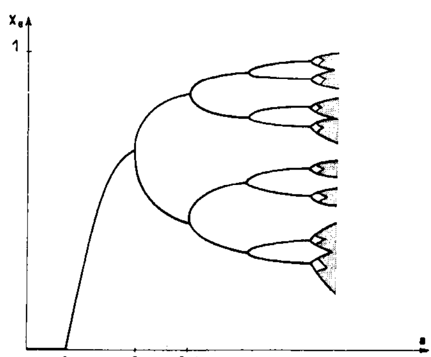

Figure 17 : L'approche du chaos. Lorsque «a» continue à augmenter, des bandes apparaissent : la population ne parcourt plus une suite de valeurs précises ; elle passe toujours avec la même régularité d'une bande à l'autre mais à l'intérieur de ces bandes, la valeur prise par la population est aléatoire.

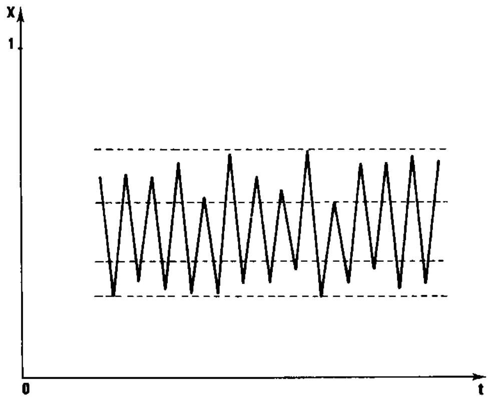

Figure 18 : Approche du chaos. Les valeurs prises par la population d'insectes ne se répètent plus de manière périodique : le système passe alternativement d'une bande à l'autre, mais à l'intérieur de chaque bande, la valeur de la population est aléatoire. Notons que pour des raisons de simplicité nous n'avons représenté que deux bandes alors qu'il peut, bien sur, y en avoir beaucoup d'autres.

Les points ont ainsi tendance à s'échapper de la trajectoire régulière utilisée jusqu'alors... *mais le phénomène d'attraction, toujours présent, ne leur permet pas de s'éloigner fortement :* nous somme en présence **d'attracteurs étranges.**

La représentation usuelle de tels attracteurs est basée sur le principe suivant : la «trajectoire» du système n'est pas vraiment stable ; elle passe toujours par des points très voisins les uns des autres, mais il ne s'agit pas toujours des mêmes points. On peut donc envisager de la couper par un plan qui lui est en gros perpendiculaire (figure 19) : les intersections de la trajectoire et du plan vont alors former *deux groupes de taches plus ou moins diffuses représentant ainsi l'attracteur* (figure 19 b). Si le système était périodique, seuls deux points précis apparaîtraient (figure 19 a). (Notons qu'en fait, les physiciens ne tracent pas la trajectoire dans l'espace R^3 mais dans un espace dit «espace des phases»: sur un axe est portée la position du système, sur un autre la vitesse. Cette représentation a bien des avantages mais nous ne nous y attarderons pas n'ayant ici pour but que de donner l'idée des «représentations» habituellement données aux «attracteurs étranges»).

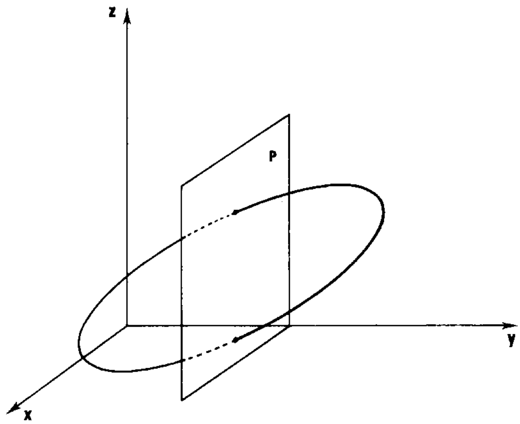

Figure 19 a : Représentation spatiale d'un mouvement périodique : si la trajectoire est rigoureusement périodique, elle coupe le plan P en deux points précis.

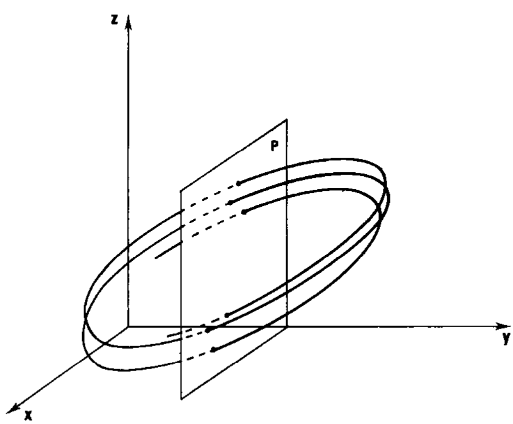

Figure 19 b : Pour certaines valeurs du paramètre dynamique du système, l'évolution n'est plus rigoureusement périodique : la trajectoire ne passe plus rigoureusement par les mêmes points sans toutefois s'en éloigner beaucoup ; ces derniers semblent ainsi «attirés» par une trajectoire moyenne sans l'être «assez fortement» pour la suivre exactement. Nous sommes en présence d'un attracteur étrange. Cet attracteur peut être représenté par l'ensemble des intersections de la trajectoire et du plan P. Au lieu d'obtenir deux points comme en (a), on obtient deux ensembles de points.

Figure 20 : Représentation d'un attracteur étrange : on est ici dans «l'espace des phases» ; l'axe des abscisses correspond à la position du mobile, celui des ordonnées à sa vitesse. Cette représentation est plus riche que la précédente.

Essayons d'analyser ce phénomène d'**approche du chaos**. On pourrait être tenté de l'interpréter comme le passage à une «super-période» qui nous échappe et qu'il n'est plus possible de déterminer : le système reprendra «plus tard» les mêmes valeurs, dans le même ordre... mais il faudrait attendre trop longtemps pour s'en apercevoir. N'était-ce pas déjà ce qui se passait lors de notre découverte de la solution 4-périodique (figure 15) ? nous nous attendions à voir se répéter une suite de deux valeurs x_c, x_d, x_c, x_d, ... (figure 9) et voilà qu'après les deux premières, nous ne retrouvions pas ces valeurs mais des valeurs très proches : x'_c, x'_d, x''_c, x''_d. La patience nous avait alors récompensés : après une période double de celle à laquelle nous nous attendions, nous étions bien revenus sur les valeurs initiales pour reprendre enfin un cycle déterminé : (x'_c, x'_d, x''_c, x''_d), (x'_c, x'_d, ...), etc. Pourquoi ne s'agirait-il pas maintenant du même phénomène ?

Il serait bien difficile de répondre d'emblée de manière négative. Il existe cependant une manière tout à fait rigoureuse de caractériser cette «approche du chaos». L'analyse précise du phénomène révèle en effet l'apparition d'un comportement radicalement nouveau : les solutions multipériodiques précédentes étaient indépendantes des conditions initiales du système ; il n'en est plus de même : *deux valeurs initiales de la population, même infiniment proches l'une de l'autre conduisent à une oscillation complexe entre les mêmes «branches» parcourues dans le même ordre, mais ne tombant jamais sur les mêmes valeurs.* Ainsi commence à se manifester une certaine **sensibilité du système à ses conditions initiales**. Cette sensibilité, nous le verrons, définit ce que l'on appelle le chaos. Nous dirons donc dès à présent que *l'apparition d'un attracteur étrange instaure le chaos dans un système dont le comportement était jusque là parfaitement régulier.*

5. LE CHAOS

Ainsi, *un système non dissipatif n'est pas contraint au repos sur un équilibre, mais peut «tourner» indéfiniment sur une trajectoire périodique ou «parcourir » un attracteur étrange*. D'autres possibilités lui sont également offertes. Nous allons les examiner.

Si l'on augmente encore la valeur du paramètre «a», les bandes trouvées s'élargissent peu à peu jusqu'à pouvoir se recouvrir (figure 21) :

– lorsqu'un tel recouvrement commence, il n'est même plus possible de définir l'évolution dynamique du système comme un passage successif d'une bande à l'autre.

– lorsque toutes les bandes se sont enfin recouvertes en une seule, il n'y a plus moyen de distinguer la moindre loi dans l'évolution annuelle de la population : c'est ce que l'on appelle le **chaos**.

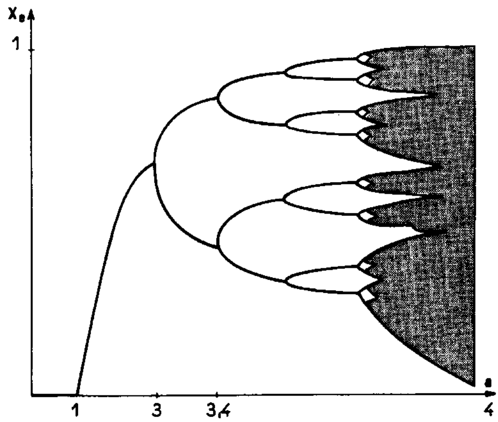

Figure 21 : le chaos. Lorsque a continue à augmenter, les bandes apparues dans la figure 17 se recouvrent. Il n'est donc plus possible de «classer» dans des bandes données les valeurs «aléatoires» prises chaque année par la population d'insectes ; l'évolution apparaît maintenant comme complètement aléatoire (voir figure 22).

Dans une telle dynamique, le comportement du système à long terme

- **n'est plus du tout prévisible,**
- **et dépend de manière très sensible des conditions initiales.**

Nous allons nous attacher à le démontrer.

Pour étudier ce nouveau type de dynamique le plus simplement possible, nous nous placerons dans le cas particulier où a = 4 qui conduit à une solution analytique simple. Dans ce cas, la transformation (8) s'écrit :

$$X_{j+1} = 4\,X_j(1 - X_j) \tag{22}$$

et peut s'étudier en faisant le changement de variable :

$$X_j = (1 - \cos 2\pi\theta_j)/2 \qquad \theta \in [0,\ 1/2] \tag{23}$$

après avoir vérifié qu'il respecte bien le domaine $x_j \in [0,\ 1]$ des solutions cherchées. En utilisant (23), l'équation (22) se transforme en une équation trigonométrique simple :

$$(1 - \cos 2\pi\theta_{j+1}) = 2\,(1 - \cos 2\pi\theta_j)\,(1 + \cos 2\pi\theta_j) \tag{24}$$

$$= 2\,(1 - \cos^2 2\pi\,\theta_j)$$

$$(1 - \cos 2\pi\,\theta_{j+1}) = (1 - \cos 2.2\pi\,\theta_j)$$

dont les solutions, dans l'intervalle $2\,\pi\theta \in [0,\ \pi]$, s'écrivent :

$$2\pi\,\theta_{j+1} = \pm\, 2\,.2\pi\,\theta_j + 2k\pi \tag{25}$$

soit encore :

$$\theta_{j+1} = 2.\theta_j \tag{26}$$

Ces résultats permettent d'écrire la valeur de θ_j et de X_j en fonction de θ_0 :

$$\theta_j = 2^j.\theta_0 \qquad \text{si } \theta_j \in [0,\ 1/2] \tag{27}$$

$$X_j = (1 - \cos 2\pi\,\theta_j)/2 = (1 - \cos 2\pi\, 2^j\,\theta_0)/2$$

Cette solution est étonnante à plusieurs égards :

a) On peut voir d'abord que n'importe quel nombre rationnel choisi pour θ_0 conduit à une solution cyclique fixe ou à un point fixe :

– Prenons par exemple, $\theta_0 = 1/3$, nous obtenons :

(28) $$X_0 = (1 - \cos 2\pi\ (1/3)/2$$

$$X_1 = (1 - \cos 2\pi\ (2/3)/2 = X_0$$

$$X_n = (1 - \cos 2\pi\ (2^n /3))/2 = X_0$$

Ainsi, dans ce cas particulier, la population gardera toujours la même valeur ; la solution trouvée est un point fixe. La raison en est claire : les valeurs $4\pi /3$, $8\pi/3$, $16\pi/3$... sont toute égales modulo 2π.

– Si nous essayons $\theta_0 = 1/5$, nous obtenons de même :

(29) $$X_0 = (1 - \cos 2\pi\ (1/5))/2$$

$$X_1 = (1 - \cos 2\pi\ (2/5)/2$$

$$X_2 = (1 - \cos 2\pi\ (4/5)/2 = X_0$$

et l'on observe ainsi une suite 2-périodique : (X_0, X_1), $(X_0, X_1,)$...

– Si l'on prend $\theta_0 = 1/9$, la solution aura une période 3 : (X_0, X_1, X_2), (X_0, X_1, X_2)... (notons en passant que nous n'avions pas encore trouvé de telles périodes impaires !)

Ainsi, pour a = 4, l'équation étudiée présente des solutions périodiques. En prologeant l'exploration précédente on montrerait de plus que **toutes les périodes sont possibles.** Une remarque importante s'impose toutefois concernant ces solutions :

b) Ces solutions sont purement formelles car elles sont inobservables. La preuve en est que si nous les cherchons sur notre calculette ou sur notre ordinateur, nous ne les trouvons pas.

Que se passe-t-il ? Le calcul ci-dessus est pourtant parfaitement exact ! ... La réponse tient dans les notions de «stabilité» et de «sensibilité aux conditions initiales» : les solutions périodiques trouvées sont instables et donc extrêmement sensibles aux conditions initiales. C'est cette sensibilité qui explique que nous ne puissions pas les «voir» à l'ordinateur ; elles ne peuvent être obtenues que pour des valeurs initiales *rigoureusement égales* aux valeurs utilisées dans le calcul ci-dessus : pour obtenir le point fixe trouvé dans (29), la valeur de x_0 à introduire dans notre calculatrice doit être *rigoureusement* égale à :

$$X_0 = (1 - \cos 2\pi\ (1/5))/2$$

Cela n'est pas possible puisque l'ordinateur coupe nécessairement des décimales... ne seraient-ce que celles du nombre π ! Si l'on prend π avec 18 décimales, on ne trouvera pas le même résultat que si on calcule avec 19 ! Ainsi, ces solutions que nous avons trouvées et qui existent pourtant ne peuvent être mises en évidence par ordinateur. Elles ne pourront sûrement pas non plus être rencontrées dans la nature : comment donner à un système physique une valeur initiale correspondant à une valeur de θ_0 *exactement* égale à 1/5 ? Nous reviendrons sur ce point.

En attendant, allons plus loin dans l'étude de ce phénomène de chaos pour montrer que cette **sensibilité aux conditions initiales** affecte non seulement ces solutions périodiques, mais *toutes* les solutions possibles de (22) : *dans tous les cas, une variation aussi petite que l'on veut de l'état initial entraîne le système dans une dynamique tout à fait différente*. En conséquence, la prévision exacte de son évolution future nécessiterait la connaissance de ses conditions initiales avec une précision «infinie» ! ... Cela n'est pas possible. Dans une situation de chaos, **l'évolution du système n'est donc plus prévisible.**

Pour bien comprendre ce résultat qui caractérise le chaos, nous allons montrer que **l'évolution «à long terme» du système est déterminée en fait par la dernière décimale de sa valeur initiale X_0** : si je veux faire des prévisions sur l'évolution démographique de mon île cela n'a pas d'importance de savoir si elle abrite 12.465.647.879 insectes, 4569 ou seulement 69 puisque seul le 9 final importe !

Ce résultat, bien sûr, est tout à fait provoquant ! Donnons en une première approche en réutilisant le changement de variable (23) et en choisissant θ_0 dans un intervalle de valeurs un peu plus vaste que précédemment. Choisissons par exemple :

(30) $$\theta_0 = 11{,}3126$$

En utilisant (27), la valeur X_j de la population l'année j s'écrit :

(31) $$X_j = (1 - \cos 2\pi.2^j \ 11{,}3126)/2$$

soit encore :

(32) $$X_j = (1 - \cos (2\pi.2^j \ 11 + 2\pi.2^j .0{,}3126)/2$$

Dans l'expression du cosinus, le terme $2\pi \ 2^j 11$ peut être supprimé sans problème puisqu'il correspond à un nombre entier de fois 2π. Chacun peut «voir venir» dès à présent la suite du raisonnement : dans le nombre 11,3126 la partie entière n'a aucune importance et va donc être supprimée. Sans doute allons nous montrer ensuite que l'on peut aussi supprimer le 3 puis le 1... jusqu'au moment où seul, le dernier chiffre significatif restera. C'est bien ce que nous nous proposons de faire : **l'évolution à long terme de la population dépend de ce seul dernier chiffre.**

La «ruse» à utiliser pour cela est d'écrire la valeur de la population initiale «en base 2». Une telle opération, toujours possible, consiste à écrire cette valeur en fonction des puissances successives de 2... A titre d'exemple, 128 peut se décomposer de la manière suivante :

(34) $$128 = 1.2^7 + 0.2^6 + 0.2^5 + 0.2^4 + 1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0$$

et donc s'écrire «en base 2» :

(35) $$128 \quad \Leftrightarrow \quad 10001100$$

Quelle que soit sa valeur, θ_0 peut ainsi s'écrire sous la forme :

(36) $$\theta_0 = a2^n + b2^{n-1} + ... + p2^2 + q2^1 + r2^0 +$$
$$+ a'2^{-1} + b'2^{-2} + ... + p'2^{-n} + ...$$

où a, b, c, ... a', b', c' ..., p'... sont des entiers. Avec cette écriture, X_j s'écrit :

(37) $$X_j = [1 - \cos 2\pi \ 2^j \ (a2^n + b2^{n-1} + ... + r2^0 +$$
$$+ a'2^{-1} + b'2^{-2} + ... + p'2^{-n})]/2$$

Le résultat cherché apparaît clairement dans cette expression :

– tous les termes correspondants à une puissance de 2 positive conduisent à un nombre entier de fois 2π et n'interviennent donc pas.

– il en est de même de tous ceux dont la puissance négative de 2 est inférieure à j.

– le premier terme à considérer est donc le terme pour lequel j-n devient égale à –1 soit : $2^{j-n} = 2^{-1}$.

En d'autres termes, la prévision de la valeur de la population l'année j nécessite de connaitre la n = j+1ème décimale (en base 2) de sa valeur initiale ; **plus on veut prévoir à long terme et plus la connaissance d'un grand nombre de décimales est nécessaire.**

Considérons la population française *en supposant que nous sommes dans des conditions où le paramètre de croissance «a» conduit à un comportement de type «chaotique »* : la connaissance de la population dans cinq ans nécessitera par exemple de connaître sa valeur aujourd'hui à 10 000 personnes près, sa connaissance dans huit ans à 1 000 personnes près... et pour prévoir sa valeur dans quinze ans, il faudra la connaître aujourd'hui à un seul individu près...

Le système dynamique est ainsi devenu extrêmement sensible aux conditions initiales. Cette propriété caractéristique du chaos entraîne l'imprédictibilité complète de son comportement qui apparaît de manière complètement aléatoire (figure 22).

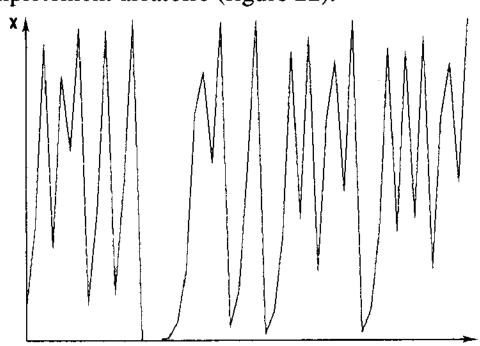

Figure 22 : Évolution de la population de l'île dans le cas où $a = 4$ (chaos). Les variations démographiques annuelles apparaissent comme complètement aléatoires alors qu'elles sont régies par une loi physique très simple et tout à fait déterministe : $X_{j+1} = 4\,X_j\,(1 - X_j)$. La même équation, entrée dans un autre ordinateur qui ne calculerait pas de la même façon, conduirait à une courbe tout à fait différente. La courbe ci-dessus ne représente donc en rien le phénomène physique réel et ne constitue qu'une illustration de son évolution chaotique.

Cette courbe a été tracée pour la valeur maximale permise pour a soit a = 4, en choisissant pour valeur initiale x_0 = 0,1. Bien sûr, elle ne peut qu'être une image illustrant ce que nous avons dit sur le chaos et qui ne correspond sans doute en rien au cas précis annoncé : dans son calcul, l'ordinateur coupe des décimales à chaque itération et vient donc nous priver chaque fois des seuls chiffres importants !... La courbe qu'il nous trace est donc différente de celle que nous aurait tracé un ordinateur qui aurait conservé dans ses calculs une décimale de plus ou de moins. On voit apparaître là un nouveau problème !...

Résumons ces résultats :

Lorsque le paramère d'hospitalité de l'île devient assez grand, l'évolution démographique de la population d'insectes devient complètement chaotique : **la prévision du comportement du système au bout d'un temps assez long nécessiterait une connaissance de ses conditions initiales avec une précision**

– impossible à réaliser,

– et également impossible à utiliser dans un ordinateur «ordinaire».

Son comportement n'est donc plus du tout prévisible.

Cette sensibilité aux conditions initiales est une première définition du chaos.

Il est également possible de définir le chaos de la manière suivante : dans un système chaotique, toutes les séries de valeurs dynamiques possibles sont équiprobables ; comme au jeu de dés : il y a la même probabilité de faire à la suite 6, 6, 3, 2, 9 que 6, 6, 6, 6, 6 ou 1, 2, 3, 4, 5. En d'autres termes, les observations futures sont totalement indépendantes des observations passées qui ne peuvent donc servir de base à aucune prévision. La connaissance des unes ne peut aider en rien à prévoir les autres ; comme au loto, la connaissance de mille suites déjà sorties ne peut pas aider à prévoir la mille et unième.

Si l'on veut donner du chaos une image analogue à celle des figures 19 et 20 en marquant successivement les passages de la trajectoire étudiée, tout le plan se trouvera couvert. Cette remarque permet de mettre en évidence le caractère «étrange» des attracteurs dont nous avons précédemment parlé :

– si nous raisonnons en faisant progressivement baisser la valeur du paramètre de croissance «a», nous allons pour a = 4 voir les points caractérisant la trajectoire s'en aller dans toutes les directions et couvrir la totalité du plan.

– lorsque «a» commence à baisser, nous allons voir apparaitre des îlots de points caractérisant la présence d'attracteurs dont l'effet est d'empêcher la trajectoire de partir n'importe où en les «attirant» vers une position moyenne. D'étranges petits îlots d'ordre apparaissent ainsi au milieu du chaos !

– si nous baissons encore la valeur de a, ces îlots diminuent jusqu'à devenir des points...

b) Discussions et remarques diverses :

Le chaos est ainsi caractérisé par une telle sensibilité du système à ses conditions initiales, que toute prévision de son comportement futur devient impossible.

Une illustration très parlante de ce fait est due à Edward Lorenz, que l'on doit considérer comme le pionner de ce genre d'études. Il étudiait en 1963 les phénomènes de convection atmosphérique lorsqu'il découvrit ce phénomène qu'il baptisa l'**effet papillon**.

On peut résumer ainsi ses conclusions : même si l'on connaissait parfaitement les lois dont dépendent les conditions atmosphériques, il n'en resterait pas moins impossible de faire des prévisions sur le temps à long terme car le seul battement des ailes d'un papillon perdu dans un coin du monde pourrait provoquer un déplacement d'air qui influerait sur la dynamique de l'atmosphère au point de conduire à des changements complets du comportement du système. Il raconte ainsi sa découverte :

«au cours de notre travail, nous décidâmes d'examiner l'une des solutions de manière plus détaillée ; nous prîmes des données intermédiaires qui avaient été imprimées par l'ordinateur et les introduisîmes comme de nouvelles données initiales. A notre retour, une heure plus tard, après que l'ordinateur eut simulé environ deux mois de temps, nous découvrîmes qu'il était en désaccord total avec avec la solution qu'il avait fournie antérieurement. Notre première réaction fut de suspecter une panne de machine, ce qui n'avait rien d'inhabituel, mais nous comprîmes rapidement que ces deux solutions n'émanaient pas de données identiques. L'ordinateur faisait les calculs avec six décimales mais n'en imprimait que trois, si bien que les nouvelles conditions initiales étaient égales aux anciennes plus de petites perturbations. Ces perturbations s'amplifiaient, doublant tous les quatre jours du temps simulé, si bien qu'au bout de deux mois les solutions allaient chacune de leur côté. J'en conclus immédiatement que, si les véritables équations régissant l'atmosphère se comportaient comme ce modèle, il serait impossible de faire des prévisions météorologiques détaillées à long terme».

Bien sûr la question de savoir ce que signifie précisément l'expression «à long terme» reste ici posée : s'agit-il de quelques mois ou de quelques millénaires ? Il n'est pas toujours facile de répondre à cette question pour un système dynamique donné. On peut cependant penser qu'il puisse s'agir de temps très courts : dans le cas de notre île, chaque itération représentait une année... mais dans d'autres systèmes, à évolution plus rapide, pourquoi ne s'agirait-il pas de quelques centièmes de secondes ?

Citons quelques évaluations faites à ce sujet :

– la première concerne d'une boule de billard : Que signifie «long terme» dans un tel cas ? La réponse à ce problème est la suivante : la prévision du mouvement *après le neuvième rebond* nécessiterait de tenir compte de l'attraction gravitationnelle qu'exercent sur elle le joueur et les personnes qui l'entourent.

– la seconde, tout à fait analogue, concerne l'agitation thermique : à température ordinaire, les molécules de l'air que nous respirons se déplacent à des vitesses supersoniques. L'oxygène, par exemple, vole à 480 m/s... et l'hydrogène (s'il y en a quelques traces) à 1900 m/s. On imagine aisément, si l'on tient compte de toutes les molécules présentes, le nombre de collisions quelles subissent ! On estime ainsi que chacune subit environ 10^{10} chocs par seconde. Supposons alors qu'au cours de ces chocs, nos molécules se comportent comme une boule de billard : quelle précision faudrait-il introduire dans les conditions initiale du mouvement d'une molécule pour pouvoir prédire son état dynamique au bout de «n» chocs ? La réponse est la suivante : si l'on néglige l'attraction gravitationnelle d'un électron situé aux confins de l'univers connu, le comportement de la molécule étudiée sera faux dès le "56$^{\text{ième}}$ choc"... c'est-à-dire, dès le premier milliardième de seconde !

Ces mêmes questions se posent bien sûr pour tous les systèmes mécaniques : la trajectoire d'une fusée lancée dans l'espace n'est sans doute pas prévisible sur une trop longue période temporelle. Le mouvement de la terre lui-même est problématique à long terme : notre planète se rapprochera-t-elle du Soleil ou au contraire va-t-elle s'en éloigner pour se lancer dans une course folle à travers l'espace ? Répondre à cette question nécessiterait de connaître les effets perturbatifs de toutes les autres planètes du système solaire.

Ainsi, le «futur» n'est-il pas toujours contenu dans le passé ; dans bien des cas, nous ne pouvons qu'en prédire divers «scénarios possibles».

Arrêtons nous sur ces résultats qui bouleversent en fait nos habitudes de penser. Revenons à notre île et à nos insectes : dans le cas du «chaos», nous nous trouvons en présence d'un système :

– **dont le comportement est complètement aléatoire :** toutes les trajectoires sont également possibles ; à moins d'une précision absolue, impossible à réaliser, aucune expérience ne peut dans ce cas être reproductible.

– **et qui est pourtant parfaitement déterministe** puisque décrit par une équation toute simple (l'équation 22).

Ainsi, bien que la population évolue, dans ce cas de chaos, de façon complètement aléatoire, il existe sur notre île, une loi de croissance démographique précise et déterministe... En d'autres termes : **notre intuition nous trompe quand elle nous fait opposer déterminisme et chaos.** Il est inutile de souligner que cette découverte peu intuitive d'un **«chaos déterministe»** est d'une importance conceptuelle considérable. (Soulignons ici que nous ne soulevons dans cet article, aucun des problèmes spécifiques posés par la mécanique quantique : tous nos raisonnements et exemples se situent exclusivement dans le domaine «classique»). Parmi toutes ses conséquences l'une d'elle concerne les mathématiques : si une équation déterministe peut conduire à des effets aléatoires, cela signifie entre autre, qu'**un modèle mathématique même exact peut ne pas être prédictif.** Poincaré, déja, avait attiré l'attention sur ce point.

En faisant varier de 1 à 4 le paramètre «a», nous avons ainsi exploré une équation tout simple. Après avoir traversé des domaines multipériodiques et rencontré des attracteurs étranges, nous nous trouvons maintenant aux frontières du quantifiable et nous y sommes subitement bien démunis : l'ordinateur, qui ne peut conserver toutes les décimales qui nous seraient nécessaires, nous a irrémédiablement lâché... et les méthodes mathématiques habituelles ne peuvent plus nous être d'aucun secours : même exact, un modèle mathématique ne nous permettra plus aucune prévision. Que pouvons nous faire ? Nous risquerons nous à explorer plus loin «à mains nues» toutes ces questions nouvelles ?

Une nouvelle perspective de recherche peut s'ouvrir ici : celle d'une étude non plus quantitative (nous n'en avons plus les moyens), mais qualitative dans laquelle nous pourrions *demander aux mathématiques et à la physique non plus de calculer, comme nous avons peut-être trop pris l'habitude de le faire, mais de décrire.* Comme l'écrit I. Ekeland (livre cité en bibliographie) : «les mathématiques continuent quand les calculs s'arrêtent. La limite du quantifiable n'est pas la limite des mathématiques : par des méthodes nouvelles, **qualitatives et non plus quantitatives**, on cherchera moins à faire des prévisions exactes en toutes circonstances qu'à se faire une idée générale des possibles». Ainsi, même si les nombres qui caractérisaient les phénomènes nous lâchent, sans doute est-il possible d'identifier ces phénomènes par des «formes» : l'identification, par exemple, d'un attracteur étrange peut permettre de comprendre le devenir global d'un système, même s'il demeure impossible de calculer son avenir.

René Thom avait lui aussi souligné ce même point : «quantité de phénomènes familiers (au point qu'ils n'en attirent plus l'attention) sont cependant de théorie difficile : par exemple les lézardes d'un vieux mur, la forme d'un nuage, la chute d'une feuille morte, l'écume d'un bock de bière... qui sait si une réflexion mathématique un peu poussée sur ce genre de petits phénomènes se ne révèlerait pas, finalement, plus profitable à la science ?» Aussi simple que cette remarque puisse paraître, ce sont là de nouveaux horizons qui s'ouvrent aux recherches : nous ne pourrons peut-être pas prédire numériquement l'évolution des nuages ou des lézardes qui courent sur les vieux murs, mais sans doute existe t'il des lois de leur évolution : saurons nous les observer avec assez d'attention pour leur découvrir des «points» communs ? Saurons nous revenir à cette attitude première de la recherche qui est l'observation précise, méticuleuse, des phénomènes ?

En ce qui concerne cette apparition du chaos, de tels points communs ont d'ores et déjà été observés entre différents phénomènes. Trois «routes» ont été découvertes qui conduisent au chaos... d'autres seront sans doute explorées bientôt.

– sur la première, le chaos est annoncé par dédoublement de plus en plus rapide de solutions périodiques ; c'est le cas de l'exemple que nous avons présenté.

– sur la seconde, sa présence est annoncée par la superposition progressive de mouvements accomplis à des périodes indépendantes.

– sur une troisième apparaissent, «par intermittence», des fluctuations anormales qui interrompent de plus en plus fréquemment une dynamique régulière.

6. CONCLUSIONS

Il n'est pas possible de conclure un récit qui n'avait pour but que de conter le début d'une histoire. Au mieux pouvons nous insiter sur quelques points qui nous paraissent plus essentiels dans la démarche que nous avons présentée :

Nous avions donné pour titre de notre premier chapitre : «les solutions oubliées». Il est important de revenir sur ce point étonnant pour en goûter l'enseignement. :

– notre équation de départ n'aurait jamais laissé prévoir une telle richesse cachée : la nature toujours nous comble et toute expérience, tout calcul, peut conduire à des merveilles pour qui sait «ouvrir les yeux». Nos élèves et nos étudiants sont là pour l'apprendre. Il n'y a pas de physique possible sans cette curiosité et cet étonnement...

– cette équation de départ, de plus, était très simple... et ce fait a aussi son importance : il n'est pas toujours nécessaire de faire de «grands calculs» ou des expériences très coûteuses pour aborder des questions d'actualité, y prendre plaisir, et peut-être, se «mettre en marche».

Un autre point sur lequel nous voudrions insister est que l'histoire que nous avons contée n'est pas celle d'un nouveau chapitre de la physique, mais celle d'horizons nouveaux qui s'ouvrent dans toutes les disciplines (chimie, acoustique, optique, électronique, bien sûr, mais aussi biologie, économie, sciences sociales...) Nous avions choisi l'exemple d'insectes vivants sur une île en précisant que chacun pourrait le transcrire dans son propre domaine en nommant, selon ses goûts propres et ses centres d'intérêt, les habitants de son île. Chacun peut à présent le faire.

Enfin, nous avions annoncé qu'il existait dans l'épaisse forêt des phénomènes inexplorés, certains points de vue privilégiés d'où chacun, quel qu'il soit et quel que soit son niveau de connaissances, pouvait scruter le paysage, essyer d'en comprendre les contours et se lancer lui aussi sur les pistes de la découverte. L'utilisation d'un ordinateur ou d'une caculatrice programmable dans l'étude de l'équation présentée peut en ce sens ouvrir bien des pistes d'explorations : pourquoi ne pas essayer soi-même d'autres équations et exercer sur elles notre regard *? Peut-être nous conduiront-elles vers de nouvelles questions ; peut-être verrons nous apparaitre des comportements étranges et semblables entre deux processus apparemment distincts. Une remarque toutefois : lorsqu'on se lance ainsi dans l'inconnu, il est bon de noter soigneusement tout ce que l'on fait et voit ! Certaines vallées entrevues un jour sont parfois bien difficile à retrouver !

BIBLIOGRAPHIE

a) articles ou ouvrages non spécialisés.

P. BERGE, Y. POMEAU La turbulence. La Recherche 110 (1980) p. 422

J. P. BRISSET Oscillations chimiques : Systèmes chimiques oscillants. Bull. Union des Phys. 629 (1980) 371

V. CROQUETTE Déterminisme et Chaos. Pour la Science n°62 (1982) p. 62

M. DUBOIS Attracteurs étranges et dimensions fractales. Images de la Physique (1984) p. 92

I. EKELAND Le Calcul, l'Imprévu. Seuil, Points-Sciences (1984)

I. EPSTEIN, K. KUSTIN, P. DE KEPPER., M. ORBAN La réaction chimique oscillante. Pour la Science n°67 (1983) p. 69

M. J. FEIGENBAUM Univesal behaviour in nonlinear systems. Los Alamos Science. Summer 1980 p. 26

M. HENON La diffusion chaotique. La Recherche 209 (1989) p. 490

D. HOFSTADTER Jeux mathématiques. Pour la Science n°53 (1982)

L. P. KADANOFF Roads to Chaos. Physics Today, Décembre (1983) p. 46

* La publication de cet article dans les cahiers de l'IREM de Besançon (Mars 1989) contient entre autre un programme basic permettant de tracer des courbes d'approche de chaos telles que celle de la figure 21. Il permet aussi, pour les amateurs, d'en faire de la "musique chaotique" et donc de les écouter.

C. KAPPENSTEIN La cinétique chimique : théorie et expérience. Bull. Union des Phys. 644 (1982) 851

D. RUELLE Les attracteurs étranges. La Recherche 108 (1980) p. 132

D. RUELLE Déterminisme et prédicibilité. Pour la Science 82 (1984) P. 58

C. VIDAL, J. C. ROUX La turbulence chimique existe t'elle ? La Recherche 107 (1980) p. 66

C. VIDAL, J. C. ROUX Comment naît la turbulence. Pour la Science 39 (1981) p. 50

J. WALKER Expériences d'amateurs. Pour la Science n°11 (1978)

b) ouvrages spécialisés :

P. BERGER, Y. POMEAU, C. VIDAL L'ordre dans le chaos. Vers une approche déterministe de la turbulence. Hermann (1984).

I. PRIGOGINE Physique, Temps, Devenir. Masson Paris (1980)

C. SPARROW The Lorenz equations. Springer Verlag (N. Y.) (1982)

R. THOM Stabilité structurelle et morphogénèse. Benjamin (New York) (1972).